

*Механика*

УДК 533.6.

Л. Е. ДАНИЕЛЯН, Ю. Г. ДАДАЯН

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
 НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА ПО  
 МАГИСТРАЛЬНОМУ ГАЗОПРОВОДУ

Рассматривается задача нестационарного движения газа по длинному газопроводу с учетом силы тяжести. Исследуется изменение газодинамических параметров в зависимости от заданных условий. Задача решается численным методом. Для этой цели в общей постановке построена явная схема решения и выведены условия устойчивости предложенной схемы. Вычислен конкретный числовой пример, результаты которого представлены в виде графиков и таблиц.

§ 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим одномерное нестационарное изотермическое движение газа по длинному трубопроводу с учетом силы тяжести. Такое движение газа можно описать следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\lambda \rho u^2}{2d} + \gamma \sin \alpha, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} (\rho u), \\ p &= \rho g R T, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $p$ ,  $\rho$ ,  $u$ —соответственно средние по сечению давление, плотность и скорость газа,  $\alpha$ —угол наклона газопровода, остальные обозначения общеприняты.

С помощью нескольких математических преобразований систему (1.1) можно свести к одному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно квадрата давления [2].

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\sqrt{P}}{b} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + a \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1.2)$$

где  $b = \left( \frac{\lambda \rho u}{2d} \right)_{\text{ср}} = \text{const}$ ;  $a = \frac{\gamma \sin \alpha}{b}$ ;  $P(x, t) = p^2(x, t)$ .

Для решения конкретной краевой задачи зададим следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0, \quad P &= P_n = \text{const}; \\ \text{при } x=L, \quad P &= P_k (1 - \sin^2 \omega t); \\ \text{при } t=0, \quad P &= P_0(x). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Требуется решить задачу (1.2—(1.3) в области  $D = \{ \ll x \leq L, 0 \leq t \leq T_0 \}$ .

Здесь  $P_0(x)$  — функция, показывающая закон изменения квадрата давления вдоль трубопровода при стационарном режиме работы;  $\omega = \pi/t_0$ , где  $t_0$  — полный период колебания расхода газа в течение суток,  $P_n$  и  $P_k$  — значения давления в начале и в конце трубопровода.

Поскольку аналитическое решение нелинейного уравнения (1.2) с условиями (1.3) не представляется возможным, то данная задача решается численным методом с применением ЭВМ.

Чтобы решить основную задачу, предварительно необходимо найти решение стационарной задачи ( $P_0(x)$ ), т. е. решение дифференциального уравнения

$$\frac{\sqrt{P}}{b} \frac{d^2P}{dx^2} + a \frac{dP}{dx} = 0 \quad (1.4)$$

при граничных условиях:

$$\begin{aligned} P &= P_n \text{ при } x=0, \\ P &= P_k \text{ при } x=L. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Таким образом, зная решение стационарной задачи (1.4) — (1.5) в общем виде, вопрос сводим к решению следующей краевой задачи: найти решение нелинейного дифференциального уравнения параболического типа

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\sqrt{P}}{b} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + a \frac{\partial P}{\partial x}$$

при условиях

$$P(0, t) = P_n, \quad P(L, t) = \psi(t), \quad P(x, 0) = P_0(x). \quad (1.6)$$

## § 2. СХЕМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ И ВЫВОД УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Для численного решения задачи (1.6) напомним следующую явную разностную схему [3]:

$$\begin{aligned} \frac{V_n^{m+1} - V_n^m}{\tau} &= \frac{\sqrt{V_n^m}}{b} \frac{V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m}{h^2} + a \frac{V_{n+1}^m - V_{n-1}^m}{2h}, \\ V_0^m &= P_n; \quad V_N^m = \psi(t_m), \quad m=0, 1, 2, \dots, M; \\ V_n^0 &= P_0(x_n), \quad n=1, 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\tau = T_0/M$ ;  $h = L/N$ ,  $x_n = nh$ ;  $t_m = \tau m$ ;  $h$  — шаг по переменной  $x$ ;  $\tau$  — шаг по переменной  $t$ .

*Теорема 1.* Если функция  $P(x, t)$  имеет ограниченную частную производную второго порядка по переменной  $t$  и ограниченные частные производные третьего и четвертого порядков по переменной  $x$ , то разностная схема (2.1) аппроксимирует граничную задачу (1.6) точностью второго порядка по переменной  $x$  и точностью первого порядка по переменной  $t$ , т. е.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\sqrt{P}}{b} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - a \frac{\partial P}{\partial x} \right) \Big|_{(x_n, t_m)} &= \frac{P_{n+1}^m - P_n^m}{\tau} - \\ - \frac{\sqrt{P_n^m}}{b} \cdot \frac{P_{n+1}^m - 2P_n^m + P_{n-1}^m}{h^2} - a \frac{P_{n+1}^m - P_{n-1}^m}{2h} &+ O(\tau) + O(h^2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$|O(\tau)| \leq \frac{\tau}{2} \max_{(x,t) \in D} \left| \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2} \right|, \quad (2.3)$$

$$|O(h^2)| \leq \frac{h^2}{12} \left( \frac{\sqrt{P_{\max}}}{b} \max_{(x,t) \in D} \left| \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} \right| + 2a \max_{(x,t) \in D} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right| \right). \quad (2.4)$$

*Доказательство.* Разлагая функцию  $P_{n+1}^m \equiv P(x_n, t_m + \tau)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x_n, t_m)$ , получим

$$\begin{aligned} P_{n+1}^m &= P(x_n, t_m + \tau) = P(x_n, t_m) + \\ &+ \tau \frac{\partial P(x_n, t_m)}{\partial t} + \\ &+ \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 P(x_n, t_m + \theta\tau)}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

где  $0 < \theta < 1$ .

Отсюда, учитывая, что  $\max_{(x,t)} \left| \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right|$

ограниченная, получим

$$\frac{P_{n+1}^m - P_n^m}{\tau} = \frac{\partial P}{\partial t} + O(\tau). \quad (2.5)$$

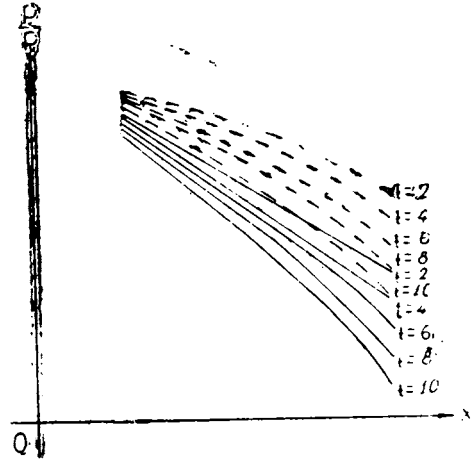


Рис. 1.

Подобным образом разложим в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x_n, t_m)$  функции  $P_{n+1}^m \equiv P(x_n + h, t_m)$  и  $P_{n-1}^m \equiv P(x_n - h, t_m)$

$$\begin{aligned} P_{n+1}^m &= P(x_n + h, t_m) = P(x_n, t_m) + h \frac{\partial P(x_n, t_m)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 P(x_n, t_m)}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 P(x_n, t_m)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 P(x_n + \theta_1 h, t_m)}{\partial x^4}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} P_{n-1}^m &= P(x_n - h, t_m) = P(x_n, t_m) - h \frac{\partial P(x_n, t_m)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 P(x_n, t_m)}{\partial x^2} - \\ &- \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 P(x_n, t_m)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 P(x_n - \theta_2 h, t_m)}{\partial x^4}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

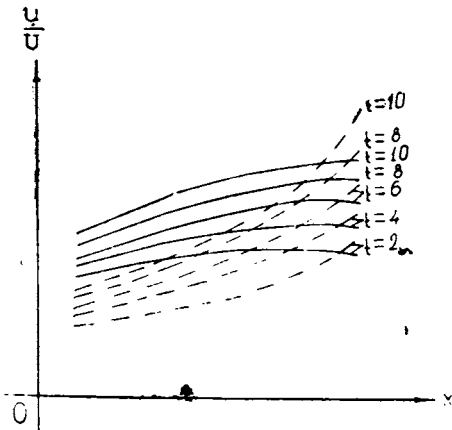


Рис. 2.

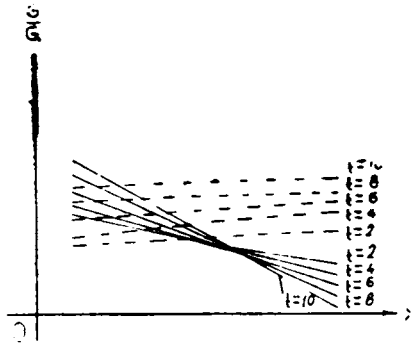


Рис. 3.

где  $0 < \theta_1 < 1$ ,  $0 < \theta_2 < 1$ .

Сложив равенства (2.6) и (2.7), получим

$$\frac{P_{n+1}^m - 2P_n^m + P_{n-1}^m}{h^2} = \frac{\partial^2 P(x_n, t_m)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{24} \left( \frac{\partial^4 P(x_n + \theta_1 h, t_m)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 P(x_n - \theta_2 h, t_m)}{\partial x^4} \right). \quad (2.8)$$

Если в разложениях (2.6) и (2.7) ограничиться только четвертыми членами и вычесть их друг из друга, то получим

$$\frac{P_{n+1}^m - P_{n-1}^m}{2h} = \frac{\partial P(x_n, t_m)}{\partial x} + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^3 P(x_n + \theta_3 h, t_m)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 P(x_n - \theta_4 h, t_m)}{\partial x^3} \right), \quad (2.9)$$

где  $0 < \theta_3 < 1$ ,  $0 < \theta_4 < 1$ .

На основе неравенств (2.3) и (2.4) из соотношений (2.5), (2.8) и (2.9) получим (2.2). Теорема доказана.

*Теорема 2.* Если выполняются неравенства

$$1 - \frac{2\tau}{bh^2} \sqrt{P_n} > 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{P_1} > \frac{b|a|}{2} h, \quad (2.10)$$

где  $P_1 = \min_{(x, t) \in D} P(x, t) > 0$ , то схема (2.1) устойчива.

Из (2.1) можем записать

$$V_n^{m+1} = \left( \frac{\tau}{bh^2} \sqrt{V_n^m} + \frac{\tau}{2h} a \right) V_{n+1}^m + \left( 1 - \frac{2\tau}{bh^2} \sqrt{V_n^m} \right) V_n^m + \left( \frac{\tau}{bh^2} \sqrt{V_n^m} - \frac{\tau}{2h} a \right) V_{n-1}^m. \quad (2.11)$$

Так как функция  $P_0(x)$  убывающая, то  $\max_{0 < x < 1} P_0(x) = P_n$ .

Тогда из равенства (2.11), учитывая (2.10), получим

$$V_n^{m+1} \leq \left( \frac{\tau}{bh^2} \sqrt{V_n^m} + \frac{\tau}{2h} a \right) \max_n V_{n+1}^m + \left( 1 - \frac{2\tau}{bh^2} \sqrt{V_n^m} \right) \max_n V_n^m + \left( \frac{\tau}{bh^2} \sqrt{V_n^m} - \frac{\tau}{2h} a \right) \max_n V_{n-1}^m = \max_n V_n^m.$$

Так как последнее неравенство верно для любого  $n$ , то

$$\max_{0 < n < N} V_n^{m+i} \leq \max_{0 < n < N} V_n^m.$$

Из этого следует, что

$$\max_n V_n^m \leq P_n = \max_{0 < n < N} P_0(x), \quad m=0, 1, 2, \dots, M.$$

А это означает, что схема (2.1) устойчива.

### § 3. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Для решения конкретного числового примера зададим следующие данные:

$$L = 3 \cdot 10^3 \text{ м}, \quad d = 0,7 \text{ м}, \quad \lambda = 0,012, \quad R = 50 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

$$P_n = 25 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}, \quad P_k = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}, \quad b = 0,08, \quad \gamma = 0,733 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$h = 0,05, \quad \tau = 0,001.$$

Чтобы осуществить численные расчеты на ЭВМ, удобно в задаче перейти к безразмерным величинам.

Задача (1.2) — (1.3) в безразмерных переменных принимает вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sqrt{P} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + 4,398 \sin \alpha \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.1)$$

при  $x=0$ ,  $P=1$ ;

при  $x=1$ ,  $P=0,2 (1 - \sin 0,13t)$ ; (3.2)

при  $t=0$ ,  $P=P_0(x)$ ,

где  $P_0(x)$  — решение дифференциального уравнения

$$\sqrt{P} \frac{d^2 P}{dx^2} + 4,398 \sin \alpha \cdot \frac{dP}{dx} = 0, \quad (3.3)$$

удовлетворяющее условиям

$$P=1 \text{ при } x=0, \quad P=0,2 \text{ при } x=1. \quad (3.4)$$

Задача решена на ЭВМ ЕС-1033 для случаев  $\alpha=0^\circ, \pm 10^\circ, \pm 20^\circ, \pm 30^\circ$ . При  $\alpha=0$  решение задачи (3.3) — (3.4) будет  $P_0(x) = -0,8x + 1$ . При  $\alpha \neq 0$  решение уравнения (3.3) записывается в виде

$$P_0(x) + \ln |C_1 - P_0(x)| + 4,398 \sin \alpha \cdot (x + C_2) = 0, \quad (3.5)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условий (3.4).

Значения  $P_0(x)$  из трансцендентного уравнения (3.5) в точках  $x_n (n=1, 2, 3, \dots, N)$  определяются приближенными методами [4]. После определения  $P_0(x_n)$ , решая явную схему (2.1), определяем значения  $P(x, t)$  в узлах  $(x_n, t_m)$ .

Имея значения давления, плотность, скорость и расход газа определяем по следующим формулам:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{gRT} p(x, t),$$

$$u(x, t) = \sqrt{-\frac{2dgRT}{\lambda p} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2dgRT\gamma}{\lambda p} \sin \alpha},$$

$$G(x, t) = \frac{s}{gRT} u(x, t) \cdot p(x, t).$$

Значения давления, скорости и расхода при  $\alpha = \pm 10^\circ$  приведены на рис. 1, 2, 3, где сплошные линии соответствуют значению  $\alpha = +10^\circ$ , а пунктирные — значению  $\alpha = -10^\circ$ . Сравнивая эти результаты, мы замечаем, что между ними есть существенная количественная разница, которая в пределах полного периода колебания расхода с течением времени увеличивается.

В табл. 1 и 2 приведены изменения давления вдоль газопровода в различные моменты времени для значений  $\alpha = +20^\circ; +30^\circ$ . Эти результаты показывают, что член свободной конвекции в уравнениях дви-

жения газа играет значительную роль и этот фактор необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации магистральных газопроводов большого диаметра в пересеченных местностях.

Таблица 1

Изменение давления при  $\alpha = +20^\circ$ 

$t \backslash x$	2	4	6	8	10
2	0,904	0,730	0,587	0,480	0,409
4	0,895	0,702	0,540	0,418	0,341
6	0,885	0,672	0,488	0,349	0,266
8	0,875	0,639	0,430	0,269	0,183
10	0,864	0,600	0,354	0,157	0,099

Таблица 2

Изменение давления при  $\alpha = +30^\circ$ 

$t \backslash x$	2	4	6	8	10
2	0,869	0,652	0,505	0,427	0,394
4	0,855	0,607	0,438	0,354	0,324
6	0,838	0,554	0,357	0,271	0,248
8	0,819	0,489	0,254	0,178	0,168
10	0,800	0,423	0,142	0,111	0,108

ЕрЗВИ, ЕГУ

Поступила 17.02.1984

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.-Л.: Гос. изд. тех-теор. литературы, 1951.
2. Даниелян Л. Е. Неустановившееся движение реального газа в длинном газопроводе.—Изв. АН Арм. ССР, серия механика, 1970, т. 23, № 1.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1, М.: Наука, 1966.

Լ. Ե. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, ՅՈՒ. Գ. ԴԱԴԱՅԱՆ

**ՄԱԳԻՍՏՐԱԼԱՅԻՆ ԳԱԶԱՄՈՒՂՈՒՄ ԳԱԶԻ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ  
ՇԱՐԺՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ԹՎԱՅԻՆ ՄԵԹՈՂԻ ՄԱՍԻՆ**

**Ա մ փ ո փ ու մ**

Դիտարկվում է երկար գազամուղում գազի ոչ ստացիոնար շարժման խնդիրը ծանրության ուժերի հաշվառմամբ: Հետազոտվում է գազոդինամիկական պարամետրերի փոփոխությունները՝ կախված տված պայմաններից:

Խնդիրը լուծվում է թվային մեթոդով: Այդ նպատակով ընդհանուր դրվածքով կառուցվում է լուծման բացահայտ սխեմա և ապացուցվում առաջարկված սխեմայի կայունությունը: Հաշվվում է կոնկրետ թվային օրինակ, որի արդյունքները ներկայացվում են գրաֆիկների և աղյուսակների տեսքով: