ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 1981 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

В. С. САРКИСЯН, А. В. КЕРОПЯН

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ С ДВУМЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Рассматривается контактная задача для упругой бесконечной полосы с двумя полубесконечными упругими включениями малой толщины, когда на краях включения действуют сосредоточенные силы.

Решение задачи при помощи интегрального преобразования Фурье сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений относительно деформации конечного промежуточного интервала между включениями, решение которых строится с помощью аппарата ортогональных многочленов Якоби. После определения деформации в промежуточном конечном интервале неизвестные нормальные и тангенциальные контактные напряжения в полубесконечных симметричных интервалах выражаются через найденные деформации в замкнутом виде.

Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости, усиленной на ее границе с двумя одинаковыми полубесконечными упругими накладками, рассматривалась в [1].

1°. Пусть упругая бесконечная полоса (модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν и толщина 2H) защемлена гранями $y=\pm H$ и содержит две полубесконечные упругие включения малой толщины h с одинаковыми модулями упругости E_1. Задача заключается в определении неизвестных нормальных $q(x)$ и тангенциальных $\tau(x)$ контактных напряжений вдоль линии соединения включения с полосой, когда на краях включения (в точках $x=\pm a$) действуют сосредоточенные силы, которые направлены вдоль оси включения в одну сторону. Здесь, как и в [2, 3]. относительно включения предполагается, что его толщина в процессе деформации не изменяется, а под действием только горизонтальных сил оно растягивается или сжимается как стержень, находясь в одноосном напряженном состоянии.

Для вывода основной системы разрешающих функциональных уравнений представим выражение вертикальных и горизонтальных перемещений точек контактирующей части упругой полосы с включением в следующем виде [4]:

$$\frac{1}{\mu}\left[\int_{-\infty}^{\infty} k_{11}(|x-s|)Q(s)ds-\int_{-\infty}^{\infty} k_{12}(x-s)T(s)ds\right]=\frac{1}{\mu}G_v(x),$$
$$\tag{1.1}$$
$$\frac{1}{\mu}\left[\int_{-\infty}^{\infty} k_{21}(x-s)Q(s)ds+\int_{-\infty}^{\infty} k_{22}(|x-s|)T(s)ds\right]=U^{(2)}(x)+\frac{1}{\mu}G_u(x),$$

где

$$k_{sj}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{K}_{sj}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma \quad (s,\ j=1,\ 2), \tag{1.2}$$

$$\overline{K}_{jj}(\sigma)=(2\varkappa+1)[(\varkappa+1)\operatorname{sh}2|\sigma|H+(-1)^j 2\varkappa|\sigma|H]/2|\sigma|K(\sigma) \quad (j=1,\ 2),$$

$$\overline{K}_{12}(\sigma)=\overline{K}_{21}(\sigma)=i[(\varkappa+1)(1-\operatorname{ch}2\sigma H)+4\varkappa^2\sigma^2H^2]/2\sigma K(\sigma),$$

$$K(\sigma)=2\varkappa(\varkappa+1)\operatorname{ch}2\sigma H+\varkappa^2(4\sigma^2H^2+1)+(\varkappa+1)^2, \quad \varkappa=(\lambda+\mu)/2\mu,$$

$$Q(x)=[\theta(-x-a)+\theta(x-a)]q(x),$$

$$T(x)=[\theta(-x-a)+\theta(x-a)]\tau(x) \quad -\infty<x<\infty,$$

$q(x)$ — нормальные контактные напряжения, $|x|>a$,
$\tau(x)$ — тангенциальные контактные напряжения, $|x|>a$,

$$G_u(x)=[\theta(x+a)-\theta(x-a)]g_u(x),$$

$$G_v(x)=[\theta(x+a)-\theta(x-a)]g_v(x),$$

$$U^{(2)}(x)=[\theta(-x-a)+\theta(x-a)]u^{(2)}(x),$$

$$g_u(x)=\mu u^{(2)}(x),\ g_v(x)=\mu v^{(2)}(x) \text{ при } |x|<a,$$

$\theta(x)$ — функция Хевисайда,
$u^{(2)}(x)$ — горизонтальные перемещения граничных точек полосы,
$v^{(2)}(x)$ — вертикальные перемещения граничных точек полосы,
λ, μ — упругие постоянные Ламе материала полосы.

Применив интегральное преобразование Фурье к уравнениям (1.1), будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{1}{\mu}[\overline{K}_{11}(\sigma)\overline{Q}(\sigma)-\overline{K}_{12}(\sigma)\overline{T}(\sigma)]=\frac{1}{\mu}\overline{G}_v(\sigma),\\ \frac{1}{\mu}[\overline{K}_{21}(\sigma)\overline{Q}(\sigma)+\overline{K}_{22}(\sigma)\overline{T}(\sigma)]=\overline{U}^{(2)}(\sigma)+\frac{1}{\mu}\overline{G}_u(\sigma),\end{gathered} \tag{1.3}$$

где

$$\overline{Q}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}Q(x)e^{i\sigma x}dx, \quad \overline{T}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}T(x)e^{i\sigma x}dx,$$

$$\overline{G}_u(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}G_u(x)e^{i\sigma x}dx,\ \overline{G}_v(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}G_v(x)e^{i\sigma x}dx,\ \overline{U}^{(2)}(\sigma)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}U^{(2)}(x)e^{i\sigma x}dx.$$

С другой стороны, уравнение равновесия включения будет иметь вид [1, 4, 5]

$$\frac{dU^{(1)}}{dx}=\frac{2T(x)}{E_1h}-\frac{P}{E_1h}[\delta(x-a)+\delta(x+a)], \tag{1.4}$$

где

$$U^{(1)}(x)=[\theta(-x-a)+\theta(x-a)]\frac{du^{(1)}}{dx},$$

$u^{(1)}(x)$—горизонтальные перемещения точек включения,
$\delta(x)$—дельта-функция Дирака.

Применив к (1.4) обобщенное преобразование Фурье, получим

$$-i\sigma\overline{U}^{(1)}(\sigma)=\frac{2\overline{T}(\sigma)}{E_1h}-\frac{2P}{E_1h}\cos\sigma a. \tag{1.5}$$

Далее, имея в виду условия контакта

$$u^{(1)}(x)=u^{(2)}(x),\quad v^{(1)}(x)=v^{(2)}(x)=0,\quad |x|>a, \tag{1.6}$$

на основании (1.3), (1.5), (1.6) получим следующую систему уравнений:

$$\overline{K}_{11}(\sigma)\overline{Q}(\sigma)-\overline{K}_{12}(\sigma)\overline{T}(\sigma)=\overline{G}_v(\sigma), \tag{1.7}$$

$$\sigma^2\overline{K}_{21}(\sigma)\overline{Q}(\sigma)+[\lambda_1+\sigma^2\overline{K}_{22}(\sigma)]\overline{T}(\sigma)=P\lambda_1\cos\sigma a+\sigma^2\overline{G}_u(\sigma)$$

$$(\lambda_1=2\mu/E_1h).$$

Разрешив систему уравнений (1.7) относительно $\overline{T}(\sigma)$ и $\overline{Q}(\sigma)$, подставляя значения функций $\overline{K}_{sj}(\sigma)(s,\ j=1,\ 2)$ из (1.2), получим следующие представления:

$$\overline{T}(\sigma)=A\left[\frac{i\sigma}{\lambda^*+|\sigma|}+\bar{r}_{11}(\sigma)\right]\overline{G}_u^*(\sigma)-A_1\left[\frac{|\sigma|}{\lambda^*+|\sigma|}+\bar{r}_{12}(\sigma)\right]\overline{G}_v^*(\sigma)+$$
$$+P\lambda^*\frac{\cos\sigma a}{\lambda^*+|\sigma|},$$

$$\overline{Q}(\sigma)=A\left[\frac{i\sigma+(1-A_3^2)\lambda^*\cdot i\,\mathrm{sgn}\,\sigma}{\lambda^*+|\sigma|}+\bar{r}_{21}(\sigma)\right]\overline{G}_v^*(\sigma)+A_1\left[\frac{|\sigma|}{\lambda^*+|\sigma|}+\right.$$
$$\left.+\bar{r}_{12}(\sigma)\right]\overline{G}_u^*(\sigma)-\frac{PA_3\lambda^* i\,\mathrm{sgn}\,\sigma\cos\sigma a}{\lambda^*+|\sigma|}, \tag{1.8}$$

где

$$A=\frac{2\varkappa+1}{\varkappa+1},\quad A_1=\frac{1}{\varkappa+1},\quad A_3=\frac{1}{2\varkappa+1},\quad \lambda^*=A\lambda_1,$$

$$\overline{G}_u^*(\sigma)=-i\sigma\overline{G}_u(\sigma),\quad \overline{G}_v^*(\sigma)=-i\sigma\overline{G}_v(\sigma).$$

Тогда после применения обратного преобразования Фурье к (1.8) для $T(x)$ и $Q(x)$ получим следующие представления:

$$T(x)=A\int_{-\infty}^{\infty}\bar{k}_{11}(x-s)G_u^*(s)ds-A_1\int_{-\infty}^{\infty}\bar{k}_{12}(x-s)G_v^*(s)ds+P\lambda^*M(x),$$

$$Q(x)=A\int_{-\infty}^{\infty}\bar{k}_{21}(x-s)G_v^*(s)ds+A_1\int_{-\infty}^{\infty}\bar{k}_{12}(x-s)G_u^*(s)ds-P\lambda^*A_3N(x)$$

$$(-\infty<x<\infty),$$

где

$$\bar{k}_{11}(x-s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\sigma}{\lambda^*+|\sigma|}e^{-i\sigma(x-s)}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{r}_{11}(\sigma)e^{-i\sigma(x-s)}d\sigma,$$

$$\bar{k}_{12}(x-s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\sigma|}{\lambda^*+|\sigma|}e^{-i\sigma(x-s)}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{r}_{12}(\sigma)e^{-i\sigma(x-s)}d\sigma,$$

$$\bar{k}_{21}(x-s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(i\sigma+(1-A_3^2)\lambda^*\cdot i\,\mathrm{sgn}\,\sigma)}{\lambda^*+|\sigma|}e^{-i\sigma(x-s)}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{r}_{21}(\sigma)e^{-i\sigma(x-s)}d\sigma,$$

$$M(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\sigma a}{\lambda^*+|\sigma|}e^{-i\sigma x}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{m}_{11}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma,$$

$$N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\,\mathrm{sgn}\,\sigma\cos\sigma a}{\lambda^*+|\sigma|}e^{-i\sigma x}d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{n}_{11}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma.$$

Отметим, что $\bar{k}_{11}(x)$, $\bar{k}_{12}(x)$ и $\bar{k}_{21}(x)$ можно представить и таким образом:

$$\bar{k}_{11}(x)=\frac{1}{\pi x}-\frac{\lambda^*}{2}\mathrm{sgn}\,x+\lambda^*(R_{11}(x)+r_{11}(x)),$$

$$\bar{k}_{12}(x)=\delta(x)-\frac{\lambda^*}{\pi}\left(\ln\frac{1}{|x|}-C\right)+\lambda^*(R_{12}(x)+r_{12}(x)),$$

$$\bar{k}_{21}(x)=\frac{1}{\pi x}-\frac{A_3^2\lambda^*}{2}\mathrm{sgn}\,x+A_3^2\lambda^*(R_{11}(x)+r_{21}(x)),$$

где

$$R_{11}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(\lambda^*x)^{2n-1}}{\pi(2n-1)!}\left(\ln\frac{1}{|\lambda^*x|}+1+\ldots+\frac{1}{2n-1}-C\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda^*x)^{2n}\mathrm{sgn}\,x}{2(2n)!}\right],$$

$$R_{12}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(\lambda^*x)^{2n}}{\pi(2n)!}\left(\ln\frac{1}{|\lambda^*x|}+1+\ldots+\frac{1}{2n}-C\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{|\lambda^*x|^{2n-1}}{2(2n-1)!}\right],$$

$$r_{11}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{r}_{11}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma,\quad r_{sj}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{r}_{sj}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma\ (s,j=1,\ 2),\ s\neq j,$$

где C—постоянная Эйлера.

Здесь следует отметить, что функции $\bar{k}_{11}(x)$, $\bar{k}_{12}(x)$ и $\bar{k}_{21}(x)$ представлены в виде суммы их сингулярных и регулярных частей, где функции, характеризующие регулярные части имеют суммируемую квадратом производную на интервале $[-1,1]$.

Поскольку при $|x|<a$ $T(x)=0$, $Q(x)=0$, для определения $g_u^*(x)$ и $g_v^*(x)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{s-x}g_u^*(s)ds+A_3g_v^*(x)+\frac{\lambda^*}{2}\int_{-a}^{a}\mathrm{sgn}(x-s)g_u^*(s)ds-$$

$$-\frac{A_3\lambda^*}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}g_v^*(s)ds-\lambda^*\int_{-a}^{a}\bar{R}_{11}(x-s)g_u^*(s)ds+$$

$$+A_3\lambda^*\int_{-a}^{a}\bar{R}_{12}(x-s)g_v^*(s)ds=\frac{P\lambda_1}{\mu}M(x),\tag{1.9}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{s-x}g_v^*(s)ds-A_3g_u^*(x)+\frac{A_3^2\lambda^*}{2}\int_{-a}^{a}\mathrm{sgn}(x-s)g_v^*(s)ds+$$

$$+\frac{A_3\lambda^*}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}g_u^*(s)ds-A_3^2\lambda^*\int_{-a}^{a}\bar{R}_{21}(x-s)g_v^*(s)ds-$$

$$-A_3\lambda^*\int_{-a}^{a}\bar{R}_{12}(x-s)g_u^*(s)ds=-\frac{PA_3\lambda_1}{\mu}N(x),\quad |x|<a.$$

Здесь

$$g_u^*(x)=\frac{du^{(2)}}{dx},\quad g_v^*(x)=\frac{dv^{(2)}}{dx},\quad |x|<a,$$

$$\bar{R}_{11}(x)=R_{11}(x)+r_{11}(x),\quad \bar{R}_{12}(x)=R_{12}(x)+r_{12}(x),$$

$$\bar{R}_{21}(x)=R_{11}(x)+r_{21}(x).$$

Очевидно, что

$$\int_{-a}^{a} g_u^*(x)\,dx=0, \quad \int_{-a}^{a} g_v^*(x)dx=0. \tag{1.10}$$

После решения системы сингулярных интегральных уравнений (1.9) неизвестные контактные напряжения будут определяться по формулам

$$\tau(x)=-\frac{\mu A}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{s-x}g_u^*(s)\,ds+\frac{\mu A_1\lambda^*}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}g_v^*(s)ds+$$

$$+\mu A\lambda^*\int_{-a}^{a}\bar{R}_{11}(x-s)g_u^*(s)ds-\mu A_1\lambda^*\int_{-a}^{a}\bar{R}_{12}(x-s)g_v^*(s)ds+P\lambda^*M(x),$$

$$q(x)=-\frac{\mu A}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{s-x}g_v^*(s)ds-\frac{\mu A_1\lambda^*}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}g_u^*(s)ds+$$

$$+\mu A_1A_3\lambda^*\int_{-a}^{a}\bar{R}_{21}(x-s)g_v^*(s)ds+\mu A_1\lambda^*\int_{-a}^{a}\bar{R}_{12}(x-s)g_u^*(s)ds-A_3\lambda^*PN(x),$$

$$|x|>a.$$

Таким образом, решение задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.9).

2°. Приступим теперь к исследованию системы уравнений (1.9). Для этого придадим ей удобный вид. Умножим второе уравнение этой системы на мнимую единицу i и сложим с первым. Тогда после замены переменных x на ax, s на as получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds-iA_3\varphi(x)+\frac{\lambda_*(1+A_3^2)}{4}\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}(x-s)\varphi(s)ds+$$

$$+\frac{i\lambda_*A_3}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-s|}\varphi(s)ds-\frac{\lambda_*}{2}\int_{-1}^{1}R_{13}(x-s)\varphi(s)ds+ \tag{2.1}$$

$$+\frac{\lambda_*(1-A_3^2)}{4}\int_{-1}^{1}\operatorname{sgn}(x-s)\bar{\varphi}(s)\,ds+\frac{\lambda_*(1-A_3^2)}{2}\int_{-1}^{1}R_{14}(x-s)\bar{\varphi}(s)ds=\psi(x).$$

Здесь

$$\varphi(x)=g_u^*(ax)+ig_v^*(ax), \quad \bar{\varphi}(x)=g_u^*(ax)-ig_v^*(ax),$$

$$\psi(x)=\frac{P\lambda_1}{\mu}[M(ax)-iA_3N(ax)], \quad \lambda_*=a\lambda^*,$$

$$R_{13}(x)=(1+A_3^2)R_{11}^*(x)+2iA_3[R_{12}^*(x)+r_{12}^*(x)]+r_{11}^*(x)+A_3^2r_{21}^*(x),$$

$$R_{14}(x)=-R_{11}^*(x)+\frac{A_3^2}{(1-A_3^2)}\left[r_{21}^*(x)-\frac{1}{A_3^2}r_{11}^*(x)\right],$$

$$R_{11}^*(x)=R_{11}(ax),\quad R_{12}^*(x)=R_{12}(ax),\quad r_{11}^*(x)=r_{11}(ax),$$

$$r_{12}^*(x)=r_{12}(ax),\quad r_{21}^*(x)=r_{21}(ax).$$

Решение уравнения (2.1) ищем в виде

$$\varphi(x)=w(x)\sum_{n=1}^{\infty}X_nP_n^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{2.2}$$

где

$$\alpha=-\frac{1}{2}-i\gamma,\quad \beta=-\frac{1}{2}+i\gamma,\quad \gamma=\frac{1}{2\pi}\ln(3-4\nu),$$

$$w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

$\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$—полиномы Якоби. Здесь следует отметить, что в (2.2) имелось в виду условие (1.10).

Подставив $\varphi(x)$ из (2.2) в (2.1) и пользуясь соотношением [6, 7]

$$-i\,\mathrm{th}\,\pi\gamma\, w(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w(s)}{s-x}P_n^{(\alpha,\beta)}(s)ds=\frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\gamma}P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x),$$

известным способом относительно неизвестных коэффициентов $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\overline{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ получим следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$B_mX_m+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[S_{m,n}^{(1)}X_n+S_{m,n}^{(2)}\overline{X}_n\right]=\varphi_m,$$

$$B_m\overline{X}_m+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\overline{S}_{m,n}^{(1)}\overline{X}_n+\overline{S}_{m,n}^{(2)}X_n\right]=\overline{\varphi}_m\quad (m=1,2,\dots). \tag{2.3}$$

Здесь

$$B_m=\frac{\Gamma(m+1+\alpha)\Gamma(m+1+\beta)}{(m!)^2\,\mathrm{ch}\,\pi\gamma},\quad \varphi_m=\int_{-1}^{1}\psi(x)w^{-1}(x)P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x)dx,$$

$$S_{m,n}^{(1)}=-\frac{\lambda_*}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\overline{w}^{-1}(s)P_{n-1}^{(-\beta,-\alpha)}(s)\frac{\partial R_{13}(x,s)}{\partial s}ds\,w^{-1}(x)P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x)dx-$$

$$-\frac{\lambda_*(1+3A_3^2)}{4}\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_{n-1}^{(-\beta,-\alpha)}(x)P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x)dx-$$

$$-\frac{i\lambda_*A_3}{\mathrm{ch}\,\pi\gamma}\int_{-1}^{1}w^{-1}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x)dx,$$

$$S^{(2)}_{m,\,n}=\frac{\lambda_*(1-A_3^2)}{4}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}w^{-1}(s)P_{n-1}^{(-\alpha,\,-\beta)}(s)\frac{\partial R_{14}(x,\,s)}{\partial s}ds\,w^{-1}(x)P_{m-1}^{(-\alpha,\,-\beta)}(x)dx-$$

$$-\frac{\lambda_*(1-A_3^2)}{4}\int\limits_{-1}^{1}[w(x)]^{-2}P_{n-1}^{(-\alpha,\,-\beta)}P_{m-1}^{(-\alpha,\,-\beta)}(x)dx,$$

$\Gamma(z)$—известная гамма-функция.
Далее, в (2.3) положив

$$X_m=m^{1-\varepsilon}U_m\quad\left(0<\varepsilon<\frac{1}{2};\ m=1,\,2,\,\ldots\right),$$

после некоторых простых выкладок получим

$$U_m+B_m^*m^\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\varepsilon}\left[S^{(1)}_{m,\,n}U_n+S^{(2)}_{m,\,n}\bar U_n\right]=B_m^*m^\varepsilon\varphi_m,$$

$$\bar U_m+B_m^*m^\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\varepsilon}\left[\bar S^{(1)}_{m,\,n}\bar U_n+\bar S^{(2)}_{m,\,n}U_n\right]=B_m^*m^\varepsilon\bar\varphi_m. \tag{2.4}$$

Очевидно, что $B_m^*=(B_mm)^{-1}=0(1)$ при $m\to\infty$.

Полученная бесконечная система линейных уравнений (2.4) квазивполне регулярна. Действительно, имея в виду асимптотическую формулу Дарбу для многочленов Якоби [8]

$$P_n^{(\alpha,\,\beta)}(\cos\theta)=\frac{1}{\sqrt{n}}K(\theta)\cos(N\theta+\delta)+0(n^{-\frac{3}{2}}),\quad n\to\infty,$$

$$K(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}},$$

$$N=n+\frac{\alpha+\beta+1}{2},\ \delta=-\frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right),\quad 0<\theta<\pi,$$

которая имеет место также при $\mathrm{Re}(\alpha,\,\beta)>-1$, известным способом [9, 10] можем показать, что суммы

$$S_m=|B_m^*|m^\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\varepsilon}\left[|S^{(1)}_{m,\,n}|+|S^{(2)}_{m,\,n}|\right],$$

$$\bar S_m=|B_m^*|m^\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\varepsilon}\left[|\bar S^{(1)}_{m,\,n}|+|\bar S^{(2)}_{m,\,n}|\right]$$

при $m\to\infty$ стремятся к нулю. Отсюда вытекает, что бесконечная система (2.4) квазивполне регулярна.

После определения X_m и в силу того, что [11]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{w(s)}{s-x}P_n^{(\alpha,\,\beta)}(s)ds=-\frac{\mathrm{sgn}\,x}{\mathrm{ch}\,\pi\gamma}(x-1)^\alpha(x+1)^\beta P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)+\frac{1}{2\mathrm{ch}\,\pi\gamma}P_{n-1}^{(-\alpha,\,-\beta)}(x),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-s|}w(s)P_n^{(\alpha,\beta)}(s)ds=\frac{\mathrm{sgn}x}{2n\,\mathrm{ch}\pi\gamma}(x-1)^{-\beta}(x+1)^{-\alpha}P_{n-1}^{(-\beta,-\alpha)}(x)-$$

$$-\frac{1}{n\,\mathrm{ch}\pi\gamma}P_n^{(\beta,\alpha)}(x) \quad \text{при } |x|>1 (n=1, 2 \ldots),$$

контактные напряжения будут определяться по формуле

$$\tau(ax)+iq(ax)=\frac{\mu A\,\mathrm{sgn}x}{\mathrm{ch}\pi\gamma}(x-1)^{\alpha}(x+1)^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\Big\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)-$$

$$-\frac{\mathrm{sgn}x}{2}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\left[P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x)-\frac{2iA_3\lambda_*}{n}P_n^{(\beta,\alpha)}(x)\right]-$$

$$-\frac{iA_3\lambda_*}{2n}(x^2-1)P_{n-1}^{(-\beta,-\alpha)}(x)\Big\}+\frac{\mu A\lambda_*}{2}\int_{-1}^{1}R_{13}(x-s)\varphi(s)ds-$$

$$-\frac{\lambda_*(1-A_3^2)}{2}\int_{-1}^{1}R_{14}(x-s)\bar{\varphi}(s)ds+\mu A\psi(x), \quad |x|>1.$$

Кафедра механики сплошной среды
Поступила 4.05.1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э. Х., Уч. записки ЕГУ, № 2, 1979.
2. Melan E., Ingr—Arch., Bd. 3, Nr. 2, S. 123—129, 1932.
3. Bufler H., VDI—Forschungsheft, vol. 485, S. B., № 27, 1961.
4. Керопян А. В., Уч. записки ЕГУ, № 2, 1980.
5. Керопян А. В., Саркисян В. С., Уч. записки ЕГУ, № 3, 1980.
6. Попов Г. Я., ПММ, 30, вып. 3, 1966.
7. Карпенко Л. Н., ПММ, 30, вып. 3, 1966.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1971.
9. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М., ПММ, 36, вып. 5, 1972.
10. Григорян Э. Х., ПММ, 38, вып. 2, 1974.
11. Григорян Э. Х., Манукян Э. А., Уч. записки ЕГУ, № 1, 1981.

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Ա. Վ. ՔԵՐՈՊՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԿԻՍԱՆՎԵՐՋ ՆԵՐԴԻՐՆԵՐՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ՄԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է փոքր հաստությամբ երկու միատեսակ կիսանվերջ ներդիրներով առաձգական անվերջ շերտի հարթ կոնտակտային

խնդիրը, երբ ներդիրների ծայրերում կիրառված են կենտրոնացված ուժեր։

Կիսանվերջ սիմետրիկ ինտերվալներում անհայտ կոնտակտային լարումները որոշելու համար խնդրի լուծումը Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների օգնությամբ բերվում է ներդիրների միջև ընկած միջանկյալ վերջավոր ինտերվալում դեֆորմացիաների նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծման։ Դեֆորմացիաների նկատմամբ ստացված այդ հավասարումների համակարգի լուծումը կառուցված է Յակոբիի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի օգնությամբ։ Դեֆորմացիաները որոշելուց հետո անհայտ կոնտակտային լարումները նրանց միջոցով որոշվում են փակ տեսքով։