ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,1998 Естественные науки

Физика

УДК 539.3:537.312.62

К.В.ПАПОЯН, А.А.ГЕВОРГЯН, З.В.ТОРОСЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ЦИЛИНДРА С ВНЕШНИМ ТОКОМ

Рассматривается задача о распространении гармонических упругих радиальных колебаний в длинной сверхпроводящей проволоке круглого сечения, по которой течет транспортный ток. Получено дисперсионное уравнение. Из условия устойчивости найдены пороговые значения магнитного поля как в случае толстой, так и тонкой проволок. Обсужден вопрос неустойчивости.

Введение. Вопрос устойчивости токопроводящих цилиндрических стержней в несверхпроводящем состоянии рассматривался давно (см., напр., [1-4]). Интерес к изучению явления неустойчивости вызван практикой. В частности, в указанных работах рассматривалась задача устойчивости радиальных колебаний [1,2] и изгибных волн [3-6] вдоль проводника круглого сечения в условиях сильного скин-эффекта, когда ток является практически поверхностным. Устойчивость колебаний и волн в проводящих газообразных средах рассматривалась в случаях как поверхностного, так и объемного токов [8].

В последние годы повысился интерес к изучению упругих свойств ВТСП [9-11] в связи с их широким применением.

В сверхпроводниках из-за эффекта Мейсснера аналогичная картина поверхностного распределения тока реализуется при постоянном внешнем токе (или внешнем поле). Поэтому представляет интерес изучение вопроса устойчивости упругих колебаний и волн в сверхпроводящих структурах.

В настоящей работе рассмотрена задача устойчивости радиальных колебаний для сверхпроводящей проволоки, по которой течет транспортный ток. Будем рассматривать низкочастотные упругие колебания, частота ω которых много меньше обратной величины времени релаксации заряда (тока) τ, т.е.

$$R\omega / c << 1, \omega\tau << 1, \tag{1}$$

где c - скорость света в среде, R - радиус проволоки. Данная задача относится к сверхпроводникам первого рода, и поэтому не будем учитывать явления, связанные с координатной зависимостью параметра порядка. При выполнении неравенств (1) зависимость возмущенного тока от времени такая же, как и у вектора упругого смещения. Поэтому возмущения тока и поля описываются статическими уравнениями.

Постановка задачи. Рассмотрим длинную сверхпроводящую проволоку круглого сечения с радиусом R из сверхпроводника первого рода, по которому течет транспортный ток силы i. Направим ось Z по оси проводника. Отличными от нуля будут только компоненты A_z вектора-потенциала и H_φ магнитного поля, причем A_z определяется из решения уравнения Лондонов [6]:

$$A_z(\xi) = -\delta_0 / \psi H_0 I_0(\xi) / I_1(\xi_1), \tag{2}$$

а H_φ согласно (2) будет иметь вид

$$H_\varphi \equiv H(\xi) = -\partial A_z / \partial Z = H_0 I_1(\xi) / I_1(\xi_1), \tag{3}$$

где $\xi = \psi / \delta_0 r$, $\xi_1 = \psi / \delta_0 R$, H_0 - значение поля на поверхности $H_0 = 2i / cR$, δ_0 - глубина проникновения магнитного поля в массивный сверхпроводник, ψ - параметр порядка, считающийся постоянным. I_n - функции Бесселя второго рода от мнимого аргумента.

Предположим, что в проводнике происходят упругие радиальные колебания $\vec{u} = \vec{u}(u_r, 0, 0)$ (плоская деформация), причем u_r имеет гармоническую временную зависимость

$$u_r = u_r(r) \exp(-i\omega t). \tag{4}$$

Тензор натяжений имеет два отличных от нуля компонента σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$, которые связаны с величиной u_r следующими соотношениями [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \partial u_r / \partial r + u_r \lambda / r, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu) u_r / r + \lambda \partial u_r / \partial r, \end{aligned} \tag{5}$$

где λ, μ - коэффициенты Ляме.

Уравнение движения для упругой среды будет

$$\rho \partial^2 u_r / \partial t^2 = \partial \sigma_{rr} / \partial r + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) / r. \tag{6}$$

Конечное решение этого уравнения на оси $r = 0$ имеет вид

$$u_r(r) = C_1 J_1(r\omega / c_1), \tag{7}$$

где c_1 – скорость продольного звука, $J_1(x)$ - функция Бесселя первого рода.

На граничной поверхности проводника $(r = R)$ должно иметь место равенство давлений, т.е.

$$\sigma_{rr} + H_0^2 / 8\pi = 1 / 8\pi (H_0 + h)^2, \tag{8}$$

где h - возмущение магнитного поля, обусловленное деформацией проводника. Для его определения рассмотрим полный ток в сверхпроводнике, плотность которого зададим в виде

$$j(r) = j_0(r) + j'(r), \tag{9}$$

где $j_0(r)$ - ток, определяемый вектор-потенциалом (2) и представляющий мейсснеровский ток в отсутствие деформации, а $j'(r)$ – возмущение плотности тока, вызванное деформацией. В общем случае $j(r)$ определяется уравнением

$$j(r) = -c\psi^2 / (4\pi\delta^2) A_z(r) = C_0 I_0[\psi(r + u_r) / \delta], \tag{10}$$

где C_0 – произвольная постоянная. В линейном приближении из граничных условий для возмущения плотности тока $j'(r)$ получаем

$$j'(r) = C_1 c H_0 / (4\pi\delta^2) I_1(\xi) / I_1(\xi_1) J_1(\omega r / c_1). \tag{11}$$

Этот ток согласно уравнению Максвелла возбуждает дополнительное магнитное поле

$$h = C_1 H_0 / [r\delta^2 I_1(\xi_1)] \frac{1}{r} \int_0^r I_1(r\psi / \delta) J_1(r\omega / c_1) r dr, \tag{12}$$

которое после вычисления интеграла принимает вид

$$h(r)=C_1 r H_0\{\xi I_2(\xi)J_1(x)+xI_1(\xi)J_2(x)\}/\left[\left(x^2+\xi^2\right)\delta^2 I_1(\xi_1)\right], \qquad (13)$$

где $x=r\omega/c_1$.

Дисперсионное уравнение. Выводы. Для вывода дисперсионного уравнения упругих колебаний необходимо подставить найденные выражения полей (3) и (13) в граничное условие (8). Для этого сначала в тензоре натяжений σ_{rr} нужно выделить его значение в отсутствие возмущения u_r. Записывая σ_{rr} в виде $\sigma_{rr}=\sigma_{rr}^0+\sigma_{rr}$ и требуя, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_{rr}^0-H^2/8\pi+H_0^2/8\pi\,|_{r=R}=0,$$

являющееся условием статического равновесия, после несложных преобразований приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$x_1 J_0(x_1)/J_1(x)\left\{1+2(1+\sigma)h_1^2\xi_1^2/\left[\left(\xi_1^2+x_1^2\right)\sigma_0\right]\right\}=$$
$$=\left\{1+2(1+\sigma)h_1^2\left(2\xi_1^2+x_1^2\right)\xi_1 I_0(\xi_1)/\left[\left(\xi_1^2+x_1^2\right)I_1(\xi_1)\right]\right\}/\sigma_0, \qquad (14)$$

где $x_1=R\omega/c_1, \sigma_0=(1-\sigma)/(1-2\sigma), h_1^2=H^2/4\pi\rho c_1^2, \sigma$ - коэффициент Пуассона, ρ – плотность среды, c_1 – скорость продольного звука. Это уравнение – четное по отношению к переменным x_1 и ξ_1. Интересующие нас корни по отношению к переменной ω (или x_1) расположены симметрично относительно $\omega=0$. В сверхпроводниках первого рода величина ξ_1 в силу малости δ_0 будет намного больше величины x_1 при частотах, для которых принятое нами приближение справедливо. Поэтому пренебрежение зависимостью от x_1 величин, стоящих в фигурных скобках, мало влияет на характер спектра колебаний. Можно доказать, что в этом случае все корни уравнения (14) являются простыми.

Из дисперсионного уравнения можно определить условие устойчивости упругих колебаний. Порогу устойчивости соответствует $\omega^2=0$ (или $x_1=0$).

Полагая в (14) $\omega^2=0$, получаем условие, определяющее пороговое значение магнитного поля

$$h^2=(2\sigma_0-1)/[4(1+\sigma)]f(\xi_1), \qquad (15)$$

где

$$f(\xi_1)=I_1(\xi_1)/[\xi_1 I_0(\xi_1)-I_1(\xi_1)]. \qquad (16)$$

При $\xi_1=0$ $(\psi=0)$ равенство (15) совпадает с условием, которое определяет порог устойчивости в случае нормального металла [3, 4]. Функция $f(\xi_1)$ является монотонно убывающей функцией: $f(0)=1$ и $f(\infty)=0$, причем при $\xi_1<<1$ $f(\xi_1)\approx 1-\xi_1^2/8$ и при $\xi_1>>1$ $f(\xi_1)\sim 1/\xi_1$. Следовательно, для пороговых значений магнитного поля в случае толстой и тонкой проволок получаем

$$H_m\approx[\pi(1-\sigma)]^{1/2}\sqrt{E/\xi_1}/[(1+\sigma)(1-2\sigma)] \qquad (17)$$

при $\xi_1>>1$ и

$$H_m\approx[\pi E(1-\sigma)]^{1/2}\left(1-\xi_1^2/8\right)/[(1+\sigma)(1-2\sigma)] \qquad (18)$$

при $\xi_1<<1$, где E - модуль Юнга.

Для большинства сверхпроводников первого рода значение магнитного поля при $\xi_1<<1$ выше критического значения поля сверхпроводящего перехода. Однако значение поля на поверхности образца, даваемое формулой (17) при достаточно больших значениях ξ_1, становится меньше соответствующего значения критического поля, поэтому неустойчивость упругих колебаний будет наблюдаться и в сверхпроводящем состоянии. Пользуясь значением критического поля [7] и сравнивая его с (17), получаем следующее условие появления неустойчивости упругих колебаний сверхпроводящей проволоки:

$$(1+\sigma)(1-2\sigma)(R/\delta_0)H_c\psi^{1/2}/[\pi E(1-\sigma)]^{1/2} > 1, \qquad (19)$$

где H_c - критическое поле массивного сверхпроводника.

Физическое появление неустойчивости заключается в следующем. Вследствие эффекта Мейснера плотность энергии магнитного поля в слое размера δ_0 превысит плотность упругой энергии, поэтому (в силу отрицательного давления поля) колебания теряют устойчивость, и в области потери устойчивости вещество может постепенно разрушаться. Зависимость от радиуса R (от размеров) будет способствовать появлению неустойчивости. Действительно, возьмем отрезок проволоки единичной длины, тогда энергия в этом объеме будет

$$W \sim \int H^2 dV \sim R\delta[1-\exp(-2R/\delta)].$$

Отсюда видно, что чем больше R, тем легче будет выполняться условие (19). Другой вопрос заключается в возникновении промежуточного состояния при больших радиусах [7]. Однако промежуточное состояние возникает при таких значениях токов (полей), когда значение поля при $r = R$ порядка H_m. Но если условие (19) выполняется с запасом, то промежуточное состояние не возникает.

Авторы выражают благодарность О.С. Ерицяну за ценные замечания.

Кафедра общей физики *Поступила 16.04.1998*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильюшин А.А., Огиболов П.М.** Упруго-пластические деформации полых цилиндров, М.: Изд-во МГУ, 1960, 227с.
2. **Жвания Н.А** - Прикладная механика, 1977, т.13, в. 3, с.119-122.
3. **Долбин П. И** - ПМТФ, 1962, в.2, с. 104-109.
4. **Долбин П.И** - ПМТФ, 1966, в.3, с. 97-101.
5. **Снеддон И.И., Берри Д.С.** Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961, 219с.
6. **Bancroft D**. – Phys. Rev., 1941, v. 59, p. 588.
7. **Абрикосов А.А**. Основы теории металлов, М.: Наука, 1987, 520 с.
8. **Кадомцев Б.Б**. Гидромагнитная устойчивость плазмы. – В кн: Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1963, т.2, с. 132-176.
9. **Holtmeier S., Hinkel C**. et al. – Physica, B., 1997, v. 230-232, p. 658-660.
10. **Паль-Валь П. П., Паль-Валь Л. Н.** и др. – ФНТ, 1996, т. 22, N 12, с. 1452-1458.
11. **Dominiguez D. Bulaevskii L**. et al. – Phys. Rev., B, 1996, v. 53, N 10, p. 6682-6692.

Կ.Վ. ՊԱՊՈՅԱՆ, Ա.Հ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ. Զ.Վ. ԹՈՐՈՍՅԱՆ

ԱՐՏԱՔԻՆ ՀՈՍԱՆՔՈՎ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԻՉ ԳԼԱՆՈՒՄ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է արտաքին հոսանքով երկար գլանաձև գերհաղորդիչ լարում ներդաշնակ առաձգական տատանումների տարածման խնդիրը: Ստացված է դիսպերսիոն հավասարումը: Կայունության պայմանից ստացվել են մագնիսական դաշտի շեմային արժեքները ինչպես հաստ, այնպես էլ բարակ հաղորդալարերի դեպքում: Քննարկված է անկայունության հարցը: