

УДК 534.36

А.А. АСАТРЯН, Г.Х. ГРИГОРЯН-ХАКЦЯН

МАСЛОВСКАЯ АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ВОЛНЫ ОТ ПОВЕРХНОСТИ (ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

Найдена масловская асимптотика волнового поля, а также вид фокальной кривой при отражении волны от поверхности. На двух примерах проиллюстрированы полученные результаты.

В антенной технике, в СВЧ устройствах и трактах в качестве отражателей все шире используются зеркала различных профилей. К тому же падающие волны зачастую отличаются от плоских. Между тем до последнего времени вне поля зрения исследователей оставались вопросы определения как фокальной кривой, так и локальной асимптотики волнового поля.

Цель данной работы найти локальную асимптотику волнового поля отражения волны от произвольной поверхности, а также тип каустической кривой.

Пусть на поверхность, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$\begin{cases} x = \xi, \\ z = f(\xi), \end{cases} \quad (1)$$

падает монохроматическая волна вида

$$U = A(x, z) \exp(ik\psi(x, z)), \quad (2)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число. Зависимость от времени берется в виде $\exp(-i\omega t)$. Будем считать, что поверхность зеркала (1) не затеняет падающую волну (2) (рис. 1). Для определения уравнения каустической кривой найдем семейство отраженных лучей. Через \vec{p} обозначим единичный вектор вдоль отраженных лучей (рис. 1). Компоненты вектора \vec{p} согласно работе [1] определим из системы

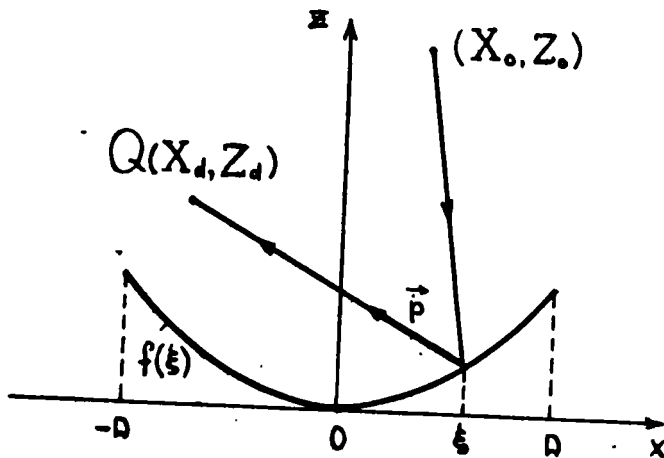


Рис.1. Отражение волны от поверхности.

$$\begin{cases} p_x + p_x \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi_0(\xi)}{\partial \xi}, \\ p_x^2 + p_z^2 = 1, \end{cases} \quad (3)$$

где через ψ_0 обозначена величина фазы падающего поля на поверхности зеркала (1)

$$\psi_0 = \psi(\xi, f(\xi)). \quad (4)$$

Решая систему (3), получим

$$\begin{cases} p_x = \frac{\psi'_0 - f' \sqrt{1 + (f')^2 - (\psi'_0)^2}}{1 + (f')^2}, \\ p_z = \frac{\psi'_0 \cdot f' + \sqrt{1 + (f')^2 - (\psi'_0)^2}}{1 + (f')^2}, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$f'(\xi) = \frac{df(\xi)}{d\xi}, \quad \psi' = \frac{d\psi_0(\xi)}{d\xi}.$$

Семейство отраженных лучей имеет вид

$$\begin{cases} X = \xi + p_x \tau, \\ Z = f(\xi) + p_z \tau. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь τ - расстояние вдоль отраженных лучей от точки отражения до точки наблюдения Q (рис.1). Каустику (фокальную кривую) семейства отраженных лучей (6) определим из условия обращения в нуль якобиана перехода от декартовых координат X, Z к лучевым — ξ, τ :

$$\frac{D(X,Z)}{D(\xi,\tau)} = 0. \quad (7)$$

Введем в выражение (7) τ как функцию от ξ : $\tau_0 = \tau_0(\xi)$ и подставив его в (6), найдем фокальную кривую отраженных лучей в параметрической форме

$$\begin{aligned} X_0 &= \xi + \frac{p_x [1 + (f')^2 - (\psi')^2]}{f'' - \psi_0''}, \\ Z_0 &= f(\xi) + \frac{p_z [1 + (f')^2 - (\psi')^2]}{f'' - \psi_0''}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\psi_0'' = \frac{d^2 \psi_0(\xi)}{d\xi^2}, \quad \frac{d^2 \psi_0(\xi)}{d\xi^2}$$

Локальную асимптотику поля в окрестности фокальной кривой определим методом Маслова [1-2]. Согласно работам [1-2] величину волнового поля в окрестности каустической кривой (8) можно представить в виде

$$U(X,Z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} \int_{-D}^D A(\xi) [f''(\xi) - \psi_0''(\xi)] \exp(ik\Psi) d\xi, \quad (9)$$

где

$$\Psi = \psi_0 + p_x(\xi)(Z - f(\xi)) + p_z(X - \xi).$$

A — амплитуда поля на поверхности зеркала,

D — полураскрыв зеркала, а p_x и p_z определяются из выражений (5).

В частном случае при падении на зеркало (1) цилиндрической волны вида

$$u_0 = \exp(ikr) / \sqrt{r}, \quad (10)$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$, а x_0, z_0 — координаты точечного источника для фокальной кривой (8) и локальной асимптотики поля (9) согласно формулам (8-9) можно соответственно получить

$$\begin{cases} X_0 = \xi + \frac{[(\xi - x_0)(1 - f'^2) - 2f'(z_0 - f)] \cdot q}{2f''(\xi)[(z_0 - f(\xi))^2 + (\xi - x_0)^2] - q(1 + (f')^2)}, \\ Z_0 = f(\xi) + \frac{[(z_0 - f)(1 - f'^2) + 2f'(\xi - x_0)] \cdot q}{2f''(\xi)[(z_0 - f(\xi))^2 + (\xi - x_0)^2] - q(1 + (f')^2)}. \end{cases} \quad (11)$$

$$U(x,z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} \int_{-D}^D \left[\frac{p \cdot q}{1-f'^2} \right]^{1/2} \frac{\exp(ik\psi) d\xi}{(\xi-x_0)^2 + (f-z_0)^2}, \quad (12)$$

где

$$q = z_0 - f + f'(\xi - x_0),$$

$$p = 2f'(\xi)[(z_0 - f(\xi))^2 + (\xi - x_0)^2] - q(1 + (f')^2).$$

$$p_x = \frac{(z_0 - f)(1 - f'^2) + 2f'(\xi - x_0)}{(1 + f'^2) \sqrt{(\xi - x_0)^2 + (f - z_0)^2}},$$

$$p_z = \frac{(\xi - x_0)(1 - f'^2) - 2f'(z_0 - f)}{(1 + f'^2) \sqrt{(\xi - x_0)^2 + (f - z_0)^2}}.$$

Ниже на двух примерах проиллюстрируем полученные результаты.

Пример 1. Отражение цилиндрической волны от параболического зеркала. Уравнение зеркала имеет вид

$$\begin{cases} x = \xi, \\ z = \frac{\xi^2}{2R}, \end{cases} \quad (13)$$

где через R обозначен радиус кривизны зеркала. Следуя формуле (II), для фокальной кривой получим

$$\begin{aligned} x_0 &= \xi + \frac{[\xi(1 - 2z_0) - x_0(1 - \xi^2)][z_0 + \xi^2/2 - \xi \cdot x_0]}{2c - (1 + \xi^2)(z_0 + \xi^2/2 - \xi x_0)}, \\ z_0 &= \frac{\xi^2}{2} + \frac{[(z_0 - \xi^2/2)(1 - \xi^2) + 2\xi(\xi - x_0)][z_0 + \xi^2/2 - \xi \cdot x_0]}{2c - (1 + \xi^2)(z_0 + \xi^2/2 - \xi x_0)} \quad (14) \\ c &= (\xi - x_0)^2 + (\xi^2/2 - z_0)^2, \end{aligned}$$

где (x_0, z_0) — координаты точечного источника. Здесь все величины безразмерны: $\xi/R \rightarrow \xi$, $z_0/R \rightarrow z_0$, $x_0/R \rightarrow x_0$ и т.д. На рис. 2а, 3а, 4а представлены каустики отраженных лучей для различных положений цилиндрической волны Q . Рис. 2а соответствует случаю, при котором источник волны находится на оси зеркала и на удалении равном $z_0 = 500R$.

Как видно из рис. 2а, каустика при этом практически вырождается в фокальную точку (что естественно, т.к. падающую волну при этом можно считать практически плоской). Рис. 3а соответствует случаю, при котором источник слегка смещен с оси зеркала, координаты которого принимают значения $x_0 = 2R$, $z_0 = 100R$. В данном случае каустика имеет точку возврата («клюв» $A_2[3]$). При сильном смещении от оси зеркала фокальная кривая трансформируется в каустическую петлю [4]

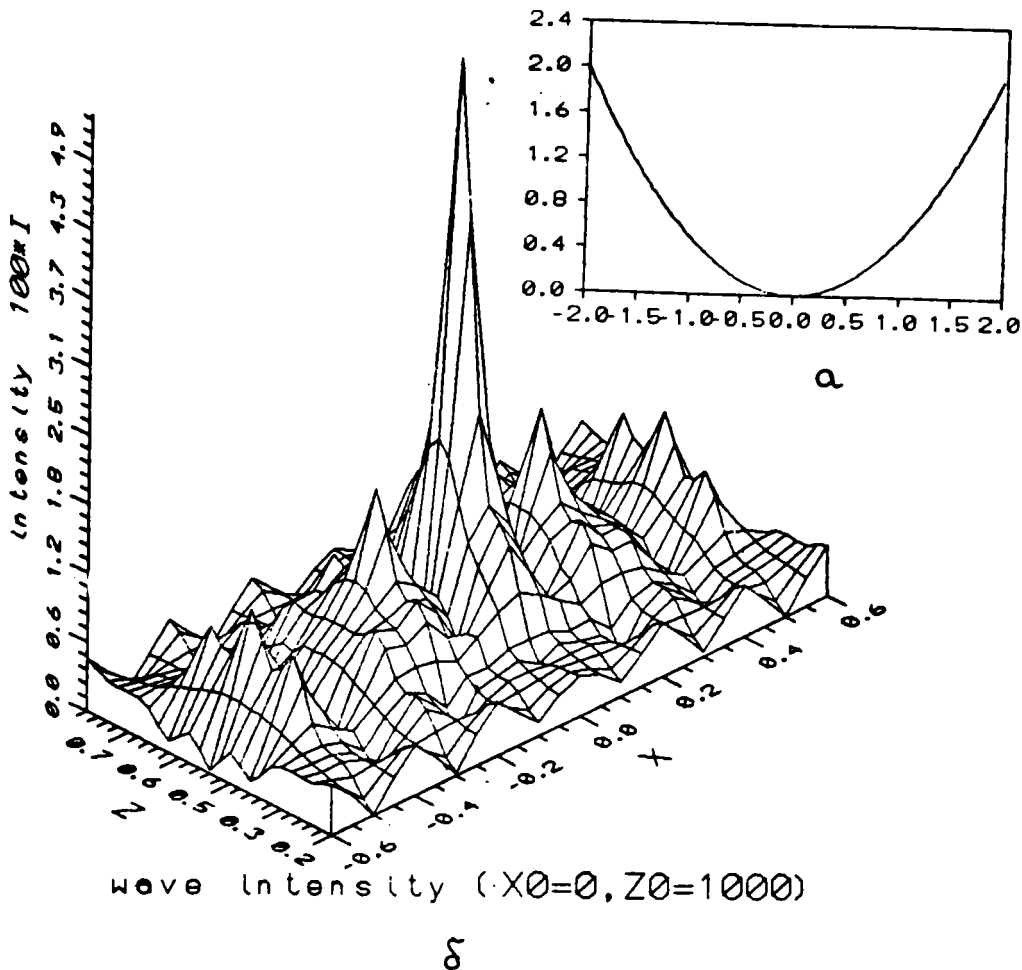


Рис.2. Фокальная кривая (а) и распределение интенсивности при отражении цилиндрической волны от параболического зеркала (б) (координаты источника $x_0 = 0$, $z_0 = 500R$).

(рис.4а). В этом случае координаты источника принимают соответственно значения $x_0 = 20R$, $z_0 = 200R$.

Воспользовавшись соотношением (12), получим локальную асимптотику поля в окрестности каустики (14). После соответствующих преобразований имеем

$$v(X,Z) = \sqrt{\frac{kR}{2\Pi i}} \int_{-D/2}^{D/2} \frac{\sqrt{[2c - (1 + \xi^2)t] \exp(ikR\psi) d\xi}{\sqrt{1 + \xi^2} [(z_0 - \xi^2/2)^2 + (\xi - x_0)^2]}, \quad (15)$$

где

$$t = z_0 + \xi^2/2 - \xi x_0, \quad c = (z_0 - \xi^2/2)^2 + (\xi - x_0)^2,$$

$$\psi = \sqrt{c} + p_x^0(Z - \xi^2/2) + p_x^0(X - \xi),$$

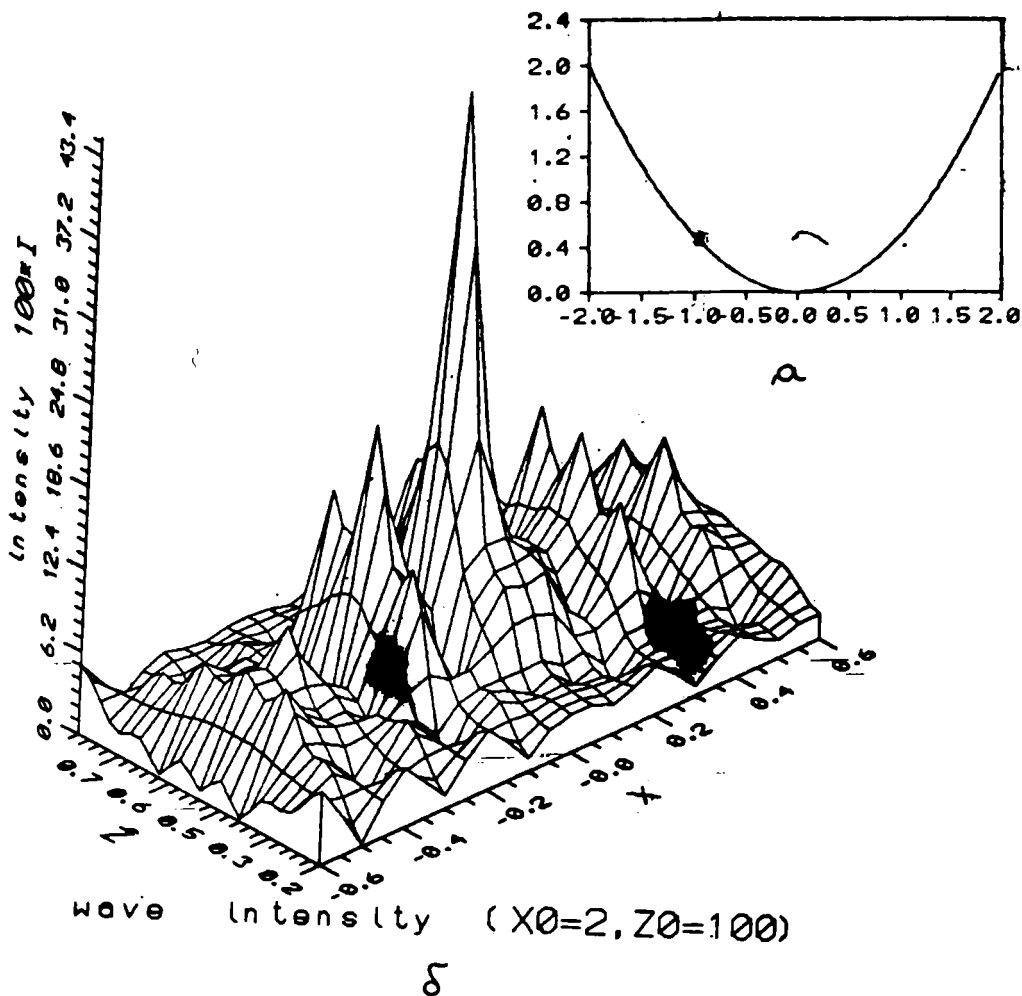


Рис.3. Фокальная кривая (а) и распределение интенсивности при отражении цилиндрической волны от параболического зеркала (б) (координаты источника $x_0 = 2R$, $z_0 = 500R$).

$$\rho_x = \frac{(1 - \xi^2)(\xi - x_0) - 2\xi(z_0 - \xi^2/2)}{(1 + \xi^2)\sqrt{c}}$$

$$\rho_z = \frac{(z_0 - \xi^2/2)(1 - \xi^2) + 2\xi(\xi - x_0)}{(1 + \xi^2)\sqrt{c}}$$

На рис. 2б, 3б, 4б приведены распределения интенсивности поля $I = |U|^2$ соответственно для каустик, изображенных на рис. 2а, 3а, 4а. Расчеты проводились для следующих значений параметров зеркала и волны $D/R = 2$, $kR = 100$. Здесь D — полураскрыв зеркала, а $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Как показывают расчеты, фокальному пятну соответствует максимум интенсивности, в то время как при случае каустического клюва и каустической петли возникают множество побочных максимумов.

Пример 2. Отражение цилиндрической волны от эллиптического зеркала. В этом случае уравнение зеркала можно представить в виде

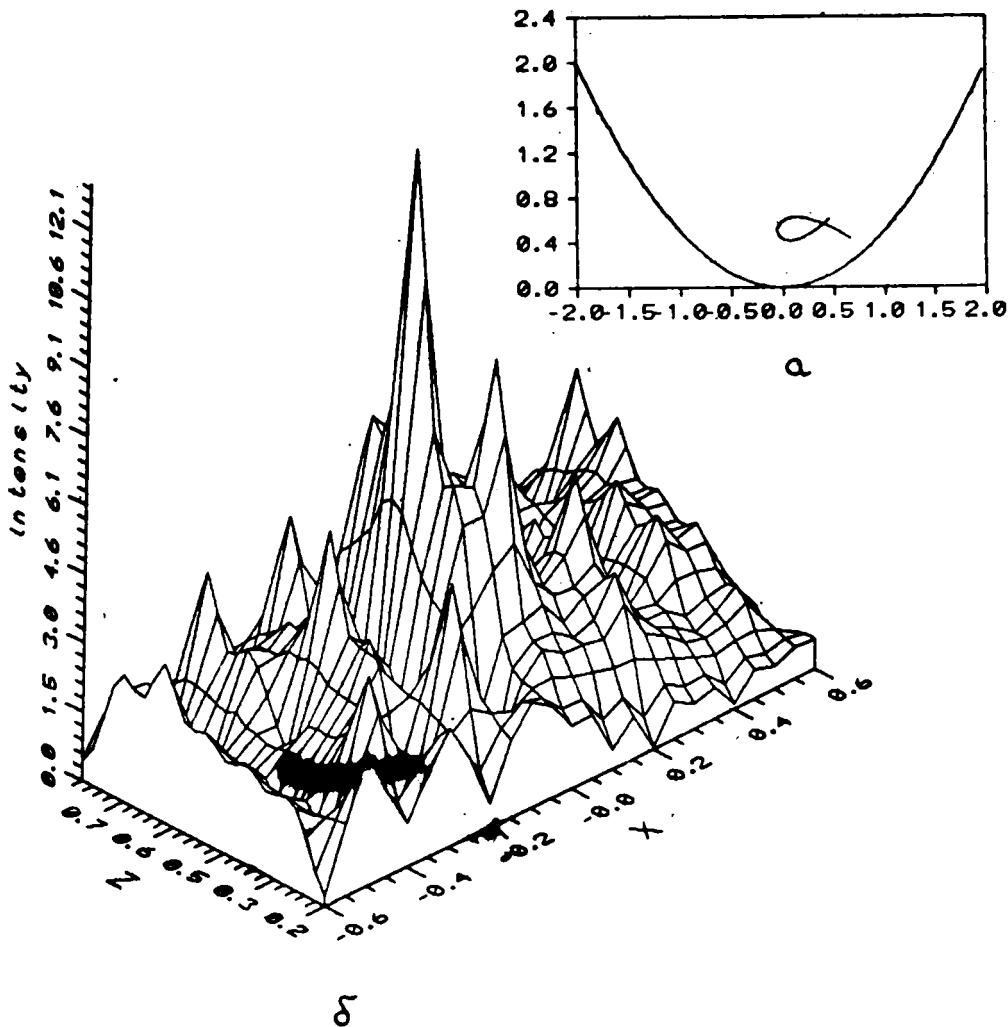


Рис.4. Фокальная кривая (а) и распределение интенсивности при отражении цилиндрической волны от параболического зеркала (б) (координаты источника $x_0 = 20R$, $z_0 = 200R$).

$$\begin{cases} z = b - b \sqrt{1 - \xi^2/a^2}, \\ x = \xi, \end{cases} \quad (16)$$

где a и b — соответственно малая и большая полуоси эллипса. После соответствующих преобразований для уравнения каустики можно получить

$$\begin{aligned} x_0 = \xi + \frac{\{(\xi - x_0)(1 - \xi^2 - e^2 \xi^2) - 2e\xi[(z_0 - e)\sqrt{1 - \xi^2} + e(1 - \xi^2)]\}}{2e[(z_0 - e + e\sqrt{1 + \xi^2} + (\xi - x_0)^2) - (1 - \xi^2 + e^2 \xi^2)]} \cdot \Phi, \\ z_0 = e - e\sqrt{1 - \xi^2} + \\ + \frac{\{(z_0 - e + e\sqrt{1 - \xi^2})(1 - \xi^2 - e^2 \xi^2) + 2e\xi[(z_0 - e)\sqrt{1 - \xi^2} + e(1 - \xi^2)]\}}{2e[(z_0 - e + e\sqrt{1 + \xi^2} + (\xi - x_0)^2) - (1 - \xi^2 + e^2 \xi^2)]} \cdot \Phi, \end{aligned} \quad (17)$$

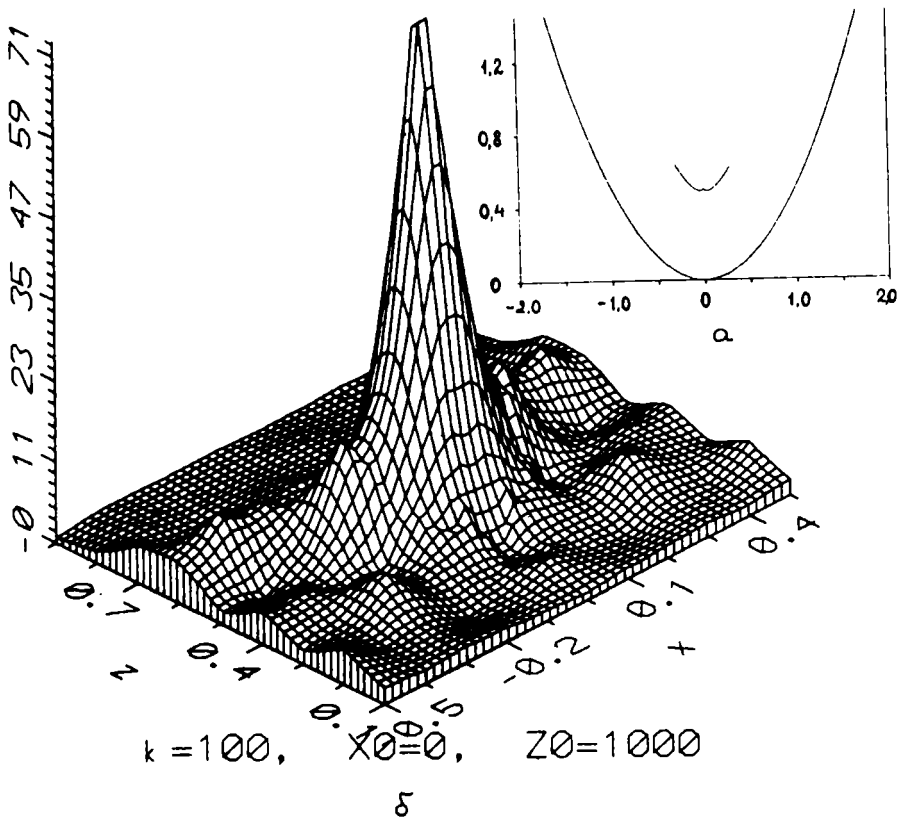


Рис.5. Фокальная кривая (а) и распределение интенсивности при отражении цилиндрической волны от эллиптического зеркала (б) (координаты источника $x_0=0$, $z_0=500a$).

где $\Phi = (z_0 - \epsilon) \sqrt{1 - \xi^2} + \epsilon(1 - \xi^2) + \epsilon\xi(\xi - x_0)$, $\epsilon = b/a$ — эксцентриситет эллипса.

На рис. 5а,6а приведены каустические кривые при различных значениях координат источника Q и $\epsilon = a/b$. Рис.5а соответствует случаю, когда источник находится на оси зеркала и удален от поверхности на расстояние $z_0 = 1000a$, а рис.6а соответствует случаю $x_0 = 10$, $z_0 = 1000a$. Расчеты интенсивности проведены при следующих значениях параметров волны и зеркала: $D/a = 0.5$, $\epsilon = b/a$, $ka = 100$. Соответствующие распределения изображены на рис.5б,6б.

В заключение отметим, что из условия равенства полуосей эллипса $a=b$ можно получить уравнение каустики и локальную асимптотику поля и при отражении волны от сферического зеркала.

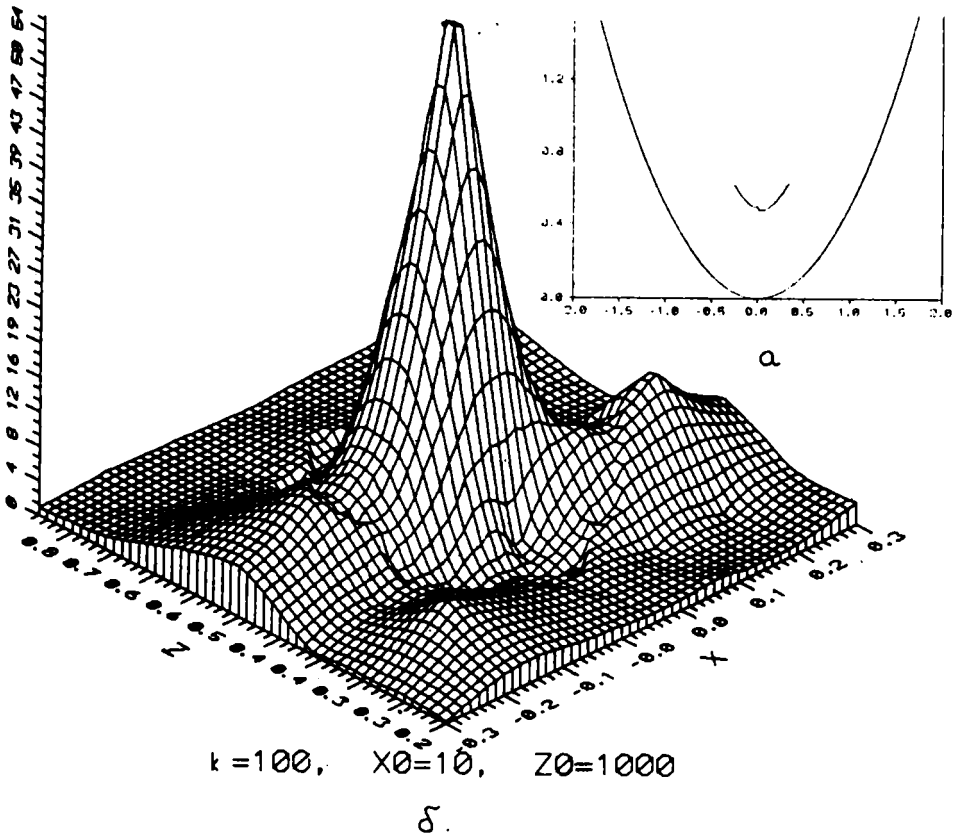


Рис.6. Фокальная кривая (а) и распределение интенсивности при отражении цилиндрической волны от эллиптического зеркала (б) (координаты источника $x_0 = 10a$, $z_0 = 100a$).

Кафедра теории волновых процессов и физики

Поступила 9.12.1991

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов Ю.А. О двух новых асимптотических методах в теории распространения волн в неоднородных средах. Акуст. жур., 1968, т.14, вып.1, с.1
2. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.
3. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.
4. Газали Э.Д., Асатрян А.А. Об устойчивости фокуса параболического зеркала. — Изв. АН РА, сер. Физика, 1987, т.22, в.8, с.327.

ԱՄԲԱՅԻՆ ԴԱՇՏԻ ԱՆՊՐԱՊԱՐՉՈՒՄԸ ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅՔԻՑ

Ամփոփում

Ստացված է հայելուց անդրադարձված ալիքային դաշտի լոկալ ասիմպտոտը և ֆոկալ կորը: Երկու օրինակների վրա (անդրադարձումը պարաբոլիկ հայելուց, անդրադարձումը էլիպտիկ հայելուց) կիրառված են ստացված արդյունքները:

A.A. ASATRIAN, G.KH. GRIGORIAN-KHAKTIAN

MASLOV'S ASYMPTOTICS OF THE REFRACTIVE WAVE FROM
AN ARBITRARY SURFACE

Summary

Maslov's asymptotics of the wave field, the form of the focal curve and wave intensity are found when the wave is reflected from an arbitrary surface. The results are demonstrated on two examples.