ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1983 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

Г. Е. БАГДАСАРЯН

ОБ УРАВНЕНИЯХ МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ПЛАСТИН В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ*

В двумерные уравнения возмущенного состояния проводящих тонких пластин в стационарном магнитном поле, полученные на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел, помимо перемещений точек срединной плоскости пластинки, входят компоненты индуцированного электромагнитного поля.

В настоящей работе при помощи интегральных преобразований Фурье определяется индуцированное электромагнитное поле, выраженное через вектор скорости точек срединной плоскости пластинки. На этой основе задача магнитоупругих колебаний тонких пластин в постоянном магнитном поле приводится к решению двумерной системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно компонент вектора перемещений срединной плоскости при обычных условиях закрепления краев пластинки.

Одной из основных трудностей сведения трехмерной задачи магнитоупругости тонких тел к двумерной является определение индуцированного электромагнитного поля в среде, окружающей рассматриваемое тело. Дело в том, что в двумерные уравнения [2] возмущенного состояния проводящих тонких пластин, находящихся в стационарном магнитном поле (полученные на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел), входят неизвестные граничные значения тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля на поверхностях пластинки. Для определения указанных граничных значений необходимо решать трехмерные уравнения электродинамики для среды, окружающей пластинку, при общих граничных условиях на поверхности раздела двух сред. В работах [3—6] с учетом основных положений гипотезы магнитоупругости тонких тел эта граничная задача во внешней (относительно пластинки) области решена и на основе этого трехмерная задача магнитоупругости тонких пластин сведена к двумерной.

В полученные при этом двумерные уравнения, помимо компонентов перемещений срединной плоскости пластинки, входят компоненты индуцированного электромагнитного поля. В настоящей работе при помощи интегральных преобразований Фурье в случае постоянного магнитного поля определяется индуцированное электромагнитное поле, выраженное через вектор скорости точек срединной плоскости пластинки. На этой основе задача магнитоупругих колебаний тонких пластин приводится к решению двумерной системы сингулярных интегро-дифференци-

---

* Некоторые результаты работы доложены на Втором Всесоюзном симпозиуме по теории магнитоупругости [1].

альных уравнений относительно компонент вектора перемещений срединной плоскости при обычных условиях закрепления краев пластинки.

1. Рассмотрим тонкую изотропную упругую пластинку постоянной толщины $2h$, отнесенную к декартовым координатам x_1, x_2, x_3 так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью x_1, x_2. Пусть пластинка, изготовленная из материала с конечной электропроводимостью, колеблется во внешнем постоянном магнитном поле с вектором напряженности $\mathbf{H}_0(H_{01}, H_{02}, H_{03})$.

Принимаются следующие предположения:

а) магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластинки и окружающей среды считаются равными единице:

б) для среды, окружающей пластинку, считаются справедливыми уравнения электродинамики для вакуума;

в) влияниями токов смещения на характеристики магнитоупругих колебаний пластинки пренебрегаются;

г) упругие перемещения и электромагнитные возмущения настолько малы, что можно пользоваться линейными уравнениями магнитоупругости;

д) гипотеза магнитоупругости тонких тел согласно [2] и [6] примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &u_1=u-x_3\frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2=v-x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}\\ &u_3=w(x_1,\ x_2,\ t)\end{aligned}\right\} \text{при } |x_3|<h, \quad (x_1,\ x_2)\in\Omega,$$

$$\left.\begin{aligned} &e_1=\varphi(x_1,\ x_2,\ t), \quad e_2=\psi(x_1,\ x_2,\ t)\\ &h_3=f(x_1,\ x_2,\ t)\end{aligned}\right\} \text{при } |x_3|<h, \ -\infty<x_1\ x_2<\infty. \tag{1.1}$$

Здесь $u(x_1, x_2, t)$, $v(x_1, x_2, t)$, $w(x_1, x_2, t)$—искомые тангенциальные и нормальная компоненты вектора перемещений точек срединной плоскости пластинки; (u_1, u_2, u_3)—компоненты вектора перемещений произвольной точки пластинки; φ, ψ—искомые тангенциальные компоненты индуцированного в бесконечном слое $|x_3|<h$ электрического поля $\mathbf{e}(e_1, e_2, e_3)$; f—искомая нормальная компонента индуцированного в бесконечном слое $|x_3|<h$ магнитного поля $\mathbf{h}(h_1, h_2, h_3)$; Ω—область плоскости $x_3=0$, ограниченная контуром Γ пластинки.

На основе принятых предположений в работе [6] получена следующая система двумерных интегро-дифференциальных уравнений относительно искомых функций:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\delta\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\psi+\frac{1}{c}\left(H_{01}\frac{\partial w}{\partial t}-H_{03}\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{2\pi h}\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\frac{f(\xi_1,\xi_2,t)}{r}d\xi_1 d\xi_2=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}-\delta\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\varphi-\frac{1}{c}\left(H_{02}\frac{\partial w}{\partial t}-H_{03}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right]+\frac{1}{2\pi h}\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\frac{f(\xi_1,\xi_2,t)}{r}d\xi_1 d\xi_2=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}+\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\sigma H_{03}}{c}\left(\psi-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}+\right.$$

$$\left.+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}-\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\sigma H_{03}}{c}\left(\varphi+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{2\sigma h}{c}\left[H_{01}\left(\psi+\frac{H_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right)-\right.$$

$$\left.-H_{02}\left(\varphi-\frac{H_{02}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{H_{03}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right]-\frac{2\sigma h^3}{3c^2}H_{03}^2\frac{\partial \Delta w}{\partial t}=P(x_1,\ x_2,\ t),$$

причем в первых трех уравнениях $-\infty<x_1,\ x_2<\infty$, а в остальных—$(x_1, x_2)\in\Omega$.

В уравнениях (1.2) $D=2Eh^3/3(1-\nu^2)$—цилиндрическая жесткость, E—модуль упругости, ν—коэффициент Пуассона, ρ—плотность, σ—электропроводимость материала пластинки, Δ—двумерный оператор Лапласа, P—нормальная составляющая внешней поверхностной силы не электромагнитного происхождения, c—скорость света в вакууме,

$$r^2=(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2,\quad \delta=\begin{cases}1 & \text{при } (x_1,\ x_2)\in\Omega,\\ 0 & \text{при } (x_1,\ x_2)\bar{\in}\Omega.\end{cases} \tag{1.3}$$

К системе уравнений (1.2) в каждой конкретной задаче необходимо присоединить обычные условия закрепления краев пластинки, начальные условия и условия на бесконечности.

2. В систему уравнений (1.2), кроме компонент u, v, w вектора перемещений срединной плоскости пластинки, входят компоненты φ, ψ, f индуцированного электромагнитного поля. В этом параграфе при помощи интегральных преобразований Фурье определяются значения φ, ψ, f, выраженные через основные неизвестные u, v, w, и на этой основе задача магнитоупругих колебаний тонких пластин формулируется как динамическая краевая задача относительно функций u, v, w в области Ω.

Из второго, третьего и последнего уравнений системы (1.2) путем исключения функций φ и ψ легко получить следующее уравнение для определения функции f:

$$\left(H_{01}\frac{\partial}{\partial x_1}+H_{02}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(f+\frac{1}{2\pi h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int\frac{f}{r}d\xi_1 d\xi_2\right)=\frac{2\pi\delta}{h}F, \tag{2.1}$$

где

$$F(x_1,\ x_2,\ t)=D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2\sigma h^3}{3c^2}\frac{\partial \Delta w}{\partial t}\cdot H_{03}^2-P. \tag{2.2}$$

Применяя относительно уравнения (2.1) двумерное экспоненциальное преобразование Фурье по переменным x_1 и x_2, с учетом (1.3) и условий затухания возмущений на бесконечности ($f \to 0$ при $x_1 \to \pm\infty$, $x_2 \to \pm\infty$) получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int f e^{i(\alpha x_1+\beta x_2)}dx_1dx_2 = -\frac{2\pi i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{(1+h\sqrt{\alpha^2+\beta^2})(H_{01}\alpha+H_{02}\beta)}\iint\limits_{\Omega} F e^{i(\alpha x_1+\beta x_2)}\times$$

$$\times dx_1dx_2,$$

из которого согласно формуле обращения двумерного преобразования Фурье следует

$$f(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\Omega} F(\xi_1, \xi_2, t)K_1(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2. \tag{2.3}$$

$$K_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{e^{i[\alpha(x_1-\xi_1)+\beta(x_2-\xi_2)]}}{1+h\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{H_{01}\alpha+H_{02}\beta}d\alpha d\beta.$$

Подставляя (2.3) во второе и третье уравнения системы (1.2), найдем функции φ и ψ в области Ω:

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(H_{02}\frac{\partial w}{\partial t} - H_{03}\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(f + \frac{1}{2\pi h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\frac{f}{r}d\xi_1 d\xi_2\right),$$

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\psi = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(H_{03}\frac{\partial u}{\partial t} - H_{01}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(f + \frac{1}{2\pi h}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\frac{f}{r}d\xi_1 d\xi_2\right). \tag{2.4}$$

После подстановки (2.3) и (2.4) в неиспользованные уравнения системы (1.2) (первое, четвертое и пятое) получим следующую окончательную систему интегро-дифференциальных уравнений относительно функций u, v, w в области Ω:

$$\Delta\omega - \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta e - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{\sigma H_{03}^2}{c_l^2c^2}\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\sigma H_{03}}{c_l^2c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[H_{01}\frac{\partial w}{\partial x_1} + H_{02}\frac{\partial w}{\partial x_2} + \iint\limits_{\Omega}FK_1d\xi_1d\xi_2\right],$$

$$\Delta F - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial F}{\partial t}K(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)d\xi_1d\xi_2 + \tag{2.5}$$

$$+\frac{2\sigma h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[H_{01}^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2H_{01}H_{02}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2} + H_{02}^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - H_{03}\left(H_{01}\frac{\partial e}{\partial x_1} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ H_{02}\frac{\partial e}{\partial x_2}\right)\right] = 0,$$

где

$$\omega=\frac{\partial v}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x_2},\quad e=\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial v}{\partial x_2},\quad c_t^2=\frac{E}{2\rho(1+\nu)},\quad c_l^2=\frac{E}{\rho(1-\nu^2)},$$

$$K=\frac{h}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{1+h\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{i[\alpha(x_1-\xi_1)+\beta(x_2-\xi_2)]}\,d\alpha d\beta. \tag{2.6}$$

Из (2.5) видно: а) волны сдвига распространяются независимо, и присутствие магнитного поля не влияет на характеристики их распространения; б) волны дилатации связаны с волной поперечных колебаний и распространяются с затуханием, которое пропорционально поперечной составляющей внешнего магнитного поля; в) плоская задача не разделяется с задачей изгибных колебаний; г) если заданное магнитное поле является продольным ($H_{03}=0$), то, во-первых, все указанные волны распространяются независимо, причем такое магнитное поле не влияет на волны сдвига и дилатации; во-вторых, задача продольных колебаний отделяется от задачи поперечных колебаний, причем для продольных колебаний имеем обычные уравнения теории упругости, а для поперечных колебаний получается следующее интегро-дифференциальное уравнение относительно прогиба пластинки w:

$$\Delta F_1-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\iint\limits_{\Omega}\frac{\partial F_1}{\partial t}K d\xi_1 d\xi_2+$$

$$+\frac{2\sigma h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(H_{01}^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+2H_{01}H_{02}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+H_{02}^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)=0, \tag{2.7}$$

где

$$F_1=D\Delta^2 w+2\rho h\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-P.$$

Таким образом, задача поперечных колебаний проводящих пластин в продольном магнитном поле свелась к решению уравнения (2.7) при обычных условиях для $w(x_1, x_2, t)$ на контуре пластинки.

В заключение приведем еще одно представление ядра K уравнения (2.7), которое получается из (2.6) путем использования интегральных представлений цилиндрических функций:

$$K=\frac{1}{4h^2}\left[H_0\left(\frac{r}{h}\right)-Y_0\left(\frac{r}{h}\right)\right]-\frac{1}{2\pi hr},$$

где H_0—функция Струве, Y_0—функция Бесселя второго рода.

Институт механики АН Арм. ССР, ЕГУ
Поступила 29.03.1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Багдасарян Г. Е.** Об уравнениях магнитоупругости тонких пластин в постоянном магнитном поле.—Тезисы докл. Второго Всесоюзного симпозиума по теории магнитоупругости. Изд-во АН Арм. ССР, 1978.

2. **Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.** К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки.—ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
3. **Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.** Об уравнениях магнитоупругости тонких пластин.—ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
4. **Белубекян М. В.** К задаче колебаний токонесущих пластин.—Изв. АН Арм. ССР, механика, 1975, т. 28, № 2.
5. **Багдасарян Г. Е.** К теории колебаний и устойчивости проводящих пластин в продольном магнитном поле.— ДАН Арм. ССР, 1975, т. 62, № 5.
6. **Багдасарян Г. Е.** О приведении трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластин к двумерной.—Уч. записки ЕГУ, 1977, № 2.

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ԲԱՐԱԿ ՍԱԼԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Մագնիսական դաշտում գտնվող հաղորդիչ բարակ սալերի գրգռված վիճակի հավասարումները, որոնք ստացված են բարակ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածի հիման վրա, բացի սալի միջին հարթության կետերի տեղափոխումներից պարունակում են նաև ինդուկցված էլեկտրամագնիսական դաշտի բաղադրիչները։

Հոդվածում Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ որոշված է ինդուկցված էլեկտրամագնիսական դաշտը, արտահայտված սալի միջին հարթության կետերի տեղափոխումներով։ Դրա հիման վրա բարակ սալերի մագնիսաառաձգական տատանումների խնդիրը բերված է միայն սալի միջին հարթության կետերի տեղափոխումների նկատմամբ գրված ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների երկչափ համակարգի լուծմանը՝ սալի եզրերի սովորական ամրակցման պայմանների դեպքում։