

Механика

УДК 539.3

А. В. КЕРОПЯН

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОЙ
ПОЛОСЫ С КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Работа посвящена исследованию плоской контактной задаче о передаче нагрузки от кусочно-однородного бесконечного включения малой толщины к защемленным по двум краям упругой полосе. Рассматривается случай, когда включения состоят из двух полубесконечных кусков.

Поставленная задача при помощи интегрального преобразования Фурье сводится к неоднородной краевой задаче Римана относительно трансформантов Фурье неизвестных тангенциальных контактных напряжений.

В конечном итоге контактные напряжения представляются в виде интегралов Фурье.

Оказывается, что в части соединения указанных кусков тангенциальные контактные напряжения имеют логарифмическую особенность, а нормальные — конечный скачок, обусловленный неоднородностью включения.

Плоская контактная задача о двух бесконечных телах, соединенных между собой бесконечным, конечным или полубесконечным стрингером, исследовалась в работах [1—5], где в качестве бесконечного тела рассматривалась полуплоскость или полоса.

Контактная задача для полуплоскости, усиленной на своей границе упругой кусочно-однородной накладкой бесконечной длины, состоящей из двух полубесконечных кусков из различных материалов, рассматривалась в работе [6].

Пусть бесконечная упругая полоса (модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν и толщина $2H$) зашпелена гранями $y = \pm H$ и усилена бесконечным упругим включением с достаточно малой постоянной толщины h , модуль упругости которого при $x > 0$ равен E_1 , а при $x < 0$ — E_2 .

Пусть, далее, на точках включения $x = a$, $x = -a$ приложены сосредоточенные силы $P\delta(x-a)$ и $P\delta(x+a)$, которые направлены вдоль оси ox в одну сторону (рис. 1). Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Требуется определить закон распределения нормальных и тангенциальных контактных напряжений вдоль линии соединения включения с полосой.

Здесь, как и в работах [7, 8], относительно включения предполагается, что его толщина в процессе деформации не изменяется, а под действием только тангенциальных контактных напряжений включения растягивается или сжимается как стержень, находясь в одноосном напряженном состоянии.

Для вывода основного уравнения обозначим интенсивности нор-

мальных и тангенциальных контактных напряжений, действующих вдоль линии соединения включения с упругой полосой, через $q(x)$ и $\tau(x)$ соответственно.

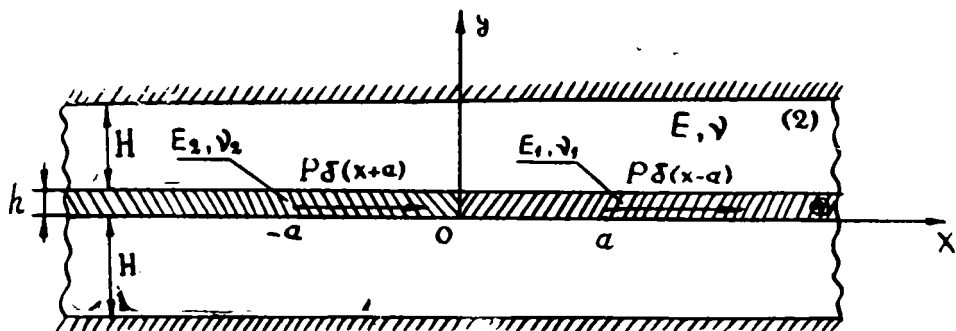


Рис. 1.

При помощи преобразования Фурье нетрудно получить трансформанты Фурье горизонтальных и вертикальных перемещений точек контактирующей части упругой полосы с включением, выражающиеся формулами

$$\bar{u}^{(2)}(\sigma) = \frac{i\bar{q}(\sigma)[4x^2H^2\sigma^2 + (x+1)(1 - \text{ch}2\sigma H)]}{2\mu\sigma K(\sigma)} + \frac{\bar{\tau}(\sigma)(2x+1)[2xH|\sigma| + (x+1)\text{sh}2|\sigma|H]}{2\mu|\sigma|K(\sigma)}, \quad (1)$$

$$\bar{v}^{(2)}(\sigma) = \frac{\bar{q}(\sigma)(2x+1)[(x+1)\text{sh}2|\sigma|H - 2xH|\sigma|]}{2\mu|\sigma|K(\sigma)} - \frac{i\bar{\tau}(\sigma)[4x^2H^2\sigma^2 + (x+1)(1 - \text{ch}2\sigma H)]}{2\mu\sigma K(\sigma)},$$

$$-\infty < \sigma < \infty,$$

где

$$K(\sigma) = 2x(x+1)\text{ch}2\sigma H + x^2(4H^2\sigma^2 + 1) + (x+1)^2,$$

а $x = \frac{\lambda + \mu}{2\mu}$, λ и μ — постоянные Ламе материала полосы.

Учитывая, что при $y=0$ $\bar{v}^{(2)}(\sigma) = 0$, из (1) получим

$$\bar{q}(\sigma) = \frac{i\bar{\tau}(\sigma)|\sigma|[4x^2H^2\sigma^2 + (x+1)(1 - \text{ch}2\sigma H)]}{\sigma(2x+1)[(x+1)\text{sh}2|\sigma|H - 2xH|\sigma|]}. \quad (2)$$

Подставляя это выражение в (1) для $\bar{u}^{(2)}(\sigma)$, получим

$$\bar{u}^{(2)}(\sigma) = \frac{\bar{\tau}(\sigma)[(x+1)^2(\text{ch}2\sigma H - 1) - 2x^2H^2\sigma^2]}{\mu|\sigma|(2x+1)[(x+1)\text{sh}2|\sigma|H - 2xH|\sigma|]}. \quad (3)$$

С другой стороны, согласно принятой выше модели уравнения равновесия включения можно написать в следующем виде [6]:

$$\frac{dU^{(1)}}{dx} = \frac{\tau^+(x)}{E_1 h} + \frac{\tau^-(x)}{E_2 h} - u'_0 \delta(x) - P \left[\frac{\delta(x-a)}{E_1 h} + \frac{\delta(x+a)}{E_2 h} \right], \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \tau^+(x) + \tau^-(x), \\ \tau^+(x) &= \theta(x)\tau(x), \quad \tau^-(x) = \theta(-x)\tau(x), \end{aligned} \quad (5)$$

$\theta(x)$ — функция Хевисайда,

$$U^{(1)}(x) = \theta(x) \frac{du^{(1)}}{dx} + \theta(-x) \frac{du^{(1)}}{dx},$$

$$u'_0 = \left. \frac{du^{(1)}}{dx} \right|_{x=0-0} - \left. \frac{du^{(1)}}{dx} \right|_{x=+0},$$

$u^{(1)}(x)$ — перемещение точек включения.

Применив обобщенное преобразование Фурье к (4), получим

$$-i\sigma \bar{U}^{(1)}(\sigma) = \frac{\tau^+(\sigma)}{E_1 h} + \frac{\tau^-(\sigma)}{E_2 h} - \left[u'_0 + P \left(\frac{e^{i\sigma a}}{E_1 h} + \frac{e^{-i\sigma a}}{E_2 h} \right) \right] \bar{\tau} \quad (6)$$

Заметим, что на линии соединения включения с полосой должно удовлетворяться следующее условие:

$$u^{(1)}(x) = u^{(2)}(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (7)$$

На основании (3), (5), (6), (7) получим следующее функциональное уравнение относительно $\bar{\tau}^+(\sigma)$, $\bar{\tau}^-(\sigma)$:

$$\bar{\tau}^+(\sigma) + R(\sigma) \bar{\tau}^-(\sigma) = g(\sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty. \quad (8)$$

Здесь

$$R(\sigma) = \frac{\lambda_2 + K^{**}(\sigma)}{\lambda_1 + K^{**}(\sigma)}, \quad g(\sigma) = \frac{f(\sigma)}{\lambda_1 + K^{**}(\sigma)},$$

$$K^{**}(\sigma) = \mu \sigma^2 K^*(\sigma), \quad \lambda_1 = \frac{\mu}{E_1 h}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu}{E_2 h},$$

$$K^*(\sigma) = \frac{(x+1)^2 (\text{ch} 2\sigma H - 1) - 2x^2 H^2 \sigma^2}{\mu |\sigma| (2x+1) [(x+1) \text{sh} 2|\sigma| H - 2x H |\sigma|]}, \quad (9)$$

$$f(\sigma) = \mu u'_0 + P(\lambda_1 e^{i\sigma a} + \lambda_2 e^{-i\sigma a}).$$

Таким образом, задача свелась к решению неоднородной краевой задачи Римана.

Отметим, поскольку $\tau(x)$ — суммируемая функция на оси $-\infty < x < \infty$, то $\bar{\tau}^+(\sigma)$ и $\bar{\tau}^-(\sigma)$ стремятся к нулю при $\sigma \rightarrow \pm \infty$.

Для решения задачи Римана, как известно, надо факторизовать $R(\sigma)$, т. е. представить ее в виде отношения $R(\sigma) = \frac{R^+(\sigma)}{R^-(\sigma)}$, где $R^+(\sigma)$ — граничные значения аналитической функции, регулярной в верхней полуплоскости и там не имеющей нулей, а $R^-(\sigma)$ — граничные значения аналитической функции, регулярной и не имеющей нулей в нижней полуплоскости. Поступая известным методом [9], получим

$$R^+(\sigma) = \sqrt{R(\sigma)} \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln R(s) \frac{ds}{s-\sigma},$$

$$R^-(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{R(\sigma)}} \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln R(s) \frac{ds}{s-\sigma}.$$

Очевидно, что $R^+(\sigma)$ и $R^-(\sigma)$ стремятся к единице при $\sigma \rightarrow \pm\infty$.

Тогда краевое условие (8) после представления его в виде

$$\frac{\bar{\tau}^+(\sigma)}{R^+(\sigma)} + \frac{\bar{\tau}^-(\sigma)}{R^-(\sigma)} = \frac{g(\sigma)}{R^+(\sigma)}, \quad -\infty < \sigma < \infty \quad (8')$$

при помощи аналитической функции

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{R^+(s)} \frac{ds}{s-z},$$

краевое значение которой удовлетворяет условию [9]

$$\Psi^+(\sigma) - \Psi^-(\sigma) = \frac{g(\sigma)}{R^+(\sigma)},$$

можно записать в следующем виде:

$$\frac{\bar{\tau}^+(\sigma)}{R^+(\sigma)} - \Psi^+(\sigma) = - \frac{\bar{\tau}^-(\sigma)}{R^-(\sigma)} - \Psi^-(\sigma).$$

Нетрудно видеть, что $\Psi^+(\sigma)$ и $\Psi^-(\sigma)$ стремятся к нулю при $\sigma \rightarrow \pm\infty$.

Согласно теореме об аналитическом продолжении и на основании теоремы Лиувилля получим [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\tau}^+(z)}{R^+(z)} - \Psi^+(z) &= 0, \quad \text{Im} z > 0, \\ \frac{\bar{\tau}^-(z)}{R^-(z)} + \Psi^-(z) &= 0, \quad \text{Im} z < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как функция $\Psi(z)$ представляет интеграл типа Коши, построено-

го по функции $\frac{g(s)}{R^+(s)}$, то согласно формулам Племеля—Сохоцкого будем иметь

$$\Psi^+(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{g(\sigma)}{R^+(\sigma)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{R^+(s)} \frac{ds}{s-\sigma},$$

$$\Psi^-(\sigma) = -\frac{1}{2} \frac{g(\sigma)}{R^+(\sigma)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{R^+(s)} \frac{ds}{s-\sigma}.$$

Из (10) получим

$$\bar{\tau}^+(\sigma) = \frac{1}{2} g(\sigma) + \frac{R^+(\sigma)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{R^+(s)} \frac{ds}{s-\sigma},$$

$$\bar{\tau}^-(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{g(\sigma)}{R(\sigma)} - \frac{R^-(\sigma)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{R^+(s)} \frac{ds}{s-\sigma}.$$
(11)

Таким образом, $\bar{\tau}(\sigma)$ будет даваться формулой

$$\bar{\tau}(\sigma) = \frac{1}{2} g(\sigma) \left[1 + \frac{1}{R(\sigma)} \right] + \frac{R^+(\sigma) - R^-(\sigma)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{R^+(s)} \frac{ds}{s-\sigma}.$$
(12)

Учитывая (9), выражение (12) запишем в виде

$$\bar{\tau}(\sigma) = \frac{\mu u'_0 + P(\lambda_1 e^{i\sigma a} + \lambda_2 e^{-i\sigma a})}{2} \left[\frac{1}{\lambda_1 + K^{**}(\sigma)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_2 + K^{**}(\sigma)} \right] + \frac{R(\sigma) - 1}{\sqrt{R(\sigma)}} \Gamma(\sigma) \Psi^*(\sigma).$$
(13)

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\Gamma(\sigma) = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln R(s) \frac{ds}{s-\sigma},$$

$$\Psi^*(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{R^+(s)} \frac{ds}{s-\sigma}.$$

Применив к (13) обратное преобразование Фурье, получим

$$\tau(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu u'_0 + P(\lambda_1 e^{i\sigma a} + \lambda_2 e^{-i\sigma a})}{2} \left[\frac{1}{\lambda_1 + K^{**}(\sigma)} + \frac{1}{\lambda_2 + K^{**}(\sigma)} \right] e^{-i\sigma x} d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\sigma)-1}{\sqrt{R(\sigma)}} \Gamma(\sigma) \Psi^*(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad -\infty < x < \infty. \quad (14)$$

Подставляя (13) в (2) и применив обратное преобразование Фурье, получим

$$q(x) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\mu u_0' + P(\lambda_1 e^{i\sigma a} + \lambda_2 e^{-i\sigma a})}{2} \left[\frac{1}{\lambda_1 + K^{**}(\sigma)} + \frac{1}{\lambda_2 + K^{**}(\sigma)} \right] \right\} K_1^*(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\sigma)-1}{\sqrt{R(\sigma)}} \Gamma(\sigma) \Psi^*(\sigma) K_1^*(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad -\infty < x < \infty. \quad (15)$$

Здесь

$$K_1^*(\sigma) = \frac{i \operatorname{sign} \sigma [4x^2 H^2 \sigma^2 + (x+1)(1 - \operatorname{ch} 2\sigma H)]}{(2x+1)[(x+1) \operatorname{sh} 2|\sigma| H - 2xH|\sigma]}.$$

Постоянная u_0' определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau(s) ds = 2P.$$

Далее, поскольку $\bar{\tau}(\sigma) \sim |\sigma|^{-1}$, $\bar{q}(\sigma) \sim \frac{1}{\sigma}$ при $\sigma \rightarrow \pm\infty$, то отсюда следует, что при $x=0$ тангенциальные контактные напряжения имеют логарифмическую особенность, а нормальные — конечный скачок, обусловленный неоднородностью включения.

В заключение автор сердечно благодарит В. С. Саркисяна за постановку задачи и внимание к работе, а также Э. Х. Григоряна за обсуждение и ряд ценных замечаний.

Кафедра механики сплошной среды

Поступила 30.04.1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., ПММ, 32, № 4, 1968.
2. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М., Сб. Механика деформируемых тел и конструкций (пос. 60-летию акад. Ю. Н. Работнова), 1975.
3. Саркисян В. С., Аванесян Р. Г., Уч. записки ЕГУ, № 1, 1979.
4. Саркисян В. С., Аванесян Р. Г., ДАН Арм. ССР, 64, № 3, 1977.
5. Аванесян Р. Г., Саркисян В. С., Уч. записки ЕГУ, № 2, 1978.
6. Григорян Э. Х., Уч. записки ЕГУ, № 3, 1979.
7. Melan E., Ingr-Arch., Bd. 3, № 2, S. 123—129, 1932.
8. Boller H., VDI-Forschungsheft, 485, series B, № 27, 1961.
9. Гахов Ф. Д., Краевые задачи, Госиздат, М., 1963.
10. Шнилов Г. Е., Математический анализ. Второй спецкурс, изд-во «Наука», М., 1965.

Ա. Վ. ՔԵՐՈՔՅԱՆ

ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ՆԵՐԴՐԱԿՈՎ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ՄԻ
ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքը նվիրված է փոքր հաստոթյամբ կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ ներդրակից բեռնավորման փոխանցմանը երկու եզրերով ամրակրցված առաձգական շերտին: Դիտարկված է այն դեպքը, երբ ներդրակը կազմված է երկու կիսաանվերջ կտորներից:

Խնդրի լուծումը Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ բերվում է Ռիմանի անհամասեռ եզրային խնդրին անհայտ շոշափող կոնտակտային լարումների Ֆուրյեի ձևափոխությունների նկատմամբ: Վերջնական տեսքով կոնտակտային լարումները ներկայացված են Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով: Հետազոտված է կոնտակտային լարումների վարքը: