

Механика

Э. Х. ГРИГОРЯН

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТИВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО
КЛАССА СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматривается динамическая контактная задача для упругой полуплоскости, усиленной на границе двумя одинаковыми полубесконечными накладками, когда на краях накладок действует сосредоточенная сила $P \sin \omega t$. Предлагается эффективный метод решения рассматриваемой задачи, сущность которого заключается в следующем: задача определения неизвестных контактных напряжений на полубесконечных симметричных интервалах сводится к решению одного сингулярного интегрального уравнения первого рода для деформации конечного промежуточного интервала между накладками. При решении этого уравнения применяется аппарат ортогональных многочленов Чебышева. Контактные же напряжения выражаются через найденные деформации в замкнутом виде. Изложенный в работе метод решения имеет достаточно общий характер, и его можно применить в решениях подобных задач теории упругости.

В последнее время значительное развитие получил один из важных разделов контактных и смешанных задач теории упругости, относящихся к определению контактных напряжений и других характерных механических величин в упругих телах различных форм, подкрепленных накладками малой толщины или тонкими упругими включениями. Не останавливаясь здесь на библиографических подробностях этого вопроса, отметим лишь, что подробные данные по этой тематике с достаточной полнотой содержатся в [1, 2]. Отметим также, что почти во всех работах, выполненных по этому направлению и опубликованных, поставленные контактные задачи решаются или непосредственным применением какого-либо интегрального преобразования [3, 4], или же известными методами ортогональных многочленов [5—9] и Винера-Хопфа [10—12].

Однако существует не менее интересный класс задач, решения которых невозможно получить непосредственным применением указанных выше методов. С задачами такого типа встречаемся в частности тогда, когда упругое тело подкреплено двумя полубесконечными накладками.

Настоящая работа дает возможность устранить этот пробел в данной тематике.

1. Пусть упругая полуплоскость усилена на своей границе двумя полубесконечными упругими накладками с одинаковыми модулями упругости и достаточно малой постоянной толщины h . Задача заключается в определении закона распределения контактных напряжений вдоль линии соединения накладок с упругой полуплоскостью, когда на концах накладок действует сосредоточенная сила $P \sin \omega t$ (рис. 1).

Для простоты вычислений в дальнейшем эту силу возьмем в виде $Pe^{-i\omega t}$.

Очевидно, что мнимая часть с обратным знаком решения обсуждаемой задачи, построенного для случая силы указанного вида, представляет собой искомое решение. Как и в [12], колебания накладок будет описываться следующим дифференциальным уравнением:

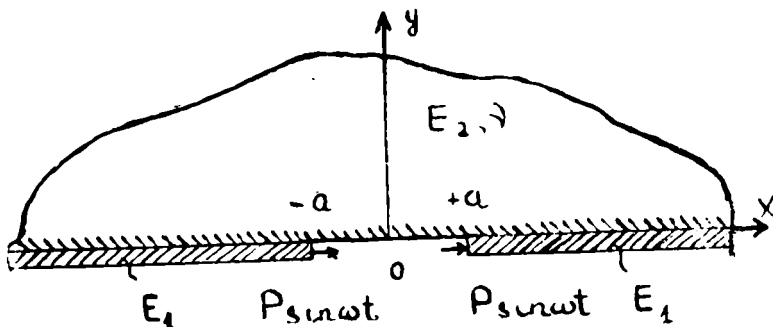


Рис. 1

$$\frac{\partial^2 \bar{u}^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{\rho_1}{E_1} \frac{\partial^2 \bar{u}^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{1}{E_1 h} \bar{\tau}(x, t), \quad |x| > a \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=-a} = \frac{P}{E_1 h} e^{-i\omega t}, \quad \left. \frac{\partial \bar{u}^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=a} = -\frac{P}{E_1 h} e^{-i\omega t}, \quad (1.2)$$

где $\bar{\tau}(x, t)$ — тангенциальные контактные напряжения, $\bar{u}^{(1)}(x, t)$ — горизонтальные перемещения точек накладок, E_1 — модуль упругости, ρ_1 — плотность материала накладок.

Рассматривая установившиеся колебания накладок, получим

$$\bar{u}^{(1)}(x, t) = u_1(x) e^{-i\omega t}, \quad \bar{\tau}(x, t) = \tau(x) e^{-i\omega t}.$$

Далее, имея в виду граничное условие (1.2), для определения амплитуды перемещений получим граничную задачу, которая в обобщенных функциях будет даваться в следующем виде [13]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U^{(1)}}{dx^2} + k^2 U^{(1)}(x) &= \frac{1}{E_1 h} T(x) + u^{(1)}(a) [\delta'(x-a) - \delta'(x+a)] - \\ &- \frac{P}{E_1 h} [\delta(x-a) + \delta(x+a)], \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned} U^{(1)}(x) &= [\theta(-x-a) + \theta(x-a)] u^{(1)}(x), \\ T(x) &= [\theta(-x-a) + \theta(x-a)] \tau(x), \\ k^2 &= \omega^2 / c^2, \quad c^2 = E_1 / \rho_1, \end{aligned}$$

$\theta(x)$ — функция Хевисайда, $\delta(x)$ — функция Дирака.

Применив обобщенное преобразование Фурье к рассматриваемому уравнению, получим

$$(k^2 - \sigma^2)\bar{U}^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{E_1 h} T(\sigma) + 2u^{(1)}(a)\sigma \sin \sigma a - \frac{2P}{E_1 h} \cos \sigma a, \quad (1.3)$$

где

$$\bar{U}^{(1)}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} U^{(1)}(x) e^{i\sigma x} dx, \quad \bar{T}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x) e^{i\sigma x} dx.$$

С другой стороны для граничных точек упругой полуплоскости имеем [12]

$$\frac{1}{\mu_2} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x-s) T(s) ds = U^{(2)}(x) + \frac{1}{\mu_2} G(x), \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \int_{-\infty}^{\infty} L(x-s) T(s) ds = v^{(2)}(x),$$

где

$$K_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

$$\bar{K}_n(\sigma) = \frac{k_2^2 \sqrt{\sigma^2 - k_2^2}}{4\sigma^2 \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - (2\sigma^2 - k_2^2)^2},$$

$$L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{L}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad \bar{L}(\sigma) = \frac{i\sigma [2\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - 2\sigma^2 + k_2^2]}{(2\sigma^2 - k_2^2)^2 - 4\sigma^2 \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \sqrt{\sigma^2 - k_2^2}},$$

$$U^{(2)}(x) = [\theta(-x-a) + \theta(x-a)] u^{(2)}(x), \quad G(x) = [\theta(x+a) - \theta(x-a)] g(x),$$

$u^{(2)}(x)$ — горизонтальные перемещения граничных точек полуплоскости,

$v^{(2)}(x)$ — вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости,

$g(x) = \mu_2 u^{(2)}(x)$ при $|x| < a$,

λ_2, μ_2 — упругие постоянные Ляме,

ρ_2 — плотность материала упругой полуплоскости,

$$k_2^2 = \frac{\omega^2 \rho_2}{\mu_2}, \quad k_1^2 = \frac{\omega^2 \rho_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}.$$

В силу условия контакта имеет место равенство

$$U^{(1)}(x) = U^{(2)}(x). \quad (1.5)$$

Далее, применив преобразование Фурье к уравнению (1.4) и имея в виду условие (1.5), будем иметь

$$\frac{1}{\mu_2} \bar{K}_n(\sigma) \bar{T}(\sigma) = \bar{U}^{(1)}(\sigma) + \frac{1}{\mu_2} \bar{G}(\sigma). \quad (1.6)$$

Разрешив совместно уравнения (1.3) и (1.6), для определения $\bar{T}(\sigma)$ получим уравнение

$$[\lambda + (\sigma^2 - k^2)\bar{K}_n(\sigma)]\bar{T}(\sigma) = (\sigma^2 - k^2)\bar{G}(\sigma) + 2\lambda P \cos \sigma a - 2\mu_2 u^{(1)}(a) \sigma \sin \sigma a$$

$$(\lambda = \mu_2 / E_1 h). \quad (1.7)$$

Имея в виду, что

$$(-i\sigma + ik)\bar{G}(\sigma) = -2i\mu_2 u^{(1)}(a) \sin \sigma a + \bar{p}(\sigma),$$

где

$$\bar{p}(\sigma) = \bar{G}_1(\sigma) + ik\bar{G}(\sigma),$$

$$\bar{G}_1(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(x) e^{i\sigma x} dx, \quad G_1(x) = [\theta(x+a) - \theta(x-a)] \frac{dg(x)}{dx},$$

уравнение (1.7) можем представить в виде

$$\bar{T}(\sigma) = [\lambda + (\sigma^2 - k^2)\bar{K}_n(\sigma)]^{-1} [i(\sigma + k)\bar{p}(\sigma) + 2k\mu_2 u^{(1)}(a) \sin \sigma a + 2\lambda P \cos \sigma a].$$

Отсюда после применения обратного преобразования Фурье к $\bar{T}(\sigma)$ для $T(x)$ получим следующее представление:

$$T(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} [K'(x-s) - ikK(x-s)] p(s) ds +$$

$$+ [\lambda P + i\mu_2 k u^{(1)}(a)] K(|x+a|) + [\lambda P - i\mu_2 k u^{(1)}(a)] K(|x-a|), \quad (1.8)$$

здесь

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad K'(x) = \frac{dK(x)}{dx}.$$

Отметим, что при $\omega \rightarrow 0$ это уравнение преобразуется в вид

$$T(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \Pi'(x-s) G_1(s) ds + 2\lambda P \Pi(x), \quad (1.9)$$

где

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda + |\sigma|} e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad \Pi'(x) = \frac{d\Pi(x)}{dx},$$

которое разрешает соответствующую статическую задачу.

Легко заметить, что уравнение (1.8) эквивалентно следующей системе интегральных уравнений:

$$\tau(x) = - \int_{-a}^a [K'(x-s) - ikK(|x-s|)] p_0(s) ds + [\lambda P + i\mu_2 k u^{(1)}(a)] K(|x+a|) +$$

$$+ [\lambda P - i\mu_2 k u^{(1)}(\bar{a})] K(|x-a|), \quad |x| > a,$$

$$0 = - \int_{-a}^a [K'(x-s) - ikK(|x-s|)] p_0(s) ds + [\lambda P + i\mu_2 ku^{(1)}(a)] K(|x+a|) + \\ + [\lambda P - i\mu_2 ku^{(1)}(a)] K(|x-a|),$$

где

$$p_0(x) = \mu_2 \left(\frac{du^{(2)}(x)}{dx} + iku^{(2)}(x) \right), \quad |x| < a.$$

Таким образом, решение задач свелось к решению следующего интегрального уравнения:

$$\int_{-1}^1 [K_i'(x-s) - ik^*K_1(x-s)] \varphi(s) ds = w_1(a)K_1(k_2^*|x+1|) + \\ + w_2(a)K_1(k_2^*|x-1|), \quad (1.10)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\mu_2} g(ax), \quad w_1(a) = \frac{\lambda P}{\mu_2} - iu^{(1)}(a), \quad w_2(a) = \frac{\lambda P}{\mu_2} + iku^{(1)}(a), \\ K_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_2^* e^{-isk_2^*x}}{\lambda^* + k_2^* \bar{K}_0(s)(s^2 - \varepsilon_0^2)} ds, \quad \varepsilon^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \quad \varepsilon_0^2 = \frac{c_2^2}{c^2}, \\ K_1'(x) = \frac{d}{dx} K_1(x), \quad k_2^* = \omega a \sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}, \quad k^* = \omega a \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}}, \quad \lambda^* = \frac{a\mu_2}{E_1 h}, \\ \bar{K}_0(s) = \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{4s^2 \sqrt{s^2 - 1} \sqrt{s^2 - \varepsilon^2} - (2s^2 - 1)^2}.$$

По методике, изложенной в [9] ядро $K_i'(x) - ik^*K_1(x)$ можно представить в виде

$$K_i'(x) - ik^*K_1(x) = \frac{2(1-\varepsilon^2)}{\pi} \cdot \frac{1}{x} - 2(1-\varepsilon^2)^2 \lambda^* \operatorname{sgn} x + \\ + 2ik^* \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x|} + c \right) + R(x), \quad (1.11)$$

где функция $R(x)$ обладает тем свойством, при котором ее первая производная квадратично суммируема на отрезке $[-1; 1]$. Постоянная c определяется следующим образом [9]:

$$c = - \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \lim_{x \rightarrow 0} \left[K_1(k_2^*x) - \frac{2(1-\varepsilon^2)}{\pi} \ln |k_2^*x| \right] = - \frac{1}{\pi} \ln \gamma - \\ - \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \int_0^1 \bar{K}_1(s) ds - \frac{1}{2\pi(1-\varepsilon^2)} \int_1^{\infty} \left[\bar{K}_1(s) + \frac{2(1-\varepsilon^2)}{s} \right] ds,$$

$$\bar{K}_1(s) = \frac{k_2^*}{\lambda^* + k_2^* \bar{K}_0(s)(s^2 - \varepsilon^2)},$$

γ — постоянная Эйлера.

Имея в виду формулу (1.11), уравнение (1.10) можем представить в виде

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\pi} \frac{1}{s-x} - (1-\varepsilon^2)\lambda^* \operatorname{sgn}(x-s) + ik^* \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} + c \right) + \frac{R(x-s)}{2(1-\varepsilon^2)} \right] \varphi(s) ds = \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} [w_1(a)K_1(k_2^*|x+1|) + w_2(a)K_1(k_2^*|x-1|)]. \quad (1.12)$$

Таким образом, решение динамической контактной задачи для полуплоскости, усиленной на своей границе двумя полубесконечными накладками малой толщины, сводится к решению сингулярного интегрального уравнения. Ядро этого уравнения состоит из двух слагаемых, одно из которых представляет собой ядро Коши, а другое — функцию, квадратично суммируемую в квадрате $-1 \leq x, s \leq 1$.

Следуя работе [15], решение уравнения (1.12) ищем в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x), \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| < 1, \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (1.13)$$

где $T_n(x)$ — многочлены Чебышева первого рода. Подставляя выражение $\varphi(x)$ из (1.13) в (1.12) и пользуясь соотношением [14]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s) ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} = U_{n-1}(x), \quad U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)}, \quad |x| < 1, \quad (n=1, 2, \dots),$$

где $U_{n-1}(x)$ — многочлены Чебышева второго рода, известным способом получим следующую бесконечную систему линейных уравнений относительно коэффициентов a_n ($n=1, 2, \dots$):

$$a_m + \sum_{n=1}^{\infty} (K_{m,n}^{(1)} + k_{m,n}^{(2)} + R_{m,n}) a_n = a_0 \varphi_m + f_m, \quad (m=1, 2, \dots). \quad (1.14)$$

Здесь

$$K_{m,n}^{(1)} = \frac{2(1-\varepsilon^2)\lambda^*}{\pi} \begin{cases} \frac{4m[1+(-1)^{n-m}]}{[n^2-(m-1)^2][n^2-(m+1)^2]}, & n \neq m \pm 1; \\ 0, & n = m \pm 1 \end{cases}$$

$$K_{m,n}^{(2)} = \begin{cases} \frac{\pi}{4n}, & n = m \pm 1, \quad m \neq 1 \\ 0, & n \neq m \pm 1 \\ -\frac{\pi}{4}, & m=1, \quad n=2; \end{cases}$$

$$R_{m, n} = \frac{1}{\pi(1-\varepsilon^2)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R(x-s) \frac{T_n(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x) dx;$$

$$\varphi_m = \begin{cases} \pi(1-\varepsilon^2)\lambda^* - ik^* \ln 2, & m=1 \\ \frac{2(1-\varepsilon^2)\lambda^*}{\pi} \cdot \frac{4m[1-(-1)^m]}{(m^2-1)^2}, & m \neq 1 \end{cases} \left\{ -\frac{R_{m,0}}{\pi(1-\varepsilon^2)}, (m, n=1, 2, \dots); \right.$$

$$f_m = \frac{1}{\pi(1-\varepsilon^2)} \int_{-1}^1 [w_1(a)K_1(k_2^*|x+1|) + w_2(a)K_1(k_2^*|x-1|)] \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x) dx$$

(m=1, 2, ...).

Причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}^{(2)}| = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & m=1 \\ \frac{\pi}{2}(m^2-1)^{-1}, & m \neq 1. \end{cases}$$

Исследование бесконечной системы (1.14) в случае только одного ядра $K_{m,n}^{(1)}$ содержится в работе [15]. Поступая аналогично [9,15], можем показать, что добавление к этому ядру ядер $K_{m,n}^{(2)}, R_{m,n}$ не нарушает регулярность исходной бесконечной системы в смысле ее квазиполной регулярности.

После определения $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ из системы (1.14) коэффициенты $a_0, u^{(1)}(a)$ определяются из равенств

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int_a^{\infty} [K(|x-s|) + K(|x+s|)] \tau(s) ds \right\} \Big|_{x=a} = -\frac{P}{E_1 h},$$

$$\int_a^{\infty} [K(a-s) + K(a+s)] \tau(s) ds = u^{(1)}(a).$$

Заметим, что после определения $\varphi(x)$, контактные напряжения будут даваться по формуле

$$\tau(ax) = \frac{\mu_2}{\sqrt{x^2-1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ (x + \sqrt{x^2-1})^{-n} + \sqrt{x^2-1} \int_{-1}^1 [(1-\varepsilon^2)\lambda^* - \right.$$

$$\left. - ik^* \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} + C \right) - \frac{R(x-s)}{2(1-\varepsilon^2)} \int \frac{T_n(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} \right\} +$$

$$+ \frac{\mu_2}{2(1-\varepsilon^2)} [w_1(a)K_1(k_2^*|x+1|) + w_2(a)K_1(k_2^*|x-1|)]; \quad x > 1.$$

2. Используя метод Лайтхилла [12] для $\bar{v}(x, t)$, $\bar{u}_2(x, t)$, $\bar{v}_2(x, t)$ получим следующие асимптотические формулы при больших x :

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, t) = & -\frac{C_0 f(\sigma_R)}{\Omega_1} \exp[-i(\omega t - \sigma_R |x|)] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(k_2^2 - k^2) f(k_2)}{\lambda^2} \times \\ & \times \frac{\exp[-i(\omega t - k_2 |x| - \pi/4)]}{(k_2 |x|)^{3/2}} - 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_1^4 k_2^2 (k_1^2 - k^2) (k_2^2 - k_1^2) f(k_1)}{\Omega_2} \times \\ & \times \frac{\exp[-i(\omega t - k_1 |x| - \pi/4 - 2\varphi)]}{(k_1 |x|)^{3/2}} + O(|x|^{-5/2}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x, t) = & -\frac{C_1 f(\sigma_R)}{\Omega_1 \mu_2} \exp[-i(\omega t - \sigma_R |x|)] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{f(k_2)}{2 \mu_2 \lambda} \times \\ & \times \frac{\exp[-i(\omega t - k_2 |x| - \pi/4)]}{(k_2 |x|)^{3/2}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2 \lambda k_1^4 k_2^2 (k_2^2 - k_1^2) f(k_1)}{\mu_2 \Omega_2} \times \\ & \times \frac{\exp[-i(\omega t - k_1 |x| - \pi/4 + 2\varphi)]}{(k_1 |x|)^{3/2}} + O(|x|^{-5/2}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} v^{(2)}(x, t) = & \frac{C_2 f(\sigma_R)}{\mu_2 \Omega_1} \operatorname{sgn} x \exp[-i(\omega t - \sigma_R |x|)] - \\ & - \frac{1}{2 \mu_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(k_2^2 - k^2 + 2 \lambda \sqrt{k_2^2 - k_1^2}) f(k_2)}{\lambda^2 k_2} \times \frac{\exp[-i(\omega t - k_2 |x| - \pi/4)]}{k_2 x (k_2 |x|)^{1/2}} + \\ & + \frac{1}{\mu_2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda k_1^4 k_2^2 (2k_1^2 - k_2^2) \sqrt{k_2^2 - k_1^2} f(k_1)}{\Omega_2} \times \\ & \times \frac{\exp[-i(\omega t - k_1 |x| - \pi/4) + 2\varphi]}{k_1 x (k_1 |x|)^{1/2}} + O(|x|^{-5/2}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$f(\sigma) = (\sigma^2 - k^2) \bar{G}(\sigma) + 2\lambda P \cos \sigma a - 2\mu_2 u^{(1)}(a) \sin \sigma a,$$

$$C_0 = (2\sigma_R^2 - k_2^2)^2 - 4\sigma_R^2 \sqrt{(\sigma_R^2 - k_1^2)(\sigma_R^2 - k_2^2)},$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 = & \frac{d}{d\sigma} \{k_2^2 (\sigma^2 - k^2) \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - \lambda [(2\sigma^2 - k_2^2)^2 - \\ & - 4\sigma^2 \sqrt{(\sigma^2 - k_1^2)(\sigma^2 - k_2^2)}]\} \Big|_{\sigma=\sigma_R}, \end{aligned}$$

$$\Omega_2 = \lambda^2 (2k_1^2 - k_2^2)^4 + k_1^4 (k_1^2 - k^2)^2 (k_2^2 - k_1^2),$$

$$C_1 = k_2 \sqrt{\sigma_R^2 - k_2^2},$$

$$C_2 = \sigma_R (2 \sqrt{(\sigma_R^2 - k_1^2)(\sigma_R^2 - k_2^2)} - 2\sigma_R^2 + k_2^2),$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{k_2^2 (k_1^2 - k^2) \sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{\lambda (2k_1^2 - k_2^2)^2} \right],$$

а σ_R является простым вещественным нулем функции

$$\psi(\sigma) = k_1^2 (\sigma^2 - k_2^2) \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} - \lambda [(2\sigma^2 - k_2^2)^2 - 4\sigma^2 \sqrt{(\sigma^2 - k_1^2)(\sigma^2 - k_2^2)}],$$

которая подробно исследована в [12].

В каждой из формул (2.1), (2.2) и (2.3) первым членом описывается распространение поверхностных волн Рэлея. Во втором слагаемом волновая скорость совпадает со скоростью искажающих волн $C_2 = \omega/k_2$, и описываемое им колебание является эллиптическим. В третьем слагаемом волновая скорость равна скорости расширяющих волн $c_1 = \omega/k_1$ и соответствующее ему колебание прямолинейно.

В случае статической задачи для контактных тангенциальных напряжений получается следующая асимптотическая формула:

$$\tau(x) = \frac{2P}{\pi \lambda x^2} - \frac{12(1 - a^2 \lambda^2)P + 16\lambda \bar{G}'_1(0)}{\pi \lambda^3 x^4} + O(x^{-6}),$$

$$\bar{G}'_1(0) = \left. \frac{d\bar{G}_1(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0}. \quad (2.4)$$

Здесь из уравнения (1.9) с помощью преобразования Фурье была определена $\bar{T}(\sigma)$ в виде

$$\bar{T}(\sigma) = \frac{i\sigma \bar{G}_1(\sigma)}{\lambda + |\sigma|} + \frac{2\lambda P \cos \sigma a}{\lambda + |\sigma|},$$

а затем был применен метод Лайтхилла.

Из формулы (2.4) следует, что в случае статической задачи в отличие от динамической (2.1) контактные тангенциальные напряжения при $|x| \rightarrow \infty$ можем определить с точностью порядка $O(x^{-2})$, не разрешив сингулярного интегрального уравнения (1.12). Эти асимптотические значения $\tau(x)$ с указанной точностью совпадают с асимптотическими значениями тангенциальных контактных напряжений задачи, когда сосредоточенная сила $2P\delta(x)$ передается к полуплоскости через бесконечную накладку, прикрепленную к границе полуплоскости.

Кафедра механики сплошных сред

Поступила 19.01.1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие теории контактных задач СССР, изд. «Наука», М., 1976.
2. Муки Р., Стернберг Е., Тр. Америк. общ. инж.-механиков, сер. Е, № 4, 1968.
3. Melan E., Ingr—Arch., Bd. 3, 2, 1932.
4. Koiter W., Journ. of Mech. and Appl. Math., 8, 2, 1955.
5. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М., ПММ, 36, вып. 5, 1972.
6. Морарь Г. А., Попов Г. Я., ПММ, 34, вып. 3, 1970.
7. Саркисян В. С., Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела, изд. ЕГУ, Ереван, 1976.
8. Александров В. М., Галаджев Р. С., Соловьев А. С., Измерительная техника, № 2, 1966.
9. Григорян Э. Х., ПММ, 38, вып. 2, 1974.

10. Воробьев В. Л., Попов Г. Я., ПММ, 34, № 2, 1970.
11. Каландия А. И., Математические методы двумерной упругости, изд. «Наука», М., 1973.
12. Григорян Э. Х., МТТ, вып. 5, 1972.
13. Шилов Г. Е., Математический анализ. Второй спецкурс, изд. «Наука», М., 1965.
14. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений, Физматгиз, М., 1962.
15. Arutunyan N. K., Mchitaryan S. M., In: Trends in elasticity and thermoelasticity, Withold. Nowacki anniversary volume. Wolters-Noordoff Publishing, p. 3—30, 1971.

Է. Խ. ԳՐԻԳՐՅԱՆ

**ԱՌԱՋԿԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ԴԱՍԻ ԽԱՌԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ
ԼՈՒՄՄԱՆ ՄԻ ԷՖԵԿՏԻՎ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ**

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու միատեսակ կիսանվերջ վերադիրնե-րով ուժեղացված կիսահարթության համար դինամիկ կոնտակտային խնդիր, երբ այդ վերադիրները դեֆորմացվում են ժայրերում ազդող հարմոնիկ ուժե-րով:

Առաջարկվում է այս խնդրի լուծման էֆեկտիվ մեթոդ, որի էությունը կա-յանում է հետևյալում: Կիսանվերջ սիմետրիկ ինտերվալներում անհայտ կոն-տակտային լարումների որոշման խնդիրը փոխարինվում է միջանկյալ վերջա-վոր ինտերվալում համապատասխան դեֆորմացիայի որոշման խնդրով:

Այդ անհայտ դեֆորմացիայի նկատմամբ ստացված առաջին սեռի պին-գուլյար ինտեգրալ հավասարումը լուծվում է Չբեիշևի օրթոգոնալ բազման-դամների ապարատի օգնությամբ: Այն բանից հետո, երբ միջանկյալ վերջա-վոր ինտերվալում որոշված է անհայտ դեֆորմացիան, կոնտակտային լարում-ները վերջինիս միջոցով արտահայտվում են փակ տեսքով:

Այս մասնավոր խնդրի լուծման նշված մեթոդը հնարավորություն է տա-լիս լուծելու նման խնդիրներ տարբեր տիրույթների համար: