ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 119 2019 № 1

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 510.64

Г. М. Зограбян, С. М. Саядян, А. А. Чубарян

Исследование свойства монотонности некоторых пропозициональных систем выводов классической и неклассических логик

(Представлено чл.-кор. НАН РА И. Д. Заславским 21/I 2019)

Ключевые слова: *минимальная тавтология; пропозициональные системы резолюций; количество шагов выводов; монотонность системы, строгая монотонность системы.*

1. Введение. Минимальные тавтологии, т.е. тавтологии, которые не являются результатом подстановки в более короткие тавтологии, играют существенную роль в теории сложностей выводов. Традиционно считается, что минимальные тавтологии не могут выводиться сложнее результатов подстановок в них, т.е. должна быть некоторая «естественная монотонность» выводов. Однако оказалось, что многие «строгие» пропозициональные системы выводов двузначных и многозначных логик не монотонны ни по шагам, ни по длине выводов [1, 2]. Аналогичная немонотонность некоторых «слабых» систем выводов классической логики доказана в [3]. В настоящей работе исследованы соотношения между шагами выводов минимальных тавтологий и результатов подстановок в них для пропозициональных систем резолюций интуиционистской логики и логики Иоганссона. Доказано, что для каждой из указанных логик существует последовательность пар минимальных тавтологий φ_n и формул ψ_n, являющихся результатом подстановок в φ_n таких, что: 1) длины φ_n и ψ_n по порядку равны, 2) для каждого *n* количество шагов выводов ψ_n ограничено константой, а количество шагов выводов φ_n по порядку не менее экспоненты от длины формул. Далее в работе введено понятие строгой монотонности, предполагающее, что для каждой заданной в данной логике тавтологии существует такая минимальная тавтология, сложность вывода которой совпадает с наименьшим количеством шагов вывода заданной формулы, и доказано, что пропозициональные системы резолюций классической и двух вышеназванных неклассических логик строго монотонны. Доказано также, что исследованная в [3] немонотонная система обобщенных расщеплений также не строго монотонна.

2. Предварительные понятия. Для представления основных результатов напомним некоторые понятия и обозначения. Мы пользуемся общепринятыми понятиями единичного n-мерного булева куба E^n, пропозициональной формулы, тавтологии в данной логике.

Конкретный выбор языка для представления пропозициональной формулы, а значит, и системы доказательств, не имеет значения для наших рассмотрений, однако из технических соображений мы предполагаем, что он содержит пропозициональные переменные p_i $(i \geq 1)$ и (или) p_{i_j} $(i \geq 1,$ $j \geq 1)$, логические связки $\neg$, &, $\vee$, $\supset$ и пару скобок (,). Длина формулы φ, определяемая как количество всех вхождений в нее логических связок, обозначается через $|\varphi|$. Очевидно, что линейной функцией от $|\varphi|$ оценивается и полная длина формулы, понимаемая как количество всех символов.

2.1. Описания рассматриваемых систем. Известная пропозициональная система резолюций ***RC*** классической логики направлена на установление тавтологичности заданной формулы путем установления противоречивости некоторой системы дизъюнктов, строящейся по заданной формуле. Напомним предложенный Г.С. Цейтиным в [4] метод построения соответствующей системы дизъюнктов для произвольной формулы φ таким образом, чтобы длина этой системы не превышала $6|\varphi|$. Каждой подформуле даннной формулы ставится в соответствие своя переменная. Если одна из подформул является отрицанием другой, то им соответствуют сопряженные переменные. Если некоторая подформула A является конъюнкцией подформул B и C и этим подформулам приписаны соответственно переменные α, β, γ, то подформуле A приписывается система дизъюнктов $\bar{\alpha}\beta$, $\bar{\alpha}\gamma$, $\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}$: Аналогично приписываются системы дизъюнктов подформулам, являющимся дизъюнкцией или импликацией других подформул соответственно для дизъюнкции и $\alpha\beta$, $\alpha\bar{\gamma}$, $\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma$ для импликации. Объединяя все полученные дизъюнкты, добавляем туда еще дизъюнкт $\bar{\xi}$, где ξ – переменная, приписанная всей формуле.

Аксиомы системы ***RC*** не фиксируются. Для каждой формулы φ в качестве аксиом берутся дизъюнкты из построенной вышеописанным способом системы. **Правило классической резолюции** (р-правило) выводит дизъюнкт $D' \cup D''$ из дизъюнктов $D' \cup \{p\}$ и $D'' \cup \{\neg p\}$ для произвольной пропозициональной переменной p. Если применяя правило вывода к дизъюнктам построенной по φ системе, а также ко вновь полученным дизъюнктам, мы в конце концов получим пустой дизъюнкт Λ, то формула φ является тавтологией.

Описанная в [5] интуиционистская система резолюций ***RI*** является секвенциальной системой. Мы будем пользоваться общепринятыми понятиями цедента, антецедента, сукцедента, глубины формулы, собственной подформулы, элементарной подформулы.

Модифицируя описанный выше метод Цейтина сведения любой тавтологии к противоречивой системе формул глубины ≤ 2, каждой формуле сопоставляем секвенцию $D_1, \ldots, D_n \to p$, где каждая из D_i имеет один из видов

$$p \supset (q \vee r); \quad (p \supset q^*) \supset r; \quad p \supset (q \supset r^*); \quad p \supset q; \quad p^*, \qquad (1)$$

где p^* – или p или $\perp$.

Для каждой формулы D_i одного из видов (1) введем соответствующую секвенцию $\overline{D_\iota}$ вида $p \to q \vee r; \quad p \supset q^* \to r; \quad p, q \to r^*; \quad p \to q; \quad p^*.$

Следуя [5], опишем систему ***RI***.

Аксиомы системы:

$$p \to p, \perp \to \perp$$

Правила вывода:

$$(\supset_{1R}^-) \quad \frac{p \supset q \to r;\ \Sigma p\ -}{\Sigma \to r}, \qquad (\supset_{2R}^-) \quad \frac{p \supset q \to r;\ \Sigma p\ \to q}{\Sigma \to r}.$$

$$(\supset_{3R}^-) \quad \frac{p \supset q \to r;\ \Sigma\ \to\ q}{\Sigma \to r}, \qquad (\supset_{2R}^-) \quad \frac{p \supset \perp \to r;\ \sum p\ \to \perp}{\Sigma \to r},$$

$$(\vee_R^-) \quad \frac{p \to q\ \vee r;\ \Gamma\ \to\ q;\ \Sigma q \to\ s^*;\ \Pi r \to\ s^{**}}{\Gamma\Sigma\Pi \to r},$$

$$(C_{1R}) \quad \frac{pq \to r^*;\ \Gamma\ \to\ p;\ \Sigma\ \to\ q}{\Gamma\Sigma \to r^*}, \qquad (C_{2R}) \quad \frac{p \to q;\ \Gamma \to p}{\Gamma \to q},$$

$$(\perp_R) \quad \frac{\to \perp}{\to\ p},$$

где Γ, Σ, Π – цеденты, p,q,r – пропозициональные переменные. $\neg A$ вводится как $A \supset \perp$.

Система резолюции для логики Иоганссона ***(RJ)***, следуя [6], определяется по аналогии с системой ***RI***, при помощи удаления правил вывода $(\supset_{1R}^-)$ и $(\perp_R)$.

В [5] доказано, что для произвольной формулы φ, если s – переменная, которой заменена сама формула φ, в ***RI*** с использованием в качестве дополнительных аксиом построенные для φ и называемые дизъюнктами вышеописанные секвенции $\overline{D_\iota}$ выводима секвенция $\to\ s$, тогда и только тогда, когда секвенция $\to$ φ выводима в системе натурального вывода для интуиционистской логики высказываний, т.е. является интуиционистской тавтологией. Аналогично для системы ***RJ***.

Система обобщенных расщеплений ***OP*** для классической логики была введена в [7]. Обобщенный метод расщеплений (о.м.р.) позволяет каждой формуле φ сопоставить некоторое помеченное бинарное дерево расщепления (д.р.), корню которого приписана сама формула φ, конечным узлам приписаны значения 0 или 1, а сыновьям каждого узла v , которому приписана некоторая формула φ_v , приписаны результаты расщепления φ_v по некоторой переменной p, входящей в φ_v следующим образом: при расщеплении тавтологии φ по литералу α делаем пометку α на ребре, ведущем от узла с пометкой φ к узлу с пометкой $\varphi[\alpha]$, где формула $\varphi[\alpha]$ строится по φ следующим образом: если $\alpha = p (\alpha = \bar{p})$, то всюду в φ вместо переменной p подставляем значение $1(0)$ и применяем правила замещения или до получения формулы, не содержащей константы, или до получения константы. Естественно, что меняя порядок переменных, по которым производится расщепление, можно получать различные д.р. Очевидно также, что тавтологиям соответствуют деревья, конечным узлам которых приписаны только единицы. Соответствующая система, основанная на о.м.р. с одной аксиомой-тавтологией – 1 и одним правилом вывода $\varphi[p], \varphi[\bar{p}] \vdash \varphi$, обозначена через $\boldsymbol{OP}$.

2.2. Характеристики логических систем выводов. Мы здесь будем исследовать некоторые свойства логических систем на основе одной из сложностных характеристик выводов – *t*-сложности, определяемой как количество различных формул в выводе. Пусть ϕ является некоторой системой выводов фиксированной логики, а φ – некоторая тавтология данной логики. Через $\boldsymbol{t}^{\phi}(\varphi)$ обозначим минимально возможное значение *t*-сложности всевозможных выводов тавтологии φ в системе ϕ. Если система ϕ зафиксирована, то будем обозначать просто $\boldsymbol{t}(\varphi)$ **.**

Определение 2.2.1. Тавтология данной логики называется ***минимальной,*** если она не может быть получена подстановкой из более короткой тавтологии этой же логики.

Для произвольной минимальной тавтологии φ фиксированной логики обозначим через S(φ) множество всех тавтологий этой же логики, являющихся результатом подстановки в φ.

Определение 2.2.2. Система выводов ϕ называется ***t-монотонной***, если для каждой минимальной тавтологии φ и для каждой формулы ψ из S(φ) $\boldsymbol{t}^{\phi}(\varphi) \leq \boldsymbol{t}^{\phi}(\psi)$.

Определение 2.2.3. Система выводов ϕ называется ***t-строго монотонной,*** если для каждой не минимальной тавтологии ψ этой системы существует такая минимальная тавтология φ этой же системы, что ψ принадлежит S(φ) и $\boldsymbol{t}^{\phi}(\psi) = \boldsymbol{t}^{\phi}(\varphi)$.

3. Основные результаты. Теорема 1. *Системы **RI** и **RJ** не являются **t-монотонными.***

Доказательство аналогичного утверждения для системы ***RC*** в [3] было основано на рассмотрении последовательностей формул:

$\varphi_n = p \supset q \vee A_n$ и $\psi_n = p \supset (p \supset p) \vee A_n$ для $A_n = TTM_{n,2^n-1}$,

$$\text{где } TTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1,\dots,\sigma_n)\in E^n} \mathop{\&}_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} p_{i_j}^{\sigma_i} \quad (n \geq 1, 1 \leq m \leq 2^n - 1).$$

Нетрудно убедиться, что для каждого $n \geq 1$ формула φ_n является минимальной тавтологией и $\psi_n \in S(\varphi_n)$. Учитывая, что произвольная формула A выводима в ***RC*** тогда и только тогда, когда формула $\neg\neg A$ выводима в ***RI,*** что в свою очередь равнозначно выводимости формулы $(A \supset\perp) \supset\perp$ в ***RJ,*** мы можем использовать для доказательства теоремы 1 интуиционистские и иоганссоновские «образы» формул φ_n и ψ_n , которые обозначим через $I\varphi_n$, $I\psi_n$ и $J\varphi_n$, $J\psi_n$ соответственно. Используя одинаковость множества основных аксиом (цейтинских дизъюнктов и соответствующих им секвенций) для всех трех систем, по аналогии с доказательствами из [3] получим:

$$\boldsymbol{t}\,(I\varphi_n) = \Omega(2^{2^n}), \text{ а } \boldsymbol{t}\,(I\psi_n) = O(\mathbf{1}),$$

$$\boldsymbol{t}\,(J\varphi_n) = \Omega(2^{2^n}), \text{ а } \boldsymbol{t}\,(J\psi_n) = O(\mathbf{1}).$$

Теорема 2. *Системы **RC, RI** и **RJ** являются **t-строго монотонными**.*

Доказательство для всех трех систем основано на следующем методе построения соответствующих минимальных тавтологий для заданной не минимальной тавтологии. Сначала, согласно первоначальному шагу Цейтина, каждой подформуле данной формулы ставится в соответствие своя переменная, далее если при построении минимальной тавтологии нужно некие подформулы заданной формулы заменить на переменные, то в качестве таковых берем именно те переменные, которые уже приписаны этим подформулам. При таком выборе переменных система дизъюнктов для каждой построенной минимальной тавтологии будет противоречивой подсистемой системы дизъюнктов первоначальной формулы. Доказательство теоремы 2 обосновано выбором той из всевозможных построенных минимальных тавтологий, которая имеет наименьшее количество шагов выводов.

Теорема 3. Не ***t****-монотонная система* ***OP*** *также не* ***t-строго монотонна****.*

Доказательство очевидным образом следует из того факта, что заменив все переменные заданной тавтологии на одну и ту же переменную, получим тавтологию, которая может и не является минимальной, однако имеет всего 2 различные формулы в выводе (дереве расщепления): саму формулу, зависящую от одной переменной, и приписанную после расщепления единицу. Завершается доказательство очевидным фактом существования минимальной тавтологии, количество шагов расщепления которой больше 2 (см. напр. [3]).

Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 18T-1B034.

Ереванский государственный университет
e-mails: grishazohrabyan@gmail.com, sayadyan@gmail.com, achubaryan@ysu.am

Г. М. Зограбян, С. М. Саядян, А. А. Чубарян

Исследование свойства монотонности некоторых пропозициональных систем выводов классической и неклассических логик

Для некоторых пропозициональных систем выводов классической и неклассических логик доказано, что минимальные тавтологии данной логики могут выводиться гораздо сложнее, чем результаты подстановок в них, однако для каждой заданной в данной логике тавтологии существует такая минимальная тавтология, сложность вывода которой совпадает с наименьшим количеством шагов вывода заданной формулы.

Գ. Մ. Զոհրաբյան, Ս. Մ. Սայադյան, Ա. Ա. Չուբարյան

Դասական և ոչ դասական տրամաբանությունների ասույթային հաշվի որոշ համակարգերի մոնոտոնության հատկության հետազոտում

Դասական և ոչ դասական տրամաբանությունների ասույթային հաշվի որոշ համակարգերի համար ապացուցված է, որ մինիմալ նույնաբանությունները կարող են արտածվել էապես ավելի բարդ, քան նրանցից ստացված տեղադրման արդյունքները, սակայն տվյալ տրամաբանության յուրաքանչյուր նույնաբանության համար գոյություն ունի այնպիսի մինիմալ նույնաբանություն, որի արտածման բարդությունը համընկնում է տրված բանաձևի արտածման նվազագույն քայլերի հետ:

G. M. Zohrabyan, S. M. Sayadyan, A. A. Chubaryan

Investigation of Monotonous Property for Some Propositional Proof Systems of Classical and Non-Classical Logics

For some propositional proof systems of classical and non-classical logics it is proved that minimal tautologies can be deduced essentially harder, than results of substitutions in them, but for every tautology of given logic there is some minimal tautology such that its proof complexity is equal to minimal steps in proof of given tautology.

Литература

1. *Chubaryan A., Petrosyan G.* – Evolutio, Естественные науки. 2016. Вып 3. С. 12-14.
2. *Chubaryan A., Khamisyan A., Petrosyan G.* – On some systems for two versions of many-valued logics and its properties, Lambert Academic Publishing (LAP). 2017. 80 p.
3. *Саядян С.М., Чубарян А.А.* – ДНАН РА. 2018. Т. 118. № 1. С. 20-25.
4. Цейтин Г.С. – Зап. научн. семинаров ЛОМИ. Л. Наука. 1968. Т. 8. С. 234-259.
5. *Минц Г.Е.* – Семиотика и информатика. 1985. Вып. 25. С. 120-135.
6. *Чубарян Ан.А., Чубарян Арм.А.* – НАУ, Отечественная наука в эпоху изменений: постулаты прошлого и теории нового времени. 2015. Ч. 10, 2(7). С. 11-14.