ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1(173), 1990 Естественные науки

Физика

УДК 52:530.12:531.51

Г. Г. АРУТЮНЯН, В. В. ПАПОЯН

НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Получено точное решение уравнений эйнштейновской теории гравитации для несжимаемой жидкости в однородных координатах.

Интегральные параметры нейтронных звезд в основном определяются их сверхплотным ядром, состояние которого достаточно хорошо описывается моделью несжимаемой жидкости. Поэтому изучению реалистических нейтронных звезд обычно предшествует рассмотрение таких моделей, вещество которых является несжимаемой жидкостью, что интересно как с точки зрения выяснения общих закономерностей, характерных для нейтронных звезд, так и выбора подходящих координат для их изучения.

Решения уравнений Эйнштейна внутри сферически-симметричных и статических конфигураций из несжимаемой жидкости в координатах кривизны известны давно и хорошо изучены (см., напр. [1, 2]). В настоящей работе, носящей технический характер, найдено точное решение аналогичной задачи в однородных координатах, что позволяет, во-первых, исправить содержащуюся в [3] ошибку и, во-вторых, демонстрирует отсутствие каких-либо трудностей при сшивке внутреннего и внешнего решений.

1. **Несжимаемая жидкость в координатах кривизны.** В координатах кривизны ($x^0=ct$, $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$) метрическая форма имеет вид

$$dS^2=e^{2\nu}c^2dt^2-e^{2\lambda}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (1.1)$$

Подстановка (1.1) в полевые уравнения Эйнштейна дает

$$e^{-2\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2\lambda_1}{r}\right)-\frac{1}{r^2}=-\varkappa_0\varepsilon_0, \qquad (1.2)$$

$$e^{-2\lambda}\left(\frac{2\nu_1}{r}+1/r^2\right)-\frac{1}{r^2}=\varkappa_0 P, \qquad (1.3)$$

$$e^{-2\lambda}\left[\nu_{11}+(\nu_1-\lambda_1)\left(\nu_1+\frac{1}{r}\right)\right]=\varkappa_0 P, \qquad (1.4)$$

$$\nu_1=-P_1/(P+\varepsilon_0),\ \varkappa_0=\frac{8\pi G}{c^4}, \qquad (1.5)$$

где индекс 1 означает дифференцирование по r, ε_0—плотность энергии, P—давление вещества.

Для несжимаемой жидкости ε_0=const уравнение гидростатического равновесия (1.5) интегрируется и дает

$$e^{\nu}=\frac{e^{\nu_s}}{1+q}, \quad q=P/\varepsilon_0. \tag{1.6}$$

Здесь и далее индексом «s» снабжаются величины на поверхности конфигурации. Интегрирование (1.2) приводит к

$$e^{-2\lambda}=1-\frac{r^2}{a^2}, \quad a^2=\frac{3c^4}{8\pi G\varepsilon_0}. \tag{1.7}$$

Подставив далее (1.7) и (1.5) в (1.3), получим уравнение

$$\frac{4dq}{(1+3q)(1+q)}=\frac{d(3-r^2/a^2)}{3-r^2/a^2}, \tag{1.8}$$

решение которого с учетом условия $q(r_s)=0$ на границе $r=r_s$ имеет вид

$$q=\frac{f(r)-1}{3-f(r)}. \tag{1.9}$$

Введена функция

$$f(r)=e^{-\nu_s}\sqrt{1-r^2/a^2} \quad f(r_s)=1. \tag{1.10}$$

Причем

$$f(0)=e^{-\nu_s}=\sqrt{1-r_g/r_s}\,, \tag{1.11}$$

$$r_g=\frac{2Gm}{c^2}=\frac{2G}{c^2}\,\frac{4\pi\varepsilon_0}{3c^2}r_s^3.$$

Нетрудно найти, что

$$r_s=\frac{(1+3q_c)^2}{4q_c(1+2q_c)}r_g=\frac{2a\sqrt{q_c(1+2q_c)}}{1+3q_c}. \tag{1.12}$$

Итак, для несжимаемой жидкости в координатах кривизны в области $r\leqslant r_s$ имеем

$$dS^2=\frac{e^{2\nu_s}}{4}(3-f)^2c^2dt^2-\frac{e^{-2\nu_s}}{f^2}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{1.13}$$

Вне распределения вещества ($r\geqslant r_s$), как и должно быть, (1.13) переходит в известное шварцшильдовское решение. Весьма уместно привести здесь обнаруженную нами форму записи электровакуумного решения уравнений Эйнштейна:

$$dS^2=\frac{(x^2-4r_0^2)}{(x+m)^2}dt^2-\frac{(x+m)^2}{x^2-4r_0^2}\cdot dx^2-(x+m)^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1.14}$$

$$2r_0=\sqrt{m^2-e^2}$$

В этой универсальной записи, содержащей как решение Шварцшильда, так и решение Райснера-Нордстрёма (e—заряд источника поля), переход к координатам кривизны r, однородным—R, вейловским каноническим—ρ, z, сфероидальным—U, V осуществляется согласно

$$x = r - m = R(1 + r_0^2/R^2) = \frac{1}{2}(r_+ + r_-) = 2r_0U,$$

$$V = \cos\theta, \quad r_\pm^2 = (z \pm 2r_0)^2 + \rho^2. \tag{1.15}$$

II. **Несжимаемая жидкость в однородных координатах.** В однородных координатах ($x^0 = ct$, $x^1 = R$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$) метрическая форма записывается в виде

$$dS^2 = e^{2\alpha}c^2dt^2 - e^{2\beta}[dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \tag{II.1}$$

а уравнения задачи—

$$2\beta'' + (\beta')^2 + \frac{4\beta'}{R} = -\frac{3e^{2\beta}}{a^2}, \tag{II.2}$$

$$(\beta')^2 + 2\alpha'\beta' + \frac{2(\alpha' + \beta')}{R} = \frac{3qe^{2\beta}}{a^2}, \tag{II.3}$$

$$\alpha'' + \beta'' + (\alpha')^2 + \frac{\alpha' + \beta'}{R} = \frac{3qe^{2\beta}}{a^2}, \tag{II.4}$$

$$\alpha' = -\frac{q'}{(1+q)} \tag{II.5}$$

(здесь штрих означает дифференцирование по R). Интегрирование уравнения гидростатики дает

$$e^{\alpha} = \frac{e^{\alpha_c}}{1+q}. \tag{II.6}$$

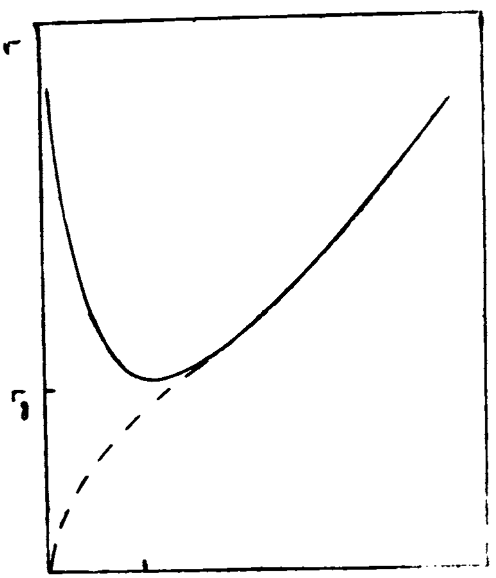
Прежде чем перейти к решению остальных уравнений, целесообразно выяснить поведение метрических коэффициентов вблизи центра звезды, а также найти значение радиальной однородной координаты R, соответствующей центру конфигурации ($r = 0$ в координатах кривизны). Сравнивая для этого выражения метрических форм (1.1) и (II.1), найдем

$$e^{\lambda(r)}\frac{dr}{r} = \frac{dR}{R}, \quad r = Re^{\beta}. \tag{II.7}$$

Вакуумные решения приводят к известной связи

$$r = R(1 + r_g/4R)^2, \tag{II.8}$$

представленной на рисунке. Минимум кривой соответствует точке (r_g, $r_g/4$). Зависимость $r = r(R)$ внутри распределения вещества



Зависимость радикальной координаты кривизны r от однородной координаты R. Сплошная кривая изображает связь в вакууме, а пунктирная—внутри распределения вещества.

изображена пунктиром и приводится в дальнейшем. Теперь же найдем связь r и R вблизи центра звезды. Согласно (1.7) $e^{-2\lambda(r)}=1-\frac{r^2}{a^2}$, так что $e^{-2\lambda(0)}=1$. Тогда

$$R=R_0\exp\int\limits_0^r\frac{e^{\lambda(r)}}{r}dr, \tag{II.9}$$

т. е. вблизи центра

$$R=Ar. \tag{II.10}$$

Таким образом, точке $r=0$ соответствует $R=0$ и, кроме того, из (11.7) следует

$$e^{\beta}|_{r\to0}=\frac{r}{R}=A=\text{const},\ \beta'|_{r\to0}\to0. \tag{II.11}$$

Возвратимся к интегрированию системы уравнений (11.2)—(11.5). Для новой функции $V(t)$, введенной так, чтобы

$$e^{\beta}=\frac{2a}{\sqrt{3}R}V^2(t),\quad t=\ln R, \tag{II.12}$$

вместо (II.2) получим уравнение

$$V_{tt}+V^5-\frac{1}{4}V=0, \tag{II.13}$$

первый интеграл которого

$$V_t=\sqrt{\frac{V^2}{4}-\frac{V^6}{3}+C}\,.$$

Условия (II.11) гуют следующее поведение функции $V(t=\ln R)$:

$$V_t|_{R\to0}\to\frac{V}{2},\quad V_{\to0}\sim\sqrt{R}.$$

Поэтому нес ходимо выбрать $C=0$. Тогда

$$e^{2\beta}=\frac{4a^2D^2}{D^2+R^2},\quad D=\text{const}. \tag{II.14}$$

Подставив далее (II.6) и (II.14) в (II.4) и учитывая, что на границе $R=R_s$, $q(R_s)=0$, а в центре $R=0$, $q(0)=q_c$, найдем

$$D^2=\frac{1+2q_c}{q_c}\cdot R_s^2. \tag{II.15}$$

Исключим затем β из разности (II.4) и (II.8) и введем $U=\frac{1}{\alpha'}$, что приводит к простому уравнению

$$U'-U\cdot\frac{(3R^2-D^2)}{R(R^2+D^2)}=1,$$

интегрируя которое, получаем

$$e^{\nu}=e^{\alpha c}\frac{D^2}{(D^2+R^2)}\cdot\left[1+\frac{2BR^2}{2BD^2-1}\right], \tag{II.16}$$

где B—новая константа.

Здесь уместно привести также систему уравнения, эквивалентную исходной системе (II.2)—(II.5):

$$\alpha'=\frac{\chi_0 m}{R^2}e^{-(\alpha+\beta)},$$

$$\beta'=-\frac{\chi_0 z}{R^2}e^{-(\alpha+\beta)},$$

$$m'=\frac{\varepsilon_0}{2}R^2e^{\alpha+3\beta}(1+3q), \tag{II.17}$$

$$z'=\frac{m-z}{R}+\frac{\varepsilon_0}{2}R^2e^{\alpha+3\beta}(1-q),$$

$$\alpha'=-q'/(1+q).$$

Нетрудно убедиться, что (II.6), (II.14), (II.16) являются решениями и этой системы уравнений. Сшивка найденных решений с внешними позволяет получить значение всех неопределенных констант интегрирования. Окончательно решение сферически-симметричных статических уравнений Эйнштейна для несжимаемой жидкости в однородных координатах имеет вид

$$dS^2=\left(\frac{1}{1+3q_c}+\frac{R^2}{R^2+D^2}\right)^2c^2dt^2-\frac{4a^2D^2}{(R^2+D^2)^2}[dR^2+$$

$$+R^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)],$$

$$q=(q_cD^2-(1+2q_c)R^2)/(D^2+(2+3q_c)R^2). \tag{II.18}$$

$$D=R_s\sqrt{(1+2q_c)/q_c}=2a\left(\frac{1+2q_c}{1+3q_c}\right)^2,$$

$$R_s=(1+2q_c)r_g/4\,q_c.$$

Радиальные координаты кривизны r и однородная R связаны соотношением

$$r=\frac{2aDR}{R^2+D^2},\qquad R=\frac{Da}{r}(1-\sqrt{1-r^2/a^2}) \tag{II.19}$$

Авторы признательны участникам семинара кафедры теоретической физики ЕГУ за обсуждения.

Кафедра теоретической физики *Поступила 20.03.1989*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Толмен Р.** Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974.

2. **Крамер Д., Штефани Х. и др.** Точные решения уравнений Эйнштейна, М.: Энергоиздат, 1982.
3. **Мёллер К.** Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975.

Ամփոփում

Ստացված է էյնշտեյնի ձգողականության տեսության հավասարումների ճշգրիտ լուծումը անսեղմելի հեղուկին համապատասխանող նյութի վիճակի համար։ Լուծումը ներկայացված է համասեռ կոորդինատներով։

SUMMARY

The exact solution of the GR's field equations for incompressible fluid in homogeneous coordinates is found.