



ՀԱՅ-ՌՈՒՍԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

# Լ Ր Ա Բ Ե Ր

ՀԱՅ-ՌՈՒՍԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ

ՍԵՐԻԱ

ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ  
ԵՎ ԲՆԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

№ 1

ՀՌՀ Հրատարակչություն

Երևան 2018

**РОССИЙСКО-АРМЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**В Е С Т Н И К**  
**РОССИЙСКО-АРМЯНСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА**

**СЕРИЯ:**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ**  
**И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

**№ 1**

Издательство РАУ

Ереван 2018

Печатается по решению Ученого совета РАУ

Вестник РАУ, № 1. – Ер.: Изд-во РАУ, 2018. – 80 с.

Редакционная коллегия:

Главный редактор	<i>Амбарцумян С.А.</i>
Зам. главного редактора	<i>Аветисян П.С.</i>
Ответственный секретарь	<i>Шагинян Р.С.</i>

Члены редколлегии:

*Р.Г. Арамян, д. ф.-м.н., проф.; А.А. Аракелян, к.б.н., и.о. доцента; Д.Г. Асатрян, д.т.н., проф.; О.В. Бесов, член-кор. РАН, д.ф.-м.н., проф.; В.И. Буренков, д.ф.-м.н., проф.; Г.Г. Данагулян, член-кор. НАН РА, д.х.н., проф.; И.Д. Заславский, член-кор. НАН РА, д.ф.-м.н., проф.; Г.Г. Казарян, д.ф.-м.н., проф.; Э.М. Казарян, академик НАН РА, д.ф.-м.н., проф.; Г.А. Карапетян, д.ф.-м.н., проф.; Б.И. Коноплев, д.с.х. н., проф.; Г.Б. Маранджян, член-кор. НАН РА, д.ф.-м.н., проф.; В.И. Муронец, д.б.н., проф.; А.А. Оганесян, к.б.н., доцент; А.О. Меликян, член-корр. НАН РА, д.ф.-м.н., проф.; Б.С. Нагапетян, член-кор. НАН РА, д.ф.-м.н., проф.; А.В. Папоян, член-кор. НАН РА, д.ф.-м.н., проф.; С.Г. Петросян, член-кор. НАН РА, д.ф.-м.н., проф.; А.А. Саркисян, д.ф.-м.н., проф.; Г.З. Саркисян, к.ф.-м.н.; А.М. Сергеев, академик РАН, д.ф.-м.н., проф.*

Журнал входит в перечень периодических изданий,  
зарегистрированных ВАК РА и в базу данных РИНЦ

Российско-Армянский университет, 2018 г.

ISBN 1829-0450

© Издательство РАУ, 2018

# МАТЕМАТИКА

УДК 510.64

## ON SOME PROPERTIES OF SEVERAL PROOF SYSTEMS FOR NON CLASSICAL PROPOSITIONAL LOGICS

*A. Chubaryan<sup>1</sup>, A. Karabakhtsyan<sup>2</sup>, G. Petrosyan<sup>3</sup>*

*<sup>1</sup>Yerevan State University, Russian-Armenian University*

*<sup>2</sup>Russian-Armenian University*

*<sup>3</sup>Yerevan State University*

*achubaryan@ysu.am, arman.karabakhtsyan@gmail.com,*

*garik.petrosyan.1@gmail.com*

### ABSTRACT

In this work we investigate 1) the relations between the proofs complexities of strongly equal tautologies and 2) the relations between the proofs complexities of minimal tautologies and of results of substitutions in them for some sequent propositional systems of intuitionistic, Johansson's and monotone logics. We show that 1) strongly equal tautologies can have essential different proof complexities in the same system and 2) the result of substitution can be proved easier, than corresponding minimal tautology, therefore the systems, which are considered in this paper, are no monotonous neither by lines nor by size.

**Keywords:** strongly equal tautologies, minimal tautology, sequent proof systems, proof complexity measures, monotonous system.

1. **Introduction.** The traditional assumption that all tautologies as Boolean functions are equal to each other is not fine-grained enough to support a sharp distinction among tautologies. The authors of [1] have provided a different picture of equality for classical tautologies. They have introduced in [2] the notion of “determinative conjunct”, on the basis of which the notion of strong equality of classical tautologies was suggested in [1]. The idea to revise the notion of equivalence between tautologies in such way that it takes into account an appropriate measure of their “complexity”.

The relations between the proof complexities of strongly equal classical tautologies in some proof systems are investigated in [3-5]. It was proved that the strongly equal tautologies have the same proof complexities in some “weak” proof systems, but the measures of proof complexities for strongly equal tautologies can be essentially different in the most traditional proof systems of Classical Logic (Frege systems, substitution Frege systems, sequent systems with and without cut rule). In this work we introduce the notions of strongly equal non-classical tautologies and show that the proof complexities of strongly equal non-classical tautologies can be also essentially different in some sequent propositional systems of intuitionistic, Johansson’s and monotone logics.

The second theme of our investigation is connected with relation between the proof complexities of minimal tautologies, i.e. tautologies, which are not a substitution of a shorter tautology, and results of a substitution in them. There is traditional assumption that minimal tautology must be no harder than any substitution in it. We introduce for the propositional proof systems the notions of monotonous by lines and monotonous by sizes of proofs. In [6,7] it is proved that many traditional classical proof systems of 2-valued and many-valued logics are no

monotonous neither by lines nor by size. Here we prove the analogous result for some systems of non-classical propositional logic as well.

**2. Preliminaries.** We will use the current concepts of a propositional formula, a classical tautology and non-classical tautologies, sequent, sequent systems for non-classical propositional logic [8] and proof complexity [9]. Let us recall some of them.

### 2.1. The considered sequent systems.

Sequent system uses the denotation of sequent  $\Gamma \rightarrow \Delta$  where  $\Gamma$  (antecedent) and  $\Delta$  (succedent) are finite (may be empty) sequences of propositional formulas.

For every formula  $C$  and for any sequence of formulas  $\Gamma$  the axiom scheme of propositional intuitionistic (**PI**) system is  $C, \Gamma \rightarrow C$ . For every formulas  $A, B$ , for any sequence of formulas  $\Gamma$  and sequence  $\Delta$ , which is empty or consists of one formula, the logic rules are.

$$\begin{aligned} \supset \rightarrow & \frac{A \supset B, \Gamma \rightarrow A \text{ and } B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Delta} \rightarrow \supset \frac{A, \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B} \\ \vee \rightarrow & \frac{A, A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta \text{ and } B, A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \rightarrow \Delta} \rightarrow \vee \frac{\Gamma \rightarrow A \text{ or } \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \\ \wedge \rightarrow & \frac{A, A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Delta \text{ or } B, A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Delta} \rightarrow \wedge \frac{\Gamma \rightarrow A \text{ and } \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \wedge B} \\ \neg \rightarrow & \frac{\neg A, \Gamma \rightarrow A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Delta} \rightarrow \neg \frac{A, \Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \neg A} \end{aligned}$$

For propositional Johansson's (minimal) system (**PM**) axiom scheme and inference rules are the same, but  $\Delta$  must be empty [9]. Note that the order of formula occurrences in antecedents (succedents) are immaterial in above systems.

The propositional monotone system (**PMon**), where only monotonous logical functions are used for construction of formulas, we define follow [10].

The axioms of **PMon** system are  $A \rightarrow A, \perp \rightarrow \Gamma, \Gamma \rightarrow T$ ,

where  $A$  is any formula,  $\Gamma$  is sequence of formulas, by  $\perp$  and  $\top$  are denoted “false” and “truth” accordingly

For every formulas  $A, B$  and for any sequence of formulas  $\Gamma, \Gamma', \Delta$  and  $\Delta'$  the inference rules are.

$$\begin{aligned}
 (L_1) \frac{\Gamma, A, A, \Delta \rightarrow \Gamma'}{\Gamma, A, \Delta \rightarrow \Gamma'} \quad (L_2) \frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow \Gamma'}{\Gamma, B, A, \Delta \rightarrow \Gamma'} \quad (L_3) \frac{\Gamma \rightarrow \Gamma'}{\Gamma, A \rightarrow \Gamma'} \quad (L_4) \frac{A, B, \Gamma \rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \rightarrow \Delta}, \\
 (L_5) \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta \text{ and } B, \Gamma' \rightarrow \Delta'}{A \vee B, \Gamma, \Gamma' \rightarrow \Delta, \Delta'} \\
 (R_1) \frac{\Gamma' \rightarrow \Gamma, A, A, \Delta}{\Gamma' \rightarrow \Gamma, A, \Delta} \quad (R_2) \frac{\Gamma' \rightarrow \Gamma, A, B, \Delta}{\Gamma' \rightarrow \Gamma, B, A, \Delta} \quad (R_3) \frac{\Gamma' \rightarrow \Gamma}{\Gamma' \rightarrow \Gamma, A} \quad (R_4) \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \vee B} \\
 (R_5) \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \text{ and } \Gamma' \rightarrow \Delta', B}{\Gamma, \Gamma' \rightarrow \Delta, \Delta', A \wedge B}
 \end{aligned}$$

To all above systems can be added cut-rule of inference  $\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A, A, \Gamma' \rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \rightarrow \Delta, \Delta'}$ .

We use the well known notion of proof in all above systems.

Any sequent  $\Gamma \rightarrow \Delta$  is called I-valid sequent (M-valid sequent, Mon-valid sequent) if it is deduced in the system **PI (PM, PMon)**. Any formula  $A$  is called I-tautology or M-tautology if sequent  $\rightarrow A$  is deduced in the corresponding system **PI** or **PM**. Any formula  $A \supset B$  is called Mon-tautology if sequent  $A \rightarrow B$  is deduced in the system **PMon**.

Let  $\Gamma \rightarrow \Delta$  be some sequent, where  $\Gamma$  is a sequence of formulas  $A_1, A_2, \dots, A_l$  ( $l \geq 0$ ) and  $\Delta$  is a sequence of formulas  $B_1, B_2, \dots, B_m$  ( $m \geq 0$ ). The formula form of sequent (f.f.s.)  $\Gamma \rightarrow \Delta$  is the formula  $\varphi_{\Gamma \rightarrow \Delta}$ , which is defined usually as follows:

- 1)  $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_l \supset B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m$ ,  $l, m \geq 1$ ,
- 2)  $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_l \supset \perp$  for  $l \geq 1$ ,  $m = 0$ ,
- 3)  $B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_m$  for  $l = 0$  and  $m \geq 1$ .

It is well-known that  $\Gamma \rightarrow \Delta$  is *classical (intuitionistic, Johansson's, monotone) valid sequent iff its f.f.s. is classical (intuitionistic, Johansson's, monotone) tautology*.



For every inference rule  $\frac{D}{E} \left( \frac{D \text{ and } D'}{E} \right)$  we call ***inference formula form (i.f.f.)*** the formula  $f.f.s.D \supset f.f.s.E$  ( $f.f.s.D \supset (f.f.s.D' \supset f.f.s.E)$ ).

Sometimes we'll use term *tautology (valid sequent)* for all types of above mentioned tautology (valid sequent) further.

## 2.2. Some properties of tautologies (valid sequents).

### 2.2.1. Determinative disjunctive normal forms

Following the usual terminology we call the variables and negated variables literals for classical logic. The conjunct K (clause) can be represented simply as a set of literals (no conjunct contains a variable and its negation simultaneously).

In [1,2] the following notions were introduced for classical logic. Each of the under-mentioned trivial identities for a propositional formula  $\psi$  is called *replacement-rule*:

$$\begin{aligned} 0 \&\psi = 0, \psi \&0 = 0, 1 \&\psi = \psi, \psi \&1 = \psi, 0 \vee \psi = \psi, \psi \vee 0 = \psi, \\ 1 \vee \psi &= 1, \psi \vee 1 = 1, \\ 0 \supset \psi &= 1, \psi \supset 0 = \neg\psi, 1 \supset \psi = \psi, \psi \supset 1 = 1, \neg 0 = 1, \\ \neg 1 &= 0, \neg\neg\psi = \psi. \end{aligned}$$

Application of a replacement-rule to some word consists in the replacing of some its subwords, having the form of the left-hand side of one of the above identities, by the corresponding right-hand side.

Let  $\varphi$  be a propositional formula,  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  be the set of all variables of  $\varphi$ , and  $P' = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}\}$  ( $1 \leq m \leq n$ ) be some subset of  $P$ .

**Definition 2.2.1.1.** Given  $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\} \subset E^m$ , the conjunct  $K^\sigma = \{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \dots, p_{i_m}^{\sigma_m}\}$  is called  $\varphi - 1 -$  determinative ( $\varphi - 0 -$  determinative) if assigning  $\sigma_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) to each  $p_{ij}$  and successively using replacement-rules we obtain the value of  $\varphi$  (1 or 0) independently of the values of the remaining variables.

**Definition 2.2.1.2.** DNF  $D = \{K_1, K_2, \dots, K_j\}$  is called determinative DNF (DDNF) for  $\varphi$  if  $\varphi = D$  and every conjunct  $K_i (1 \leq i \leq j)$  is 1-determinative for  $\varphi$ .

**Definition 2.2.1.3.** DNF  $D = \{K_1, K_2, \dots, K_j\}$  is called determinative DNF (dDNF) for  $\varphi$  if  $\varphi = D$  and every conjunct  $K_i (1 \leq i \leq j)$  is 1-determinative for  $\varphi$ .

Some arguments for the following definition were given in [1].

*The classical tautologies  $\varphi$  and  $\psi$  are strongly equal if every determinative conjunct for  $\varphi$  is determinative conjunct for  $\psi$  and vice versa.*

It is not difficult to see, that dDNF for classical tautology can be constructed directly. As the non-classical validity is determined by derivability in some accordingly propositional proof system, the above definition of dDNF for non-classical tautologies is not applicable. In [2] some algorithm for construction of dDNF for classical tautologies on the base of their resolution refutations was given. The analogies of dDNF for intuitionistic and Johansson's tautologies ( $\varphi$  – I-determinative DNF and  $\varphi$  – M-determinative DNF accordingly) were constructed on the base of proofs in intuitionistic and minimal resolution systems [11], where were showed, in particularly, that ***only variables with one or double negations are the literals in I-determinative conjuncts and  $p \supset \perp$  and  $(p \supset \perp) \supset \perp$  type formulas are literals in M-determinative conjuncts.*** The Mon-determinative DNF for every Mon-tautology  $A \supset B$  can be constructed by analogy on the base of some ***PMon***-proof of sequent  $A \rightarrow B$ . As literals for *monotone* logic can be  $p^+$  and  $p^-$ , depending of positive or negative occurrence of variable  $p$  in the axioms of ***PMon***-proof of sequent  $A \rightarrow B$ .

**Definition 2.2.1.4.** DNF is called dDNF for a valid sequent if it is dDNF for its f.f.s..

**Main definition 1.** *The classical (intuitionistic, Johansson's) tautologies  $\varphi$  and  $\psi$  are strongly equal if every dDNF (I-dDNF, M-dDNF) for  $\varphi$  is dDNF (I-dDNF, M-dDNF) for  $\psi$  and vice versa. The classical*

(intuitionistic, Johansson's, monotone) valid sequents  $\Gamma \rightarrow \Delta$  and  $\Gamma' \rightarrow \Delta'$  are strongly equal if every dDNF (I-dDNF, M-dDNF, Mon-dDNF) for  $\Gamma \rightarrow \Delta$  is dDNF (I-dDNF, M-dDNF, Mon-dDNF) for  $\Gamma' \rightarrow \Delta'$  and vice versa.

### 2.3. Essential subformulas of tautologies (valid sequents)

We generalize for non-classical tautologies the notion of *essential subformulas*, introduced in [12].

Let  $F$  be some formula and  $Sf(F)$  be the set of all non-elementary subformulas of formula  $F$ . For every formula  $F$ , for every  $\varphi \in Sf(F)$  and for every variable  $p$  by  $F_\varphi^p$  is denoted the result of the replacement of the subformulas  $\varphi$  everywhere in  $F$  by the variable  $p$ . If  $\varphi \notin Sf(F)$ , then  $F_\varphi^p$  is  $F$ .

We denote by  $Var(F)$  the set of all variables in  $F$ .

**Definition 2.3.1.** Let  $p$  be some variable that  $p \notin Var(F)$  and  $\varphi \in Sf(F)$  for some classical tautology (I-tautology, M-tautology, Mon-tautology)  $F$ . We say that  $\varphi$  is an *essential subformula* in  $F$  iff  $F_\varphi^p$  is *not classical* tautology.

The set of essential subformulas in tautology  $F$  we denote by  $Essf(F)$ , the number of essential subformulas – by  $Nessf(F)$  and the sum of sizes of all essential subformulas by  $Sessf(F)$ .

**Definition 2.3.2.** A tautology is called *minimal* if it is not a substitution of a shorter tautology.

**Definition 2.3.3.** Sequent  $\Gamma \rightarrow \Delta$  is called **minimal valid** if its formula form  $\varphi_{\Gamma \rightarrow \Delta}$  is minimal tautology.

We denote by  $S(\varphi)$  the set of all formulas, every of which is result of some substitution in a minimal tautology  $\varphi$ .

If  $F$  is minimal tautology, then  $Essf(F) = Sf(F)$ .

**Definition 2.3.3.** The subformula  $\varphi$  is essential for valid sequent  $\Gamma \rightarrow \Delta$  if it is essential for its formula form.

**Proposition 2.3.** Let  $\mathcal{F}$  be some of above proof system (with and without cut rule),  $F$  be a valid sequent and  $\varphi \in \text{Essf}(F)$ , then a) in every  $\mathcal{F}$ -proof of  $F$  subformula  $\varphi$  must be essential either at least in some axiom, used in proof or in i.f.f. for some used in proof inference rule, b) there is some constant  $c$  such that the number of essential subformulas for every axiom of  $\mathcal{F}$  and of i.f.f. for every inference rule of  $\mathcal{F}$  is no more, than  $c$ .

Both statements of this Proposition can be proved by immediate examination every of axioms and inference rules in each of above systems. The analogous statements for traditional proof systems of classical systems are proved in [12].

### 2.4. Proof complexity measures

By  $|\varphi|$  we denote the size of a formula  $\varphi$ , defined as the number of all logical signs in it. It is obvious that the full size of a formula, which is understood to be the number of all symbols is bounded by some linear function in  $|\varphi|$ .

In the theory of proof complexity two main characteristics of the proof are: ***t-complexity*** (length), defined as the number of proof steps, ***l-complexity*** (size), defined as sum of sizes for all formulas in proof [13].

Let  $\Phi$  be a proof system and  $\Gamma \rightarrow \Delta$  be a valid sequent. We denote by  $t_{\Gamma \rightarrow \Delta}^{\Phi}$  ( $l_{\Gamma \rightarrow \Delta}^{\Phi}$ ) the minimal possible value of *t-complexity* (*l-complexity*) for all  $\Phi$ -proofs of  $\Gamma \rightarrow \Delta$ .

**Main Definition 2.** *Sequent proof system  $\Phi$  is called t-monotonous (l-monotonous) if for every valid sequent  $\Gamma \rightarrow \Delta$  and for every sequent  $\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1$  such that  $\varphi_{\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1} \in S(\varphi_{\Gamma \rightarrow \Delta})$   $t_{\Gamma \rightarrow \Delta}^{\Phi} \leq t_{\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1}^{\Phi}$  ( $l_{\Gamma \rightarrow \Delta}^{\Phi} \leq l_{\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1}^{\Phi}$ ).*

## 3. Main Results

**3.1. Auxiliary statements.** Before we prove the main theorems, at first we must give some easy proved auxiliary statements. Let us consider the following sequences of sequents:

$$\begin{aligned}
D_n &= p \rightarrow \overbrace{p \vee (p \vee (p \vee \dots \vee (p \vee p) \dots))}^n, \\
E_n &= p \rightarrow \overbrace{p \wedge (p \wedge (p \wedge \dots \wedge (p \wedge p) \dots))}^n, \\
F_n &= p \rightarrow q \vee \overbrace{p \wedge (p \wedge (p \wedge \dots \wedge (p \wedge p) \dots))}^n, \\
G_n &= p \rightarrow (p \wedge p) \vee \overbrace{p \wedge (p \wedge (p \wedge \dots \wedge (p \wedge p) \dots))}^n.
\end{aligned}$$

**Lemma 3.1.**

a) There are constants  $c_1, c_2, c_3$  and  $c_4$  such, that for every  $n$

$$t_{D_n}^{PMon} \leq c_1, t_{G_n}^{PMon} \leq c_2 \text{ and } l_{D_n}^{PMon} \leq c_3 n, l_{G_n}^{PMon} \leq c_4 n.$$

b) There are constants  $k_1, k_2, k_3$  and  $k_4$  such, that for every  $n$

$$t_{E_n}^{PI} \geq k_1 n, t_{F_n}^{PI} \geq k_2 n \text{ and } l_{E_n}^{PI} \geq k_3 n^2, l_{F_n}^{PI} \geq k_4 n^2.$$

**Proof** of point a) is obviously. Really for every  $n$  sequent  $D_n$  can be proved in **PMon** as follow

$$\frac{p \rightarrow p}{\overbrace{p \rightarrow p, p \vee (p \vee (p \vee \dots \vee (p \vee p) \dots))}^{n-1}} \\
\frac{}{D_n}$$

For every  $n$  sequent  $G_n$  can be proved in **PMon** as follow

$$\frac{\frac{p \rightarrow p \text{ and } p \rightarrow p}{p \rightarrow p \wedge p}}{\overbrace{p \rightarrow p \wedge p, p \wedge (p \wedge (p \wedge \dots \wedge (p \wedge p) \dots))}^n} \\
\frac{}{G_n}$$

For proving of point b) note that for each  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) the formula  $\overbrace{p \wedge (p \wedge \dots \wedge (p \wedge p) \dots)}^i$  is essential both for  $E_n$  and  $F_n$ , therefore  $Nessf(E_n) \geq n$ ,  $Nessf(F_n) \geq n$  and  $Sessf(E_n) \geq n^2/2$ ,  $Sessf(F_n) \geq n^2/2$ . Now we must use the statements of both points from Propositional 2.3.  $\wedge$

**Corollary.** Above statements for sequents  $D_n$  and  $E_n$  are true in the systems **PI** and **PM** as well. Above statements for sequents  $G_n$  and  $F_n$  are true in the systems **PM** and **PMon** as well.

**Theorem 1.** a) The *intuitionistic*, *Johansson's* and *monotone valid* sequents  $D_n$  and  $E_n$  are strongly equal.

b) For every of above mentioned system  $\mathcal{F}$  (with and without cut rule)

$$t_{D_n}^{\mathcal{F}} = \mathbf{O}(1) \text{ and } l_{D_n}^{\mathcal{F}} = \mathbf{O}(n), \text{ but } t_{E_n}^{\mathcal{F}} = \Omega(n) \text{ and } l_{E_n}^{\mathcal{F}} = \Omega(n^2).$$

**Proof.** It is not difficult to see that *I-dDNF* of  $D_n$  and  $E_n$  is  $\{\neg p, \neg\neg p\}$ , *M-dDNF* of  $D_n$  and  $E_n$  is  $\{p \supset \perp, (p \supset \perp) \supset \perp\}$ , and *Mon-dDNF* of  $D_n$  and  $E_n$  is  $\{p^+, p^-\}$ , therefore sequents  $D_n$  and  $E_n$  are strongly equal.

Proof of point b) follows from Corollary of Lemma 3.1.

**Theorem 2.** Every of above mentioned systems  $\mathcal{F}$  (with and without cut rule) is neither *t-monotonous* nor *l-monotonous*.

**Proof.** It is not difficult to see that for every  $n$  sequent  $F_n$  is minimal valid sequent and corresponding sequent  $G_n$  is result of substitution in  $F_n$ . From Corollary of Lemma 3.1. it is follow that  $t_{G_n}^{\mathcal{F}} = \mathbf{O}(1)$  and  $l_{G_n}^{\mathcal{F}} = \mathbf{O}(n)$ , but  $t_{F_n}^{\mathcal{F}} = \Omega(n)$  and  $l_{F_n}^{\mathcal{F}} = \Omega(n^2)$ .

**4. Discussion.** We want to note, that for every  $n$  the sequent  $G_n$  is result of substitution in the other minimal valid sequent  $p \rightarrow (p \wedge p) \vee q$ , *t*-complexity and *l*-complexity of which is bounded by some constant in all above mentioned systems. We can introduce the following definition: *the sequent proof system  $\Phi$  is called t-strongly monotounous (l -strongly monotounous) if for every valid sequent  $\Gamma \rightarrow \Delta$  there is minimal valid sequent  $\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1$  such that  $\varphi_{\Gamma \rightarrow \Delta} \in S(\varphi_{\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1})$  and  $t_{\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1}^{\Phi} \leq t_{\Gamma \rightarrow \Delta}^{\Phi}$  ( $l_{\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1}^{\Phi} \leq l_{\Gamma \rightarrow \Delta}^{\Phi}$ ).* It is interesting to investigate the following problem: are the above non-classical systems as well as the classical systems strongly monotounous? It seems that answer must be positive. Analogous question for tree like proofs was stated in [14]. Investigation of this questions are in process.

## REFERENCES

1. *Chubaryan A., Chubaryan A.* Definition of Strong Equality of Tautologies and Universal System for Various Propositional Logics, *Armenian Journal of Mathematics*, V. 1, № 2, 2008, 29–35.
2. *Chubaryan A.A.* On complexity of the proofs in Frege system, CSIT Conference, Yerevan, 2001, 129–132.
3. *Chubaryan A., Chubaryan A., Mnatsakanyan A.* Proof complexities of strongly equal classical tautologies in some proof systems, *Nauka i Studia*, NR 42 (110) 2013, PP. 92–98.
4. *Chubaryan A., Petrosyan G.* Frege systems are no monotonous, *Evolutio, Естественныенауки*, вып. 3, 2016, 12–14.
5. *Chubaryan A., Petrosyan G.* On some properties of several proof systems for 2-valued and 3-valued propositional logic, *Fundamentalis Scientiam*, Vol.8(8), Spain, 2017, 70–73.
6. *Chubaryan A., Petrosyan G.* Frege systems are no monotonous, *Evolutio, Естественные науки*, вып. 3, 2016, 12–14.
7. *Chubaryan A., Nalbandyan H., Karabakhtsyan A., Petrosyan G.* Propositional sequent systems of two valued classical logic and many valued logics are no monotonous, *ASL, ESM, Logic Colloquium – 2017*, Stockholm, Abstracts, Programme and Abstracts, LC2017-Book, 98.
8. *Kleene S.C.* Introduction to Metamathematics, D. Van Nostrand Company, INC, 1952.
9. *Чубарян А., Болибекян О.* О секвенциальных системах слабых арифметик, *ДНАН Армении, Прикладная математика*, 2002, 102, т. 3, 214–218.
10. *Atserias A., Galesi N., Gavalda R.* Monotone Proofs of the Pigeon Hole Principle, *Mathematical Logic Quarterly*, 47, 2001, 4, 461–474.
11. *Chubaryan A., Chubaryan A., Nalbandyn H., Sayadyan S.* A Hierarchy of Resolution Systems with Restricted Substituted Rules, *Computer*

- Technology and Applications, David Publishing, USA, Vol.3, № 4, 2012, 330–336.
12. *Chubaryan A.A.* Comparison of proof sizes in systems and substitution systems of Frege, *Izvestiya NAN Armenii, Matematika*, vol. 35, No. 5, 2002, 71–84.
  13. *Filmus Y., Lauria M., Nordstrom J., Thapen N., Ron-Zewi N.* 2012, Space Complexity in Polynomial Calculus, 2012 IEEE Conference on Computational Complexity (CCC), 334–344.
  14. *Аникеев А.С.* О некоторой классификации выводимых пропозициональных формул, *Математические заметки*, 11, вып. 2, 1972, 165–174.

## **О РЯДЕ СВОЙСТВ НЕКОТОРЫХ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ВЫВОДОВ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЛОГИК**

*А. Чубарян, А. Карабахцян, Г. Петросян*

### **АННОТАЦИЯ**

В данной работе мы исследуем: 1) отношения между сложностями выводов строго эквивалентных тавтологий и 2) отношения между сложностями выводов минимальных тавтологий и результатов подстановки в них для некоторых пропозициональных секвенциальных систем интуиционистской, Йогансоновской и монотонных логик. Доказано, что 1) строго эквивалентные тавтологии могут иметь совершенно различные сложности выводов в одной и той же системе и 2) результат подстановки может быть выведен проще, чем соответствующие минимальные тавтологии, следовательно, рассмотренные в этой статье системы не монотоничны ни по шагам, ни по длине выводов.



**Ключевые слова:** строго эквивалентные тавтологии, минимальная тавтология, секвенциальные системы выводов, величины сложностей выводов, монотонические системы.

**ՈՉ ԴԱՍԱԿԱՆ ՏՐԱՄԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՍՈՒՅԹԱՅԻՆ  
ՀԱՇՎԻ ՈՐՈՇ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՄԻ ՇԱՐՔ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ**

*Ա. Չուբարյան, Ա. Դարբադյան, Գ. Պետրոսյան*

**ԱՄՓՈՓՈՒՄ**

Սույն աշխատությունում մենք հետազոտել ենք ինտուիցիոնիստական, Յոհանսոնի և մինիմալ տրամաբանությունների ասույթային հաշվի որոշ համակարգերում 1) խիստ համարժեք նույնաբանությունների արտաձուլների բարդությունների հարաբերությունը և 2) հարաբերությունները մինիմալ նույնաբանությունների և նրանցից տեղադրությամբ ստացված արտաձուլների բարդությունների միջև: Ապացուցվել է, որ 1) միննույն համակարգերում խիստ համարժեք նույնաբանությունները արտաձուլների կարող են ունենալ էապես տարբերբարդություններ և 2) տեղադրման արդյունքը կարող է արտաձվել ավելի պարզ, քան մինիմալ նույնաբանությունը, հետևաբար, սույն հոդվածում դիտարկված համակարգերը մոնոտոնիկ չեն ոչ ըստ արտաձման քայլերի, ոչ ըստ նրա երկարության:

**Հիմնաբառեր`** խիստ համարժեք նույնաբանություններ, մինիմալ նույնաբանություններ, արտաձուլների սեկվենցիալ համակարգեր, արտաձուլների բարդության մեծություններ, մոնոտոնիկ համակարգեր:

УДК 517.518.23

## ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТЬ И ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТЬ В ТЕРМИНАХ СРАВНЕНИЯ ПОДМНОГОЧЛЕНОВ

*В.Н.Маргарян*

*Российско-Армянский университет*

*vachagan.margaryan@yahoo.com*

### АННОТАЦИЯ

В работе найдены необходимые, достаточные условия гипозеллиптичности и почти гипозеллиптичности в терминах подмногочленов исследуемого многочлена.

**Ключевые слова:** гипозеллиптические, почти гипозеллиптические многочлены, сравнение многочленов.

Пусть  $N$  – множество натуральных чисел,  $N_0 = N \cup \{0\}$ ,  $N_0^n$  ( $n \in N$ ) – множество  $n$ -мерных мультииндексов  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_j \in N_0$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $R^n$  –  $n$ -мерное вещественное эвклидово пространство точек  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , а  $C^n := R^n \times iR^n$ ,  $i^2 = -1$ . Для  $\xi \in R^n$  и  $\alpha \in N_0^n$  обозначим  $|\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  и  $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ . Пусть  $P(\xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \xi^{\alpha}$  – многочлен с постоянными коэффициентами, где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов  $(P) := \{\alpha \in N_0^n, \gamma_{\alpha} \neq 0\}$

**Определение 1.** (см. [1], определение 11.1.2 и теорема 11.1.3). Многочлен  $P$  называется гипозеллиптическим, если для любого  $\alpha \in N_0^n$ ,  $|\alpha| \neq 0$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\frac{|D^\alpha P(\xi)|}{1+|P(\xi)|} := \frac{\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} P(\xi) \right|}{1+|P(\xi)|} \rightarrow 0.$$

**Определение 2.** (см. [2]) Многочлен  $P$  называется почти гипозеллиптическим, если с некоторой постоянной  $C > 0$

$$\sum_{\alpha} |D^\alpha P(\xi)| \leq C(|P(\xi)|+1), \quad \xi \in R^n.$$

**Определение 3.** (см. [3]) Скажем, что многочлен  $P$  мощнее многочлена (функций)  $Q$  и запишем, что  $Q < P$ , если с некоторой постоянной  $C > 0$   $|Q(\xi)| \leq C(|P(\xi)|+1)$ ,  $\xi \in R^n$ .

**Теорема 1.** Пусть многочлен

$$P(\xi', \xi_n) = P(\xi) = \sum_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi' := (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$$

почти гипозеллиптичен. Тогда

1)  $P_j < P_0$ ,  $j = 0, \dots, m := \max\{\alpha_n, (\alpha', \alpha_n) \cup (P)\}$ , где

$$P_j(\xi') := \sum_{(\alpha', j) \in (P)} \gamma_{(\alpha', j)} (\xi')^{\alpha'}, \quad j = 0, \dots, m;$$

2)  $P_0$ -почти гипозеллиптичен как многочлен от  $\xi'$ .

*Доказательство.* Так как, очевидно, что  $P_j(\xi') = \frac{1}{j!} (D_n^j P)(\xi', 0)$ ,

$i = 0, 1, \dots, m$ , то в силу условия теоремы с некоторой постоянной  $C_1 > 0$  имеем, что  $|P_j(\xi')| = \frac{1}{j!} |(D_n^j P)(\xi', 0)| \leq C_1 (|P_0(\xi', 0)| + 1)$ ,  $\xi' \in R^{n-1}$ , то есть  $P_j < P_0$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ . Этим утверждение пункта 1 доказана.

Докажем утверждение пункта 2. Для любого  $\alpha' \in N_0^{n-1}$  с некоторой постоянной  $C_2 > 0$  в силу условия теоремы имеем, что  $|D^{\alpha'} P_0(\xi')| = |(D^{\alpha'} P)(\xi', 0)| \leq C_1 (|P(\xi', 0)| + 1) = C_1 |P_0(\xi')| + 1$ ,  $\xi' \in R^{n-1}$ , то есть  $P_0$  – почти гипоэллиптичен как многочлен от  $\xi'$ . Теорема доказана.

**Лемма 1.** Пусть  $P(\xi')$  и  $Q(\xi')$  ( $\xi' \in R^{n-1}$ ) – многочлены с постоянными коэффициентами,  $m \in N$ ,  $r \in N_0$ ,  $r < m$ . Если многочлен  $P$  гипоэллиптичен и  $|Q|^{\frac{m}{m-r}} < P$ , то при  $|\xi'| \rightarrow \infty$

$$\sum_{l=1}^{n-1} |D_l Q(\xi')| / [1 + |P(\xi')|]^{\frac{m-r}{m}} \rightarrow 0.$$

*Доказательство.* Утверждение леммы при  $r = 0$  непосредственно следует из работы [4]. Докажем утверждение леммы для  $1 \leq r \leq m - 1$ . Обозначим через  $d_p(\xi')$  расстояние точки  $\xi' \in R^{n-1}$  от множества  $\{\xi' \in C^{n-1}, P(\xi') = 0\}$ . В силу леммы 10.4.2 работы [1] с некоторой постоянной  $C_1 > 0$  имеем, что

$$\sum_{l=1}^{n-1} |D_l Q(\xi')| d_p(\xi') \leq Q(\xi', d_p(\xi')) \leq C_1 \sup |Q(\xi' + \eta')| \quad \xi' \in R^{n-1} \quad |\eta'| \leq d_p(\xi'),$$

где для данного многочлена  $q$  и чисел  $t$ ,  $\tilde{q}(\xi', t) = \left( \sum_{\alpha' \in N_0^n} |D^{\alpha'} q(\xi')|^2 t^{2|\alpha'|} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Отсюда, в силу условия леммы на основании лемм 10.4.2 и 11.1.4 работы [1] с некоторыми постоянными  $C_2, C_3, C_4 > 0$  имеем, что

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n-1} |D_l Q(\xi')| d_p(\xi') &\leq C_2 \sup [ |P(\xi' + \eta')| + 1 ]^{\frac{m-r}{m}} \leq C_3 [ \tilde{P}(\xi', d_p(\xi')) ]^{\frac{m-r}{m}} \leq \\ &\leq C_4 ( |P(\xi')| + 1 )^{\frac{m-r}{m}}, \quad \xi' \in R^{n-1}. \end{aligned}$$

Так как, в силу условия леммы,  $d_p(\xi') \rightarrow \infty$  при  $|\xi'| \rightarrow \infty$  (см. [1], теорема 11.1.3), то отсюда непосредственно получаем утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

**Следствие 1.** При условии леммы 1, когда

$$1 \leq r \leq m-1 \quad |Q(\xi')|/|P(\xi')+1| \rightarrow 0 \text{ при } |\xi'| \rightarrow \infty.$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 1, так как из условия гипоеллиптичности многочлена P имеем, что  $P(\xi') \rightarrow \infty$  при  $|\xi'| \rightarrow \infty$ .

**Лемма 2.** При условиях леммы 1, когда

$$1 \leq r \leq m-1 \quad \frac{|\xi_n|^r \sum_{l=1}^{n-1} |D_l Q(\xi')|}{1 + |\xi_n|^m + |P(\xi')|} \rightarrow 0 \text{ при } |\xi| = |(\xi', \xi_n)| \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Предположим обратное, что существуют число  $C > 0$  и последовательность  $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \in R^n \quad |\xi^s| \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow \infty$  для которых

$$\frac{|\xi_n^s|^r \sum_{l=1}^{n-1} |D_l Q((\xi')^s)|}{1 + |\xi_n^s|^m + |P((\xi')^s)|} \geq C \quad s=1,2,\dots \quad (1)$$

Очевидно, за счет перехода на подпоследовательность последовательности  $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$  возможны следующие случаи:

1) существует постоянная  $M > 0$  такая, что

$$|(\xi')^s| \leq M, \quad s=1,2,\dots, \quad |\xi_n^s| \rightarrow \infty \text{ при } s \rightarrow \infty;$$

2) существует постоянная  $M > 0$  такая, что

$$|\xi_n^s| \leq M, \quad s=1,2,\dots, \quad |(\xi')^s| \rightarrow \infty \text{ при } s \rightarrow \infty;$$

3)  $|\xi_n^s| \leq M \quad |(\xi')^s| \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow \infty$ .

В случае 2) в силу следствия 1 при  $s \rightarrow \infty$  имеем

$$\frac{|\xi_n^s|^r \sum_{l=1}^{n-1} |D_l Q((\xi')^s)|}{1 + |\xi_n^s|^m + |P((\xi')^s)|} \leq \frac{M^r \sum_{l=1}^{n-1} |D_l Q((\xi')^s)|}{1 + |P((\xi')^s)|} \rightarrow \infty,$$

что противоречит оценке (1).

В случае 1) с некоторой постоянной  $C_1 = C_1(M, Q) > 0$  при  $s \rightarrow \infty$

$$\frac{|\xi_n^s|^r \sum_{l=1}^{n-1} |D_l Q((\xi')^s)|}{1 + |\xi_n^s|^m + |P((\xi')^s)|} \leq \frac{C_1 |\xi_n^s|^r}{1 + |\xi_n^s|^m} \rightarrow \infty,$$

что опять противоречит оценке (1).

В случае 3) в силу леммы 1 при  $s \rightarrow \infty$  имеем, что

$$U_s := \frac{\left[ \sum_{l=1}^{n-1} |D_l Q((\xi')^s)| \right]^{\frac{m}{m-r}}}{1 + |P((\xi')^s)|} \rightarrow 0.$$

Пусть  $t_s := U_s^{\frac{m}{2(m-r)}}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ . Тогда с применением неравенства Гелдера при  $s \rightarrow \infty$  имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{|\xi_n^s|^r \sum_{l=1}^{n-1} |D_l Q((\xi')^s)|}{1 + |\xi_n^s|^m + |P((\xi')^s)|} &\leq \frac{\frac{r}{m} |\xi_n^s|^m t_s^{\frac{m}{r}} + \frac{m-r}{m} t_s^{\frac{m}{m-r}} \left[ \sum_{l=1}^{n-1} |D_l Q((\xi')^s)| \right]^{\frac{m}{m-r}}}{1 + |\xi_n^s|^m + |P((\xi')^s)|} \leq \\ &\leq \frac{r}{m} t_s^{\frac{m}{r}} + \frac{m-r}{m} U_s^{-\frac{1}{2}} U_s \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Полученное соотношение противоречит оценке (1) и доказывает справедливость утверждения леммы. Лемма 2 доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $P(\xi) = P(\xi', \xi_n) = \sum_{j=0}^m \xi_n^j P_j(\xi')$ , где  $P_0$  гипоэллип-  
тичен как многочлен от  $\xi'$ ,  $P_m(\xi') = 1$  и  $|P_j|^{m-j} < P_0$ ,  $j = 1, \dots, m-1$ . Если  
с некоторой постоянной  $C > 0$

$$1 + |\mathbf{P}(\xi)| \geq C \sum_{j=0}^m |\xi_n^j \mathbf{P}_j(\xi')|, \quad \xi \in R^n, \quad (2)$$

то многочлен  $\mathbf{P}$  гипоеллиптичен.

*Доказательство.* В силу работы [5] достаточно показать, что при  $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\sum_{l=1}^n |D_l \mathbf{P}(\xi)| / [1 + |\mathbf{P}(\xi)|] \rightarrow 0. \quad (3)$$

Очевидно, что для доказательства соотношения (3), достаточно показать, что для любого  $s$ ,  $0 \leq s \leq m$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\sum_{l=1}^n |D_l \xi_n^s \mathbf{P}_j(\xi')| / [1 + |\mathbf{P}(\xi)|] \rightarrow 0. \quad (4)$$

В силу оценки (2), соотношение (4) эквивалентно следующему соотношению:

$$\sum_{l=1}^n |D_l (\xi_n^j \mathbf{P}_j(\xi'))| / \left[ 1 + \sum_{i=0}^m |\xi_n^i \mathbf{P}_i(\xi')| \right] \rightarrow 0, \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

При  $j = 0$ , так как  $\mathbf{P}_m(\xi') = 1$  имеем, что

$$\frac{\sum_{l=1}^n |D_l \mathbf{P}_0(\xi')|}{1 + \sum_{j=0}^m |\xi_n^j \mathbf{P}_j(\xi')|} \leq \frac{\sum_{l=1}^{n-1} |D_l \mathbf{P}_0(\xi')|}{1 + |\xi_n|^m + |\mathbf{P}_0(\xi')|} \rightarrow 0,$$

когда  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

При  $j = m$ , так как  $\mathbf{P}_m(\xi') = 1$  имеем, что

$$\frac{\sum_{l=1}^n |D_l \xi_n^m \mathbf{P}_m(\xi')|}{1 + \sum_{j=0}^m |\xi_n^j \mathbf{P}_j(\xi')|} \leq \frac{m |\xi_n|^{m-1}}{1 + |\xi_n|^m + |\mathbf{P}_0(\xi')|} \rightarrow 0,$$

когда  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Пусть  $1 \leq r \leq m-1$ , тогда

$$\frac{\sum_{l=1}^n |D_l(\xi_n^r P_r(\xi'))|}{1 + \sum_{j=0}^m |\xi_n^j P_j(\xi')|} \leq \frac{r |\xi_n|^{r-1} |P_r(\xi')| + |\xi_n|^r \sum_{l=1}^{n-1} D_l P_r(\xi')}{1 + |\xi|^m + |\xi_n^r P_r(\xi')| + |P_0(\xi')|}.$$

Так как в силу леммы 2 при  $1 \leq r \leq m-1$ ,  $\frac{|\xi_n|^r \sum_{l=1}^{n-1} |D_l P_r(\xi')|}{1 + |\xi_n|^m + |P_0(\xi')|} \rightarrow 0$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$ , то для доказательства соотношения (5) для  $1 \leq r \leq m-1$  доста-

точно показать, что  $\frac{|\xi_n|^{r-1} |P_r(\xi')|}{1 + |\xi_n|^m + |\xi_n^r P_r(\xi')| + |P_0(\xi')|} \rightarrow 0$ , когда  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Предположим обратное, что для некоторого  $r_0 : 1 \leq r_0 \leq m-1$  существует постоянная  $C_1 > 0$  и последовательности  $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \in R^n$ ,  $|\xi^s| \rightarrow \infty$  при  $|s| \rightarrow \infty$ , для которых

$$\frac{|\xi_n|^{r_0-1} |P_{r_0}((\xi')^s)|}{1 + |\xi_n|^m + |\xi_n|^{r_0} |P_{r_0}(\xi')^s| + |P_0((\xi')^s)|} \geq C_1, \quad s = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Из оценки (7) следует, что  $P_{r_0}((\xi')^s) \neq 0$ ,  $s = 1, 2, \dots$ . За счет перехода на подпоследовательность последовательности  $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$  возможны следующие два случая

- 1)  $|\xi_n^s| \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow \infty$ ;
- 2) существует число  $M > 0$  такое, что  $|\xi_n^s| < M$ ,  $s = 1, 2, \dots$

В случае 1) имеем, что при  $s \rightarrow \infty$

$$\frac{|\xi_n|^{r_0-1} |P_{r_0}((\xi')^s)|}{1 + |\xi_n^s|^m + |\xi_n|^{r_0} |P_{r_0}(\xi')^s| + |P_0((\xi')^s)|} \leq \frac{1}{|\xi_n^s|} \rightarrow 0.$$



В случае 2) имеем, что  $|(\xi')^s| \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow \infty$  и следовательно, в силу следствия 1 получим

$$\frac{|\xi_n^s|^{r_0-1} |P_{r_0}((\xi')^s)|}{1 + |\xi_n^s|^m + |\xi_n^s|^{r_0} |P_{r_0}(\xi')^s| + |P_0((\xi')^s)|} \leq \frac{M^{r_0-1} |P_{r_0}((\xi')^s)|}{1 + |P_0((\xi')^s)|} \rightarrow 0.$$

Полученные соотношения противоречат оценке (7) и доказывают, что при  $1 \leq r \leq m$ , верны соотношению (6). Этим утверждение теоремы 2 доказано.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2, М.: Мир, 1986.
2. Kazaryan G.G. On almost hypoelliptic polynomials. Doklady Ross. Acad. Nauk 2004, 398, m 6, 701–703.
3. Казарян Г.Г., Маргарян В.Н. Критерии гипоеллиптичности в терминах мощностей и силы операторов // Труды МИАН СССР, 1979. Т. 150, 128–142.
4. Маргарян В.Н., Хоршикян А.Г. Сравнение многочленов многих переменных // «Вестник РАУ», 2016, № 2, 20–31.
5. Казарян Г.Г., Маргарян В.Н. Носитель гипоеллиптичности линейных дифференциальных операторов // Изв. Ан. Арм.Фрм. ССР, 1986. Т. XXII, М 5, 315–336.

## HYPOELLIPTICITY AND ALMOST HYPOELLIPTICITY IN TERMS OF COMPARISON OF SUBPOLYNOMIALS

*V. Margaryan*

### ABSTRACT

In this paper, the necessary, sufficient conditions for hypoellipticity and almost hypoellipticity are found in terms of the subpolynomialsof the polynomial under study.

**Keywords:** hypoelliptic, almost hypoelliptic polynomials, comparison of polynomials.

ՀԻՊՈԼԻՊՏԻԿՈՒԹՅՈՒՆԸ և ՀԱՄԱՐՅԱ ՀԻՊՈԷԼԻՊՏԻԿՈՒԹՅՈՒՆԸ  
ԵՆԹԱԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅԱՆ ՏԵՐՄԻՆՆԵՐՈՎ

*Վ. Ն. Մարգարյան*

### ԱՍՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում գտնված են հիպոէլիպտիկության և համարյա հիպոէլիպտիկության անհրաժեշտ, բավարար պայմաններ հետազոտվող բազմանդամի ենթաբազմանդամի տերմիններով:

**Հիմնաբառեր՝** հիպոէլիպտական, համարյա հիպոէլիպտական բազմանդամներ, բազմանդամների համեմատություն:

УДК 512.624.3

## ON TWO REPRESENTATIONS OF COSETS

*A. Minasyan*

*Yerevan State University*

*ashot.minasya@gmail.com*

### ABSTRACT

In this paper two different representations of a coset (affine subspace) over a finite field, by system of linear equations and by root polynomials are described. Algorithms to transform from one representation to another and vice versa are presented.

**Keywords:** linear algebra, coset, root polynomial.

### 1. Introduction

Let  $F_q$  be the finite field of  $q$  elements and  $F_q^n$  be the vector space of dimension  $n$  over  $F_q$ . A *coset* of subspace  $L$  in  $F_q^n$  is a translate of  $L$ , i.e. a set  $v + L = \{v + x \mid x \in L\}$  for some vector  $v$ .

Any  $k$ -dimensional coset in  $F_q^n$  can be represented as set of solutions of a certain system of linear equations over  $F_q$  of rank  $n - k$  and vice versa.

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases} \quad (1)$$

If the rank of the system (1) is  $n - k$  and it has at least one solution then the solution set forms a coset of dimension  $k$ . The linear subspace of the coset is the solution set of the corresponding homogeneous system ( $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$ )

Another representation of a coset is introduced in [1, 2]. Finite field  $F_{q^n}$  can be regarded as vector space of dimension  $n$  over  $F_q$  ( $F_q^n$ ). Let  $\{\beta^q, \beta^{q^2}, \beta^{q^3}, \dots, \beta^{q^{n-1}}\}$  be a normal basis of  $F_{q^n}$ . One can check [3] for the existence of a normal basis and an algorithm to find it. Then we have the natural 1 - 1 correspondence:

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in F_q^n \leftrightarrow v_1\beta + v_2\beta^q + v_3\beta^{q^2} + \dots \\ \dots + v_n\beta^{q^{n-1}} \in F_{q^n} \quad (2)$$

We use a normal basis, because algorithms described here extensively use the operation of raising  $q$ -th power of field elements. The operation of raising to the power  $q$  (and consequently any power  $q^m$ ) in the normal basis is the cyclic shift of the coefficients, since

$$v^q = v_n\beta + v_1\beta^q + v_2\beta^{q^2} + \dots + v_{n-1}\beta^{q^{n-1}} = (v_n, v_1, \dots, v_{n-1})$$

With each coset  $L$  in  $F_q^n$  we associate a polynomial

$$p_L(x) = \prod_{a \in L} (x - a) \quad (3)$$

which is called the root polynomial of  $L$ .

To determine the nature of root polynomials, we need to look into the automorphisms of  $F_{q^n}$  over  $F_q$ . As is well known [3], each automorphism has the form  $\varphi_m: x \rightarrow x^{q^m}$ , where  $0 \leq m \leq n - 1$ . Any linear combination, with coefficient from  $F_{q^n}$  of these  $n$  automorphisms can be written as a polynomial over  $F_{q^n}$  of degree at most  $q^{n-1}$ . Such polynomials are known as Ore polynomials. Each Ore polynomial  $p(x)$  induces a linear operator on  $F_q^n$  over  $F_q$ . In fact, all linear operators on  $F_q^n$  arise this way. A simple count reveals that there are  $(q^n)^n$ . Ore polynomials, the same number as the number of  $n \times n$  matrices over  $F_q$

Following facts are proven in [2].

### Proposition 1

The root polynomial of a  $k$ -dimensional linear subspace  $L$  of  $F_q^n$  is an Ore polynomial of degree  $q^n$ .

### Proposition 2

Any non-zero term of the root polynomial of a  $k$ -dimensional coset in  $F_q^n$  has degree 0 or degree  $q^m$ , where  $0 \leq m \leq k$ .

If  $L$  is a subspace and  $C = v + L$  is a coset, then  $p_C(x) = p_L(x - v) = p_L(x) - p_L(v)$ . This means that the root polynomial of a coset is Ore polynomial plus a constant term.

Bellow we describe algorithms for transformations between the above mentioned two representations of coset.

## 2. Constructing root polynomial from the system of equations

Let a system of equations of form (1) represent a  $k$ -dimensional coset in  $F_q^n$ . One way to find the root polynomial is to solve the system, get all  $q^n$  solutions and multiply all terms in formula (3), but this may not be practical for large cosets.

Another approach is to use the method of undetermined coefficients. Coefficients of the root polynomial are calculated using its properties.

$$p(z) = z^{q^k} + A_1 z^{q^{k-1}} + \dots + A_k z + A_{k+1}$$

Denote  $p'(z)$  the homogeneous part of the root polynomial.

$$p(z) = z^{q^k} + A_1 z^{q^{k-1}} + \dots + A_k z$$

As noted above, it is an Ore polynomial which evaluates to 0 on elements of the subspace of the coset. Let  $e_1, \dots, e_k$  be a fundamental basis of solutions of the homogeneous system (1) and  $b$  be one of the solutions of the system. Those can be found using Gaussian elimination algorithm.  $e_1, \dots, e_k$  and  $b$  are vectors in  $F_q^n$ . We regard them as field elements using the correspondence (2). The following system of linear equations holds:

$$\begin{cases} p'(e_1) = e_1^{q^k} + A_1 e_1^{q^{k-1}} + \cdots + A_k e_1 = 0 \\ p'(e_2) = e_2^{q^k} + A_1 e_2^{q^{k-1}} + \cdots + A_k e_2 = 0 \\ \vdots \\ p'(e_k) = e_k^{q^k} + A_1 e_k^{q^{k-1}} + \cdots + A_k e_k = 0 \end{cases}$$

The system has a unique solution because it has rank  $k$ , otherwise  $e_1, \dots, e_k$  would not be basis.  $A_1, \dots, A_k$  are calculated using Gaussian elimination algorithm.

$A_{k+1}$  is calculated using the fact

$$p(b) = b^{q^k} + A_1 b^{q^{k-1}} + \cdots + A_k b + A_{k+1}$$

### 3. Constructing system of equations from the root polynomial

It is given a root polynomial  $p(z) = z^{q^k} + A_1 z^{q^{k-1}} + \cdots + A_k z + A_{k+1}$ . The solution set of vectors of  $p(z) = 0$  is a coset in  $F_q^n$  of dimension  $k$ . We find the system of equations of form (1) that represents the coset.

It is a fact that homogeneous part of root polynomial  $p(z) = z^{q^k} + A_1 z^{q^{k-1}} + \cdots + A_k z$  is an Ore polynomial which is known to be a linear operator of rank  $n - k$  on  $F_q^n$ . It is clear that the kernel of the operator is the linear subspace of the coset.

We use the matrix representation of the linear operator. Let  $\{\beta^q, \beta^{q^2}, \beta^{q^3}, \dots, \beta^{q^{n-1}}\}$  be the normal basis of  $F_q^n$ . Correspondence (2) is used to find vector representations of field elements. First we find the values of the operator on basis elements.

$$\begin{aligned} p'(\beta) &= (\beta_{11}, \dots, \beta_{1n}) \\ p'(\beta^q) &= (\beta_{21}, \dots, \beta_{2n}) \\ &\vdots \\ p'(\beta^{q^{n-1}}) &= (\beta_{n1}, \dots, \beta_{nn}) \end{aligned}$$

Now the value of the operator on any vector  $(x_1, \dots, x_n)$  can be calculated in the following way:  $p(x_1, \dots, x_n) = p'(x_1 \beta + x_2 \beta^q + \cdots +$

$x_n \beta^{q^{n-1}} = x_1 p'(\beta) + x_2 p'(\beta^q) + \dots + x_n p'(\beta^{q^{n-1}})$ . The matrix form of operator  $p'(z)$  would be:

$$p'(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \dots & \beta_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1n} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

If  $A_{k+1} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  then  $p(x_1, \dots, x_n) = p'(x_1, \dots, x_n) + (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ .

We got the following:

$$p(x_1, \dots, x_n) = 0 \leftrightarrow p'(x_1, \dots, x_n) = -(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

And the system of equations forming the coset would be

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \dots & \beta_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1n} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

## REFERENCE

1. Ore O. On a Special Class of Polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1993) 559–584.
2. Jamison R. Covering Finite Fields with Cosets of Subspaces, 25–11–1975.
3. Lidl R., Niederreiter H. Introduction to finite fields and their applications, Cambridge University Press, (1986).

## О ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СМЕЖНЫХ КЛАССОВ

*А.В. Минасян*

### АННОТАЦИЯ

В данной статье описаны два представления смежного класса (аффинное подпространство) над конечным полем. Это система линейных уравнений и корневой многочлен. Описаны алгоритмы для трансформации одного представления в другое.

**Ключевые слова:** линейная алгебра, смежный класс, корневой многочлен.

## ՀԱՐԱՎԻՑ ԴԱՍԵՐԻ ԵՐԿՈՒ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

*Ա. Վ. Մինասյան*

### ԱՍՓՈՓՈՒՄ

Այս հոդվածում նկարագրված են վերջավոր դաշտի վրա տրված հարակից դասի (աֆֆինական ենթատարածության) երկու ներկայացումներ. մեկը՝ զծային հավասարումների համակարգի միջոցով, իսկ մյուսը՝ արմատ բազմանդամի միջոցով: Նկարագրված են ալգորիթմներ մի ներկայացումից մյուսը ստանալու համար:

**Հիմնաբառեր**՝ զծային հանրահաշիվ, հարակից դաս, արմատ բազմանդամ:



УДК 517.968.4

# ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

*А.Х. Хачатрян, В.М. Кахкцян*

*Армянский национальный аграрный университет  
Национальный исследовательский технологический университет  
(МИСиС, г. Москва)*

*aghavard59@mail.ru, varazdat1948@mail.ru*

## АННОТАЦИЯ

В настоящей работе исследуется один класс квазилинейных интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром. Доказывается существование однопараметрического семейства неотрицательных нетривиальных и ограниченных решений данного уравнения. Вычисляется предел построенных решений в бесконечности и, тем самым, получается нелинейный аналог одной теоремы из работы [1]. В конце приведены частные примеры указанных уравнений.

**Ключевые слова:** уравнение Вольтерра, квазилинейное уравнение, ядро, предел, итерации, монотонность, сходимость.

## Введение

Настоящая заметка посвящена исследованию следующего квазилинейного интегрального уравнения Вольтерра:

$$f(x) = \int_x^{\infty} (v(t-x) - v(t+x)) (f(t) + \chi(t, f(t))) dt, x \geq 0 \quad (1)$$

относительно искомой вещественной функции  $f(x)$ .

Интерес изучения таких уравнений связан с исследованием нелинейных граничных задач для псевдо-дифференциальных уравнений, возникающих в  $p$ -адической теории открыто-замкнутых струн (см. [1-2]).

В уравнении (1) ядро  $v$  удовлетворяет следующим условиям:

$$v(\tau) > 0, \tau \in R^+, v \in L_1(R^+) \cap L_\infty(R^+), v(\tau) \downarrow \text{ по } \tau \text{ на } R^+, \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} v(\tau) d\tau = 1, \int_0^{\infty} \tau^2 v(\tau) d\tau < +\infty. \quad (3)$$

В случае  $\chi(t, u) \equiv 0, t \in R^+, u \in R$  уравнение (1) исследовано в работе [1]. В этой работе доказано существование неотрицательного нетривиального монотонно неубывающего непрерывного и ограниченного решения.

В настоящей работе с использованием этого результата при определенных ограничениях на функцию  $\chi(t, u)$  мы докажем существование однопараметрического семейства неотрицательных нетривиальных и ограниченных решений. Более того, докажем существование предела в бесконечности для каждого решения из этого семейства.

В конце работы будут приведены примеры функций  $\chi(t, u)$ .

## 1. Формулировка основного результата

Относительно функции  $\chi(t, u)$  предположим выполнение следующих условий:

I.  $\chi(t, u)$  удовлетворяет условию Каратеодори на множестве  $R^+ \times R^+$  по аргументу  $u$ , т.е. при каждом фиксированном  $u \in R^+$  функция

$\chi(t, u)$  измерима по  $t, t \in R^+$  и для почти всех  $t \in R^+$  непрерывна по  $u$  на  $R^+$ ,

II.  $\chi(t, u) \geq 0, (t, u) \in R^+ \times R^+$ , существует  $\sup_{u \geq 0} \chi(t, u) \equiv \varepsilon(t)$ ,

где  $\varepsilon \in L_1(R^+) \cap L_\infty(R^+), \varepsilon(t) \rightarrow 0$ , при  $t \rightarrow +\infty$  и

$$\int_0^\infty t\varepsilon(t)dt < +\infty,$$

III.  $\chi(t, u) \uparrow$  по  $u$  на  $R^+$ .

Основным результатом настоящей работы является следующая

**Теорема:** Пусть ядерная функция  $v(t)$  удовлетворяет условиям (2) и (3). Тогда, при условиях I)–III) уравнение (1) обладает однопараметрическим семейством неотрицательных нетривиальных и ограниченных решений  $\{f_\gamma(x)\}_{\gamma > 0}$ , причем для любого  $\gamma > 0$  существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\gamma(x) = \gamma. \tag{4}$$

Более того, если  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  и  $\gamma_1 > \gamma_2$ , то

$$f_{\gamma_1}(x) > f_{\gamma_2}(x), x > 0 \tag{5}$$

и для любого  $\gamma > 0$

$$f_\gamma(0) = 0. \tag{6}$$

## 2. Доказательство основного результата. Примеры функций $\chi(t, u)$ .

Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующее однородное уравнение типа Вольтерра:

$$\psi(x) = \int_x^\infty (v(t-x) - v(t+x))\psi(t)dt, x \in R^+ \tag{7}$$

относительно искомой функции  $\psi(x)$ , где ядро  $v$  удовлетворяет условиям (2) и (3).

Из результатов работы [1] следует, что однородное уравнение (7) обладает неотрицательным нетривиальным монотонно неубывающим непрерывным и ограниченным на  $R^+$  решением  $\psi(x)$ , причем

$$\psi(0) = 0, \psi(x) > 0, \text{ при } x > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 1. \quad (8)$$

Теперь рассмотрим следующее неоднородное линейное интегральное уравнение Вольтерра:

$$\Phi(x) = g(x) + \int_x^{\infty} v(t-x)\Phi(t)dt, x \in R^+ \quad (9)$$

относительно искомой функции  $\Phi(x)$ , где свободный член  $g(x)$  имеет следующую структуру:

$$g(x) = \int_x^{\infty} v(t-x)\varepsilon(t)dt, x \in R^+ \quad (10)$$

(о функции  $\varepsilon(t)$  см. в условии II).

Из свойств функции  $v$  и  $\varepsilon$  с учетом теоремы Фубини (см [3]) следует, что

$$g \in L_1(R^+) \cap L_{\infty}(R^+), m_1(g) \equiv \int_0^{\infty} xg(x)dx < +\infty. \quad (11)$$

С другой стороны, т.к.  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то из (10) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, в силу (11) из результатов работы [4] следует, что неоднородное уравнение (9) имеет неотрицательное суммируемое решение  $\Phi(x)$ . Заметим, что это решение обладает также следующими свойствами:

$$\Phi \in L_{\infty}(R^+) \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0. \quad (13)$$

Действительно, из (9) в силу (2), (11) и (12), имеем

$$0 \leq \Phi(x) \leq \sup_{x \geq 0} g(x) + \sup_{x \geq 0} v(x) \cdot \int_x^{\infty} \Phi(t)dt < +\infty,$$

$$0 \leq \Phi(x) \leq g(x) + \sup_{\tau \geq 0} v(\tau) \cdot \int_0^{\infty} \Phi(t) dt \rightarrow 0, \text{ при } x \rightarrow +\infty,$$

откуда немедленно следует (13).

Теперь для уравнения (1) рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$f_{n+1}^\gamma(x) = \int_x^{\infty} (v(t-x) - v(t+x)) \left( f_n^\gamma(t) + \chi(t, f_n^\gamma(t)) \right) dt, \tag{14}$$

$$f_0^\gamma(x) = \gamma\psi(x), n = 0, 1, 2, \dots, x \in R^+,$$

где  $\gamma$  – произвольное положительное число, а  $\psi(x)$  – нетривиальное неотрицательное решение уравнения (7), обладающее свойствами (8).

В силу неравенства  $v(t-x) \geq v(t+x)$ ,  $(t, x) \in R^+ \times R^+$  и неотрицательности  $\chi(t, u)$  (см. условие II) индукцией по  $n$  нетрудно доказать, что для любого  $\gamma > 0$

$$f_n^\gamma(x) \uparrow \text{ по } n. \tag{15}$$

Ниже докажем, что

$$f_n^\gamma(x) \leq \gamma\psi(x) + \Phi(x), n = 0, 1, 2, \dots, x \in R^+, \gamma > 0 \tag{16}$$

Действительно, при  $n = 0$  неравенство (16) сразу следует из неотрицательности функции  $\Phi(x)$ . Предположим, что (16) выполняется при некотором натуральном  $n$ . Тогда, учитывая условия II), III), формулы (9), (10), из (14) в силу индукционного предположения будем иметь:

$$\begin{aligned} f_{n+1}^\gamma(x) &\leq \int_x^{\infty} (v(t-x) - v(t+x)) (\gamma\psi(t) + \Phi(t) + \chi(t, \gamma\psi(t) \\ &\quad + \Phi(t))) dt \leq \\ &\leq \gamma \int_x^{\infty} (v(t-x) - v(t+x)) \psi(t) dt + \int_x^{\infty} v(t-x) \Phi(t) dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_x^{\infty} (v(t-x) - v(t+x))\chi(t, \gamma\psi(t) + \Phi(t))dt \leq \gamma\psi(x) + \\
& + \int_x^{\infty} v(t-x)\Phi(t)dt + \int_x^{\infty} v(t-x)\chi(t, \gamma\psi(t) + \Phi(t))dt \leq \\
& \leq \gamma\psi(x) + \int_x^{\infty} v(t-x)\Phi(t)dt + \int_x^{\infty} v(t-x)\varepsilon(t)dt = \gamma\psi(x) + \Phi(x).
\end{aligned}$$

Индукцией по  $n$  легко можно проверить, что каждый член последовательности функций  $\{f_n^\gamma(x)\}_{n=0}$  является измеримой функцией по  $x$  на  $R^+$ . Это следует из условий I), (2) и (3).

Из монотонности и неотрицательности функции  $\chi(t, u)$  следует также, что если  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  и  $\gamma_1 > \gamma_2$ , то

$$f_n^{\gamma_1}(x) - f_n^{\gamma_2}(x) \geq (\gamma_1 - \gamma_2)\psi(x), n = 0, 1, 2, \dots, x \in R^+. \quad (17)$$

Таким образом, из перечисленных свойств следует поточечная сходимость последовательности функций  $\{f_n^\gamma(x)\}_{n=0}^\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^\gamma(x) = f^\gamma(x)$ , причем  $f^\gamma(x)$ , согласно предельной теореме Б. Леви, удовлетворяет уравнению (1).

Из (15) и (16) следует, что

$$\gamma\psi(x) \leq f^\gamma(x) \leq \gamma\psi(x) + \Phi(x), x \in R^+, \gamma > 0 \quad (18)$$

В неравенстве (17) устремляя  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$f^{\gamma_1}(x) - f^{\gamma_2}(x) \geq (\gamma_1 - \gamma_2)\psi(x), x \in R^+. \quad (19)$$

Учитывая (8) из (19), приходим к (5) и (6). Так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$ , то из (18) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^\gamma(x) = \gamma.$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

В конце работы приведем несколько примеров функции  $\chi(t, u)$ , для которых выполняются условия I) – III):

$$A. \chi(t, u) = e^{-t} \cdot \frac{\alpha u}{u+1}, \alpha > 0, (t, u) \in R^+ \times R^+,$$

$$B. \chi(t, u) = ce^{-t^2} (1 - e^{-u}), c > 0, (t, u) \in R^+ \times R^+,$$

$$C. \chi(t, u) = \frac{q}{1+t^3} \sqrt{\frac{u(1-e^{-u})}{u+1}}, q > 0, (t, u) \in R^+ \times R^+.$$

Авторы выражают глубокую благодарность Х.А. Хачатрян за обсуждения и полезные замечания.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Хачатрян Х.А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории р-адической струны. Изд-во РАН, сер. Мат. Т. 82, № 2, 2018.
2. *Владимиров В.С., Волович Я.И.* О нелинейном уравнении динамики в теории р-адической струны. ТМФ. Т. 138, № 3. СС. 355–368, 2004.
3. *Колмогоров А.Н., Фомин В.С.* Элементы теории функций и функционального анализа. М. Изд-во «Наука», 1981, 544 с.
4. *Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б.* Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги Науки и Техники, Мат. Анализ. Т. 22. СС. 175–242, 1984.

### ONE PARAMETRIC FAMILY OF NONTRIVIAL SOLUTIONS FOR ONE CLASS OF VOLTERYAN TYPE QUASILINEAR EQUATIONS

*A. Khachatryan, V. Makhtsyan*

### ABSTRACT

In the present note the one class of quasilinear integral equations with sum-difference kernel is investigated. For these equations the existence of one parametric family of nonnegative nontrivial and bounded solutions is

one parametric family of nonnegative nontrivial and bounded solutions is proved. The limit at infinity for obtained solutions is calculated, which is the nonlinear analogue of one theorem of the work [1]. At the end of the work for above mentioned equations the list of particular examples are given.

**Keywords:** Volteryan equation, quasilinear equation, kernel, limit, iteration, monotony, convergence.

**ՎՈԼՏԵՐԱՅԻ ՏԻՊԻ ՔՎԱԶԻԳՇԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ  
ՀԱՄԱՐ ՈՉ ՏՐԻՎԻԱԼ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԿ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԼՈՑ ԸՆՏԱՆԻՔ**

*Ա.Խ. Խաչատրյան, Վ.Մ. Քաղըցյան*

#### ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկայացված աշխատանքում ուսումնասիրվում է գումարա-տարբերակային կորիզով քվազիգծային ինտեգրալ հավասարումների մի դաս: Նշված հավասարումների համար ապացուցվում է ոչ տրիվիալ, սահմանափակ և ոչ բացասական լուծումների մեկ պարամետրանոց ընտանիքի գոյությունը: Ստացվել է նաև կառուցված լուծումների սահմանը անվերջությունում և դրանով իսկ ստացվել [1] աշխատանքի մի թեորեմի ոչ գծային հանգույնը: Վերջում բերվում են նշված հավասարումների մասնավոր օրինակներ:

**Հիմնաբառեր՝** Վոլտերայի հավասարում, քվազիգծային հավասարումներ, կորիզ, սահման, իտերացիա, մոնոտոնություն, գուգամիտություն:



# Ф И З И К А

УДК 541.64

## ПЕРЕХОД ПОРЯДОК-БЕСПОРЯДОК В ГЕТЕРОГЕННЫХ БИОЛОГИЧЕСКИХ МАКРОМОЛЕКУЛАХ

*А.В. Асатрян, А.К. Андриасян, Ш.А. Тоноян,  
Е.Ш. Мамасакхлисов, В.Ф. Морозов*

*Ереванский государственный университет*

*sh.tonoyan@ysu.am*

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается теория перехода спираль-клубок в гетерогенных биополимерах (полипептидах и полинуклеотидах). Теория основана на Обобщенной Модели Полипептидной Цепи (ОМПЦ) с применением метода отжига с ограничениями (constrained annealing). Получено выражение для свободной энергии гетерополимера через соответствующим образом усредненную трансфер-матрицу гомополимерной модели. На этой основе получены выражения для параметра порядка. Получен алгоритм построения кривых плавления (включая и дифференциальные кривые плавления) гетерогенных биополимеров. Показано уширение интервала перехода по отношению к гомополимерному.

**Ключевые слова:** переход спираль-клубок, гетерополимер, бимодальная гетерогенность, ОМПЦ, метод отжига с ограничениями.

## **1. Введение**

Явление перехода спираль-клубок как переход порядок-беспорядок в биополимерах интенсивно исследовалось, начиная с 1960-х годов [1–7] и до сих пор является предметом пристального внимания [8–15]. Чаще всего переход спираль-клубок моделируется в приближении двух состояний на основе различных модификаций модели Зимма–Брегга, в основе которых, в свою очередь, лежит модель Изинга [16–19]. Альтернативный подход состоит в расчете свободной энергии одномерного раствора стыков между спиральными и клубкообразными участками [6]. Эти теории являются среднеполевыми в том смысле, что гамильтониан модели содержит параметры, уже усредненные по конформациям макромолекулы и растворителя. Так, например, параметр кооперативности вводится как статистический вес стыка между клубкообразными и спиральными участками [6]. Однако, различными авторами представлялись некоторые теоретические модели как для полипептидов [20–22], так и для полинуклеотидов [9–13], без использования приближения среднего поля. Более того, некоторые модели применялись для описания плавления гетерополимеров и на их основе получен ряд важных результатов [1–19]. Однако некоторые проблемы остаются неизученными. В частности, описание плавления гетерополимера не рассматривалось с микроскопической точки зрения.

В предыдущих наших публикациях [23–27] была представлена микроскопическая модель, описывающая переход спираль-клубок, в основу которой положена модификация модели Поттса с многочастичным взаимодействием. Данная модель названа обобщенной моделью полипептидной цепи (ОМПЦ). В рамках этой модели для гомополимеров получен ряд принципиальных результатов. На основе ОМПЦ с применением микроканонического метода нами был получен ряд интересных результатов для гетерополимерного случая [28]. В данной работе метод отжига с ограничениями развит для аналитического описания

кривых перехода в биополимерах с двумя типами повторяющихся единиц. Для описания гомополимерной задачи, используется уже многократно применявшаяся модель ОМЩ [23–27, 33–34] в том числе и для гетерополимерного случая [28]. Далее нами была рассмотрена проблема перехода спираль-клубок с гетерогенностью по энергии образования пар оснований [33] и гетерогенностью по числу конформаций [34] с использованием метода отжига с ограничениями (constrained annealing) [29].

## 2. Метод отжига с ограничениями

Для исследования перехода спираль-клубок с гетерогенностью по энергиям нами был использован подход, разработанный М. Serva и G. Paladin в [25]. Следуя [25], свободная энергия системы с замороженной случайной последовательностью повторяющихся единиц оценена на основании отожденного среднего статистической суммы с соответствующими ограничениями. Данный подход является вариационным и может быть реализован с использованием неопределенных множителей Лагранжа. Согласно [25], свободная энергия может быть оценена как

$$f \geq g(T, \mu) \geq f_A \quad (2.1)$$

где  $f$  и  $f_A$  – замороженная и отоженная свободная энергии из расчета на нуклеотид, соответственно:

$$g(T, \mu) = -\frac{1}{N} k_B T \ln \langle Z(seq) \exp^{-N\mu\alpha(seq)} \rangle_{av} \quad (2.2)$$

Здесь  $Z(seq)$  – статистическая сумма биополимера с замороженной реализацией последовательности  $seq$ , а  $\alpha(seq)$  – соответствующая усредняемая замороженная величина. Здесь  $\langle \dots \rangle_{av}$  означает среднее по функции распределения для последовательности. В дальнейшем данный подход будем называть методом «отжига с ограничениями».

### 3. Вычисление свободной энергии

Рассмотрим гетерополимер, состоящий из повторяющихся единиц двух сортов, например, для ДНК – GC-и AT-пар. При этом, предполагается, что сорта повторяющихся единиц выбираются статистически независимо. Свободная энергия такой системы выражается в виде

$$F = -k_B T \langle \ln Sp \prod_{i=1}^N G_i \rangle \quad (3.1)$$

Здесь  $G_i$  – трансфер-матрица

$$G_i = \begin{pmatrix} e^{J_i} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{K_i} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & e^{K_i} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

где,  $U_i$  – энергия образования водородной связи  $i$ -й компоненты гетерополимера,  $K_i = \ln Q_i$  и  $Q_i$  – число состояний  $i$ -й компоненты [10–14].

Причем  $G_i = G_A$  с вероятностью  $x$  и  $G_i = G_B$  с вероятностью  $1-x$ .

Введем спиновую переменную  $\sigma = \pm 1$  таким образом, что

$$G(\sigma_i = 1) = G_A, G(\sigma_i = -1) = G_B \quad (3.3)$$

При этом,  $\langle \sigma_i \rangle_{av} = 2x - 1$ , где  $x$  – доля повторяющихся единиц типа  $A$ . Таким образом, первичная структура будет выражена последовательностями чисел  $\pm 1$ . Тогда

$$J_i = J_0 + \sigma_i \Delta J, K_i = K_0 + \sigma_i \Delta K, \quad (3.4)$$

где  $J_0 = \frac{J_A + J_B}{2}$ ,  $\Delta J = \frac{J_A - J_B}{2}$ ,  $K_0 = \frac{K_A + K_B}{2}$ ,  $\Delta K = \frac{K_A - K_B}{2}$ . Тогда, согласно работе [29] и формуле (3.1)

$$F = -k_B T \ln Sp \langle x \exp^{-\alpha A \nu} G_A + (1-x) \exp^{\alpha B \mu} G_B \rangle^N, \quad (3.5)$$

где  $\mu$  – вариационный параметр, а  $\alpha$  – определяют ограничение, которое выбирается простейшим способом:  $\alpha(\sigma) = \sum_i (\sigma_i - \langle \sigma_i \rangle)$ . Отсюда, после

несложных преобразований [30] в термодинамическом пределе, имеем:

$$g(\mu) = \frac{-F(\mu)}{Nk_B T} = \mu \langle \sigma_i \rangle + \ln(x \exp^{-\mu} + (1-x) \exp^{\mu}) + \ln \lambda_i(\exp^J, \exp^K) \quad (3.6)$$

где  $\lambda_1$  – максимальное собственное число трансфер-матрицы  $G(e^J, e^K)$ , а

$$\begin{aligned} \exp^J &= \frac{\langle \exp^{(1+\mu)J_i} \rangle}{\langle \exp^{\mu J_i} \rangle} = \exp^{J_0} \frac{x \exp^{-\mu+\Delta J} + (1-x) \exp^{\mu-\Delta J}}{x \exp^{\Delta J} + (1-x) \exp^{-\Delta J}} \\ \exp^K &= \exp^{K_0} \frac{x \exp^{-\mu+K} + (1-x) \exp^{\mu-K}}{x \exp^{-\mu+(1-x)} \exp^{\mu}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Поскольку выражение (2.1) дает нижнюю оценку свободной энергии цепи с замороженной последовательностью, нам необходимо найти максимум свободной энергии  $F(\mu)$  или минимум приведенной свободной энергии (3.6) по параметру  $\mu$ . Поэтому значение вариационного параметра определяется соотношением

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} = 0 \quad (3.8)$$

Для этого мы строим зависимость  $g(T, \mu)$  от  $\mu$  при фиксированной температуре и находим значение  $\mu$ , соответствующее минимуму приведенной свободной энергии. Перебрав все значения температуры в окрестности перехода спираль-клубок, у нас будут все соответствующие значения параметра  $\mu$ , что позволит, согласно выражению (3.7), получить усредненное значение параметров трансфер матрицы (3.2), после чего вычислить приведенную свободную энергию (3.6). Таким образом, для каждой температуры мы будем иметь соответствующее значение свободной энергии.

#### 4. Степень спиральности

Из определения степени спиральности  $\theta$ , как параметра порядка, следует [23, 24, 30]

$$\theta = \frac{\partial g(\mu)}{\partial J_0} = \frac{\partial \ln \lambda_1}{\partial J_0} \quad (4.1)$$

Для получения температурного поведения степени спиральности можно воспользоваться численным дифференцированием выражения главного собственного числа  $\lambda_1$  по обратной температуре, однако можно воспользоваться унитарным преобразованием трансфер матрицы и получить аналитическое выражение для степени спиральности  $\theta$ , что в рамках ОМПЦ для гетерополимера [2, 3, 24] определяется аналогично гомополимеру соотношением

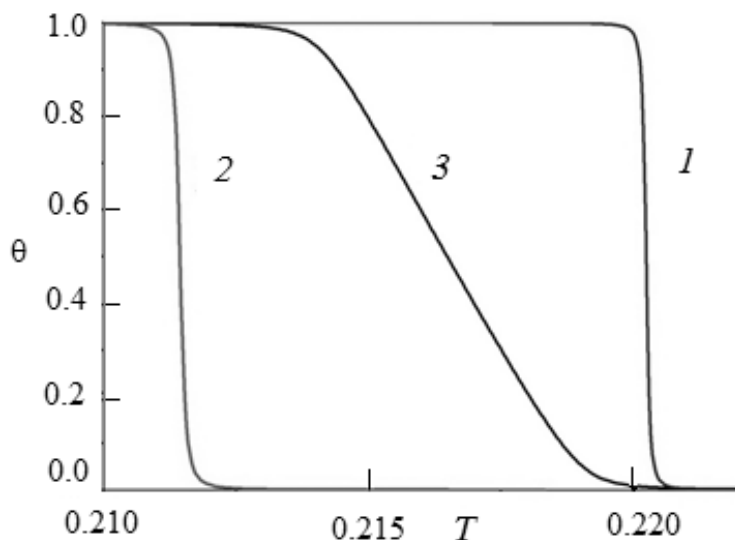
$$\theta = \frac{(UG'V)_{11}}{\lambda_1}. \quad (4.2)$$

Здесь  $U$  и  $V$  – левые и правые собственные векторы матрицы  $\tilde{G}$  с переопределенными согласно (3.7) параметрами  $e^J$  и  $e^K$ . Матрица  $\tilde{G}'$  определяется как матрица  $\tilde{G}$  с элементами равными нулю, кроме элемента 1,1:  $\tilde{G}'_{ij} = \tilde{G}_{ij} \delta(i,1) \delta(j,1)$ .  $\lambda_1$  – максимальное собственное число для матрицы  $\tilde{G}$ . Итак, для гетерополимера каждому значению температуры соответствует параметр  $\mu$ , затем вычисляется  $\theta$ . Таким образом, на основе приближения отжига с ограничениями в общем виде получен алгоритм вычисления кривых плавления двухкомпонентного случайного гетерополимера с различными соотношениями между компонентами. Алгоритм позволяет предсказывать точку и интервал плавления такой системы, как ДНК с различным GC-составом. Следует отметить, что данный подход может быть применен и к большему числу компонент.

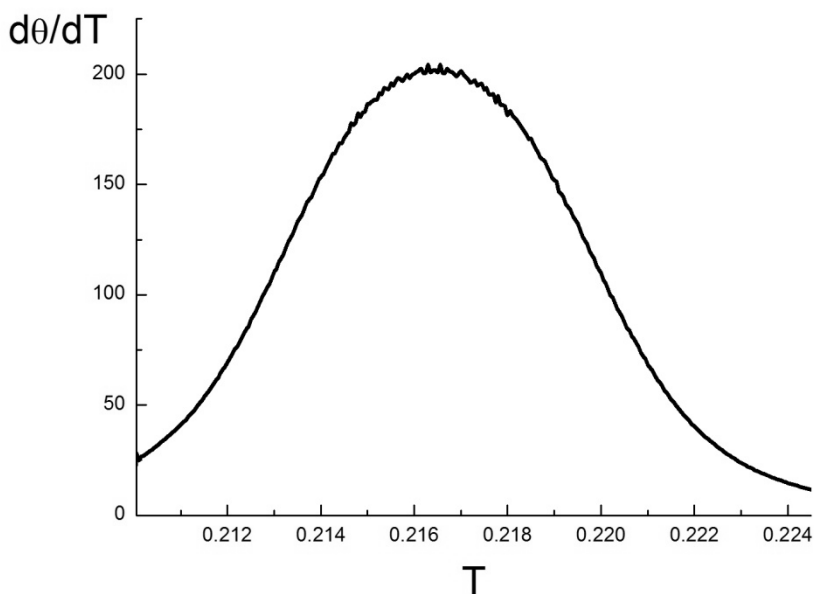
## 5. Результаты и обсуждения

На рис. 1 изображена кривая перехода спираль-клубок в гомополимере из повторяющихся единиц типа  $A$  (1) и кривая для гомополимера из повторяющихся единиц типа  $B$  (2), а также кривая для случайного гетерополимера ( $AB$ ) (3).

Из кривых плавления видно, что интервал перехода для гетерополимера значительно больше, чем гомополимера. Более того, расчет показывает, что интервал плавления гетерополимера остается достаточно большим даже при пренебрежении интервалом плавления гомополимера [30].



**Рис. 1.** Кривые зависимости степени спиральности  $\theta(T)$  от температуры  $T$  при следующих параметрах теории:  $Q_A=71$ ,  $Q_B=51$ ,  $U_A=1$ ,  $U_B=0.8$ ,  $x=0.4$  и  $\Delta=4$ : 1 – кривая плавления для гомополимера  $B$ , 2 – кривая плавления для гомополимера  $A$ , 3 – кривая плавления для гетерополимера, состоящего из мономеров  $A$  и  $B$ .

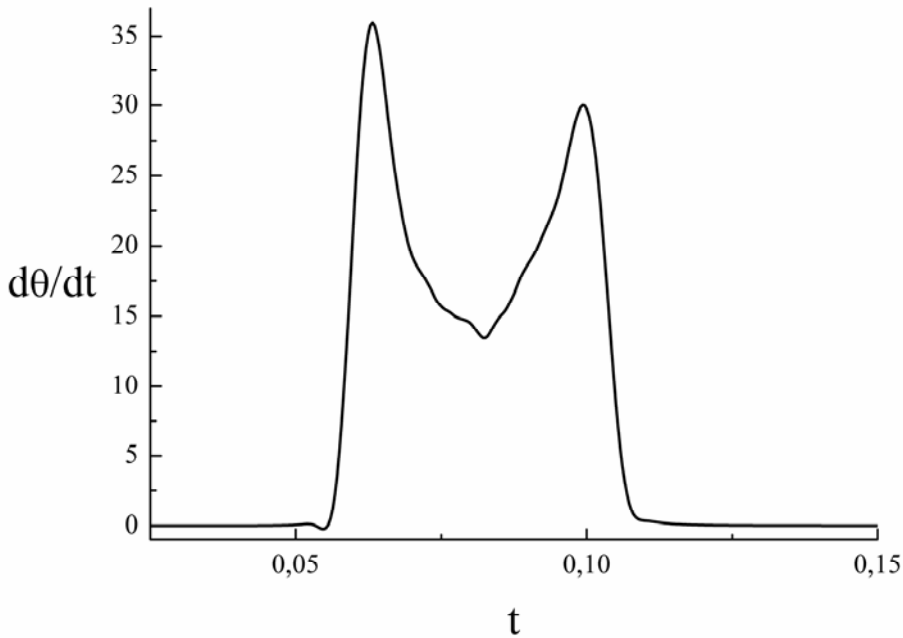


**Рис. 2.** Кривые зависимости ДКП дифференциальной кривой плавления  $\frac{\partial \theta}{\partial T}$  от температуры  $T$  при следующих параметрах теории  $Q_A=71$ ,  $Q_B=51$ ,  $U_A=1$ ,  $U_B=0.8$ ,  $x=0.4$  и  $\Delta=4$ : 1 – кривая плавления для гомополимера  $B$  2 – кривая плавления для гомополимера  $A$ , 3 – кривая плавления для гетерополимера, состоящего из мономеров  $A$  и  $B$ .

Для большей наглядности мы построили дифференциальную кривую плавления при тех же параметрах (рис. 2) путем численного дифференцирования кривой 1. Мы также провели анализ кривых плавления для случая гетерогенности с числом компонентов больших, чем 2, однако качественно кривые плавления не сильно отличаются от бинарного случая. Во всех случаях кривая плавления гетерополимера лежит между кривой с максимальной и минимальной температурами плавления соответствующих гомополимеров [30]. Расчеты дифференциальных кривых плавления показали, что эти кривые могут иметь один или максимум два пика при любом значении числа компонент  $n$  поэтому



случай  $n=2$  качественно отражает плавление гетерополимера (рис. 2). Отличие дифференциальных кривых плавления заключается только в том, что при большем числе компонентов два пика проявляется более резко (рис. 3). Для качественного исследования поведения гетерополимера (определение точки и интервала плавления), поэтому  $n=2$  для наших рассуждений достаточен.



**Рис. 3.** Кривая зависимости ДКП дифференциальной кривой плавления трехкомпонентного гетерополимера  $\frac{\partial \theta}{\partial T}$  от температуры  $T$  при следующих параметрах

$$\begin{aligned} \text{теории: } x_A=0.4, x_B=0.2, x_C=1-0.4-0.2=0.4, \\ U_A=0.53, U_B=0.2, U_C=0.3, Q_A=71, Q_B=51, Q_C=61. \end{aligned}$$

Итак, поскольку бимодальная гетерогенность в рамках нашего подхода выявляет все качественные закономерности кривых плавления, мы в дальнейшем будем останавливаться на этом простом случае.

Далее, мы получили кривые плавления для бимодально гетерогенных биополимеров, гетерогенность которых обусловлена либо только различием энергий водородного связывания, либо гетерогенностью по числу конформаций. Если параметры энергий  $J$  и числа конформаций  $Q$  были выбраны таким образом, чтобы при обоих типах гетерогенности гомополимерные температурные кривые были бы идентичны для этих двух типов гетерогенности. Показано, что общие свойства кривых плавления совпадают, в обоих случаях интервал плавления примерно одинаков. Дальнейшие исследования предполагают изучения свойств плавления гетерополимеров на основе данного подхода с учетом взаимодействия с растворителем, как это нами было сделано для гомополимерного случая.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Poland D., Scheraga H. The Theory of Helix-Coil Transition. Academic, New York, 1970.
2. Grosberg Yu., Khokhlov A. Statistical Physics of Macromolecules, AIP, New York, 1994.
3. Cantor R., Shimmel T. Biophysical Chemistry. Freeman, San Francisco, 1980.
4. Flory P. Statistical Mechanics of Chain Molecules. Interscience, New York, 1969.
5. Wartell R., Benight A. Thermal denaturation of DNA molecules: A comparison of theory with experiment. Phys. Rep., 126, 67 (1985).
6. Vedenov A., Dykhne A., Frank-Kamenetskii M. The helix-coil transition in DNA. Usp. Fiz. Nauk (Russian), 105, 479 (1971).

7. *Wada A., Suyama A.* Local stability of DNA and RNA secondary structure and its relation to biological functions. *Prog. Biophys. Mol. Biol.*, 47, 113 (1986).
8. *Chalikian T.* Hydrophobic tendencies of polar groups as a major force in molecular recognition. *Biopolymers*, 70, 492 (2003).
9. *Garel T., Monthus C., Orland H.* A simple model for DNA denaturation. *Europhys. Lett.*, 55, 132 (2001).
10. *Cule D., Hwa T.* Denaturation of heterogeneous DNA. *Phys. Rev. Lett.*, 79, 2375 (1997).
11. *Baiesi M., Carlon E., Orlandini E., Stella A.* The helix-coil transition in heterogeneous double stranded DNA: Microcanonical method. E-print cond-mat/ 0207122.
12. *Peyrard M.* Nonlinear dynamics and statistical physics of DNA. *Nonlinearity*, 17, R1 (2004).
13. *Barbi M., Lepri S., Peyrard M., Theodorakopoulos N.* Thermal denaturation of a helicoidal DNA model. *Phys. Rev. E*, 68, 061909 (2003).
14. *Takano M., Nagayama K., Suyama A.* Investigating a link between all-atom model simulation and the Ising-based theory on the helix-coil transition: Equilibrium statistical mechanics. *J. Chem. Phys.*, 116, 2219 (2001).
15. *Munoz V., Serrano L.* Development of the multiple sequence approximation within the AGADIR model of  $\alpha$ -helix formation: Comparison with Zimm- Bragg and Lifson-Roig formalisms. *Biopolymers*, 41, 495 (1997).
16. *Zimm B., Doty P. and Iso K.* Determination of the parameters for helix formation in poly- $\gamma$ -benzyl-L-Glutamate. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 45, 1601 (1959).
17. *Zimm B., Bragg J.* Theory of the phase transition between helix and random coil in polypeptide chains. *J. Chem. Phys.*, 31, 526 (1959).

18. *Zimm B.*, *Chem J.* Theory of “Melting” of the helical form in double chains of the DNA type. *Phys.*, 33, 1349 (1960).
19. *Zimm B.*, *Rice N.* The helix-coil transition in charged macromolecules. *Mol. Phys.*, 3, 391 (1960).
20. *Lifson S.*, *Roig A.* On the theory of helix-coil transition in polypeptides. *J. Chem. Phys.*, 34, 1963 (1961).
21. *Lifson S.*, *Zimm B.* Biopolymers, Simplified theory of helix-coil transition in DNA based on a grand partition function. 1, 15 (1963).
22. *Lifson S.*, *Allegra J.* On the theory of order-disorder transition and copolymer structure of DNA. *Biopolymers*, 2, 65 (1964).
23. *Morozov V.*, *Mamasakhlisov E.*, *Hayryan Sh.*, *Hu C.* Microscopical approach to the helix-coil transition in DNA. *Physica A*, 281, 51 (2000).
24. *Morozov V.*, *Badasyan A.*, *Grigoryan A.*, *Sahakyan M.*, *Mamasakhlisov E.* Stacking and hydrogen bonding: DNA cooperativity at melting. *Biopolymers*, 75, 434 (2004).
25. *Царукян А.В.*, *Тоноян Ш.А.*, *Бадасян А.В.*, *Григорян А.В.*, *Мамасакхлисов Е.Ш.*, *Морозов В.Ф.* Параметры порядка перехода спираль-клубок в биополимерах. Изд-во НАН Армении, Физика, 41, 63 (2006).
26. *Тоноян Ш.А.*, *Бурякина Т.Ю.*, *Царукян А.В.*, *Мамасакхлисов Е.Ш.*, *Морозов В.Ф.* Изд-во НАН Армении, Физика, 42, 466 (2007).
27. *Тоноян Ш.А.*, *Мирзаханян А.С.*, *Айрапетян Г.Н.*, *Царукян А.В.*, *Морозов В.Ф.* Обобщенная модель полипептидной цепи для перехода спираль-клубок в двухкомпонентном растворителе. Изд-во НАН Армении, Физика, 45, 133 (2010).
28. *Badasyan A.*, *Grigoryan A.*, *Mamasakhlisov E.*, *Benight A.*, and *Morozov V.* The helix-coil transition in heterogenous double-stranded DNA: Microcanonical method. *J. Chem. Phys.*, 123, 194701 (2005).
29. *Serva M.*, *Paladin G.* Gibbs thermodynamic potentials for disordered systems. *Phys. Rev. Lett.*, 70, 105 (1993).

30. *Թոնոյան Մ.Ս., Միրզախանյան Ա.Ս., Մամսահլիսով Ե.Ս., Մորոզով Վ.Փ.*  
К теории перехода спираль-клубок в гетерогенных биополимерах.  
Метод отжига с ограничениями. Изд-во НАН Армении, Физика, 48,  
350 (2013).

**HELIX-COIL TRANSITION IN HETEROGENEOUS BIOLOGICAL  
MACROMOLECULES**

*Asatryan A., Andriasyan A., Tonoyan Sh., Mamasakhlisov Y.,  
Morozov V.*

**ABSTRACT**

Theory of helix-coil transition is considered in heterogen biopolymers (polypeptides and polynucleotides). This theory is based on Generalized Model of Polypeptide Chain (GMPC) with the application of constrained annealing method. The formula of heteropolymer's free energy is obtained through transfer-matrix of homopolymeric model averaged by corresponding way. On that bases formulas are reached for order parameter. Algorithm of melting curves has been gained (including differential melting curves) for biopolymers. Broadening of transition interval has been shown with comparison to homopolymeric one.

**ՀԵՏԵՐՈԳԵՆ ԿԵՆՍԱԲԱՆԱԿԱՆ ՄԱԿՐՈՄՈԼԵԿՈՒԼՆԵՐՈՒՄ  
ՊԱՐՈՒՅՐ-ԿԾԻԿ ԱՆՅՈՒՄԸ**

*Ա. Վ. Բատրյան, Ա. Կ. Անդրիասյան, Շ. Ս. Տոնոյան,  
Ե. Շ. Մամսահլիսով, Վ. Ֆ. Մորոզով*

**ԱՍՓՈՓՈՒՄ**

Հետերոգեն կենսապոլիմերներում (պոլիպեպտիդներ և պոլինուկլեոտիդներ) դիտարկվել է պարույր-կծիկ անցման տեսությունը: Տեսությունը

հիմնված է պոլիպեպտիդային շղթայի ընդհանրացված մոդելի (ՊՇԸՄ) սահմանափակումներով թրձման մեթոդի կիրառմամբ: հետերոպոլիմերի ազատ էներգիայի արտահայտությունը ստացվել է, համապատասխան կերպով միջինացված, հոմոպոլիմերիկ մոդելի տրանսֆեր-մատրիցայի միջոցով: Դրա հիման վրա ստացվել են կարգի պարամետրի արտահայտությունները: Կեվսապոլիմերների համար ստացվել է հալման կորերի (ներառյալ դիֆերենցիալ հալման կորերը) կառուցման ալգորիթմը: Համեմատած հոմոպոլիմերիկ կորի հետ՝ ցույց է տրվել հալման ինտերվալի լայնացում:

УДК 621.315

# ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ РЕКОМБИНАЦИИ НА НАПРЯЖЕНИЕ ХОЛОСТОГО ХОДА НАНОПРОВОЛОКИ ИЗ АРСЕНИДА ГАЛЛИЯ

*В.А. Хачатрян*

*Российско-Армянский университет*

*vars.khachatryan1990@gmail.com*

## АННОТАЦИЯ

В работе представлена аналитическая модель нанопроволоки (НП) из GaAs с радиальным p-n-переходом, имеющим структуру типа ядро-оболочка. Данная модель позволяет изучить влияние поверхностной рекомбинации на фотоэлектрические характеристики солнечного элемента (СЭ) на основе НП. Результаты показывают, что малое напряжение холостого хода, часто наблюдаемое для подобных солнечных элементах, частично вызвано явлением поверхностной рекомбинации на боковой стенке НП. Причем, влияние поверхности возрастает наряду с ростом радиуса НП, что связано с увеличением отношения поверхности к объему.

**Ключевые слова:** арсенид галлия, поверхностная рекомбинация, нанопроволока, солнечный элемент.

## 1. Введение

В настоящее время интенсивно исследуются полупроводниковые НП с большим отношением длина/радиус, также проводятся разработки полевых транзисторов нового поколения, датчиков и СЭ [1–3] на их

основе. Методы синтеза НП, в частности метод роста пар-жидкость-кристалл, достигли такого уровня, что позволяют включить в полупроводниковую матрицу несколько материалов и сформировать единичную или массив НП с осевым или радиальным р-п-гомо (гетеро)- переходом. Это открывает новые возможности для понимания и использования таких уникальных физических свойств указанных систем, как: электрические или фотоэлектрические свойства, биологическая и химическая чувствительность, возникающие, главным образом, из большого отношения поверхности к объему [4]. НП соединения  $A^{III}B^V$  могут выращиваться на несогласованных подложках, таких, как: Si, для реализации недорогих, но высокоэффективных фотоэлектрических устройств. Сообщается о многих недавних достижениях в выращивании наноструктур как на основе кремния, так и соединений типа  $A^{III}B^V$  [5].

Одним из наиболее известных явлений в НП является чувствительность к свету, которая позволяет эффективно использовать их в качестве фотодетекторов и СЭ. Особый интерес представляют коаксиальные структуры, в которых легированное НП-ядро окружено оболочкой противоположного типа легирования, образуя р-п-переход в радиальном направлении. Общая физика устройства более или менее идентична физике стандартного СЭ с дополнительными преимуществами, заключающимися в том, что р-п-переход располагается вдоль длины НП, в результате, разделение носителей заряда происходит в радиальном направлении, а поглощение падающего излучения в более длинном – осевом направлении. Другими словами, такая вертикально выровненная НП позволяет получить взаимно перпендикулярные направления поглощения света и сбора носителей и, следовательно, обеспечить эффективный сбор носителей в оптически толстой НП.

Экспериментально доказано, что радиальная структура СЭ позволяет получать отличный фотовольтаический эффект и поэтому может



использоваться как источник энергии для различных наномасштабных электронных и оптоэлектронных устройств [6].

Однако все экспериментальные реализации СЭ на основе НП из GaAs показывают низкие значения напряжения холостого хода  $V_{oc}$  (менее 0,4 В при стандартных условиях освещения AM 1.5G) по сравнению с обычными одиночными или поликристаллическими планарными элементами, где  $V_{oc}$  типично 0,6–0,7 В [7].

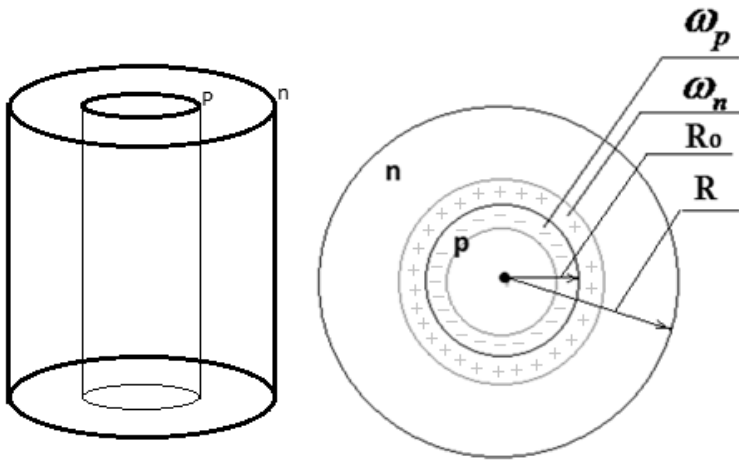
Два физических эффекта могут быть ответственны за уменьшение абсолютной величины  $V_{oc}$  в радиальном СЭ. Во-первых, оптимальные структуры СЭ должны иметь радиус ядра и оболочки, приблизительно равные диффузионным длинам неосновных носителей, также их уровень легирования должен быть достаточно высоким, чтобы НП данного радиуса не исчерпывалась полностью. При радиусе НП меньше ширины истощения, падение напряжения на р-п-переходе быстро уменьшается при уменьшении радиуса. Во-вторых, малое значение  $V_{oc}$  вызвано высоким уровнем рекомбинации фотоносителей в области объемного заряда и на боковой поверхности. Роль поверхностной рекомбинации увеличивается при увеличении отношения поверхности к объему НП. Поскольку введение *i*-слоя между р-ядром и п-оболочкой в экспериментальных структурах СЭ не приводит к значительному улучшению  $V_{oc}$  [6, 8], в настоящей работе рассматривается поверхностная рекомбинация как основной механизм, вызывающий спад значения  $V_{oc}$ .

## 2. Описание модели

В работе рассматривается нанопроволока с радиальным р-п переходом из GaAs, которая показана на рисунке 1.

Рассматриваемая НП имеет радиус  $R$  и ядро с р-типом проводимости радиуса  $R_0$ . Нанопроволока освещается сверху, и свет поглощается в п- и р- областях, а также в слое пространственного заряда, в резуль-

тате чего имеет место генерация неравновесных носителей заряда. Неравновесные носители заряда, созданные в нанопроволоке, будут разделяться в поперечном направлении существующим в нем р-п переходом. Разделенные р-п переходом фотоносители участвуют в формировании фототока. В тех случаях, когда радиус НП меньше диффузионной длины, объемные рекомбинационные потери малы, но в этом случае большую роль играют рекомбинационные потери через поверхностные центры.



**Рис. 1.** Нанопроволока с радиальным р-п переходом (вид сбоку и сверху).

Для обеспечения полного поглощения света необходимо, чтобы длина нанопроволоки была больше глубины проникновения света  $\alpha^{-1}$ . В этих условиях можно обеспечить максимальное поглощение света и разделение носителей заряда.

В дальнейших расчетах рассматривается спектр солнечного излучения АМ0, который представляет из себя излучение абсолютно черного тела при температуре  $T_c=5800$  °К. Следовательно, плотность падающего потока фотонов равна [9]:

$$\frac{\Delta N_{Ph}}{\Delta \lambda} = \frac{A}{\lambda^4 (e^{\frac{b}{\lambda T_c}} - 1)}, \quad (1)$$

где  $A = 2\pi hc^2 (R_c / r)^2 = 4.05 \cdot 10^4 \text{ м / сек}$ ,  $b = hc / k = 1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$ ,  $R_c = 6.96 \cdot 10^8 \text{ м}$  – радиус Солнца и  $r = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ м}$  – среднее расстояние между Солнцем и Землей,  $h$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света,  $k$  – постоянная Больцмана.

Таким образом, коэффициент генерации электрон-дырочных пар в точке  $z$  равен:

$$\Delta G = \alpha(\lambda) \cdot e^{-\alpha(\lambda)z} \cdot \Delta N_{Ph}(1 - R), \quad (2)$$

где  $\alpha$  – коэффициент поглощения и  $R$  – коэффициент отражения.

Для расчета фототока в радиальном р-п переходе необходимо определить зависимость между высотой потенциального барьера и шириной области объемного заряда.

Для определения зависимости потенциала от координаты необходимо решить уравнение Пуассона в цилиндрических координатах [9]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \begin{cases} -\frac{eN_D}{\epsilon \epsilon_0}, R_0 \leq r \leq R_0 + \omega_n \\ +\frac{eN_A}{\epsilon \epsilon_0}, R_0 - \omega_p \leq r \leq R_0 \end{cases}, \quad (3)$$

$$\left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=R_0+\omega_n} = 0, \quad \left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=R_0-\omega_p} = 0, \quad (4)$$

$$\varphi(R_0 + \omega_n) = -\varphi_0, \quad \varphi(R_0 - \omega_p) = 0.$$

Используя соответствующие стандартные граничные условия (4), где  $\omega_n$  и  $\omega_p$  – ширины области объемного заряда в n- и p- областях соответственно,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость,  $e$  – элементарный заряд и  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная,  $N_A$  и  $N_D$  – уровни легирования областей ядра и оболочки, окончательно для  $\omega_p$  получим [11]:

$$\gamma \frac{V_{bi} - V}{V_T} = x \ln x + (2 - x) \ln(2 - x), \quad (5)$$

где введены обозначения:  $x = \left(1 - \frac{\omega_p}{R_0}\right)^2$ ,  $\gamma = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 V_T}{e^2 N_A R_0^2}$ ,  $V_{bi} = \frac{kT}{e} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2}$  и  $V_T$  –

тепловой потенциал ( $V_T = kT/e$ ),  $n_i$  – собственная концентрация.

Для GaAs ( $n_i = 2,1 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-3}$ ) с уровнем легирования  $N_A = N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  при комнатной температуре получим:

$$V_{bi} = \frac{kT}{e} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} \approx 0,9V.$$

Определяя значение  $x_0$  из уравнения (5), найдем ширины ОПЗ в n- и p- областях НП:

$$\begin{aligned} \omega_p &= R_0 \cdot (1 - \sqrt{x_0}), \\ \omega_n &= R_0 \cdot (\sqrt{2 - x_0} - 1). \end{aligned} \quad (6)$$

### 3. Вольт-амперная характеристика

Рассмотрим НП, которая излучается сверху световым потоком (1). Решая уравнение непрерывности для n и p областей с учетом соответствующих граничных условий, получим [11]:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{e} \frac{dj_n}{dr} + dG - \frac{\Delta n}{\tau_n} = 0, \quad 0 \leq r \leq R_0 - \omega_p, \quad -\frac{1}{e} \frac{dj_p}{dr} + dG - \frac{\Delta p}{\tau_p} = 0, \quad R_0 + \omega_n \leq r \leq R \quad (7) \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta n(0) = const \\ \Delta n(R_0 - \omega_p) = n_p (e^{\frac{eV}{kT}} - 1) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta p(R_0 + \omega_n) = p_n (e^{\frac{eV}{kT}} - 1) \\ D_p \left. \frac{d\Delta p}{dr} \right|_{r=R} = S_p (p - p_n) \end{array} \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

где  $\Delta n$  и  $\Delta p$  – концентрации неравновесных носителей заряда,  $S_p$  – скорость поверхностной рекомбинации,  $\tau_{n,p}$  – время жизни неосновных носителей,  $V$  – приложенное падение напряжения,  $T = 300\text{K}$ .

Таким образом, для фототока в p- и n- квазинейтральных областях получим:

$$\begin{aligned}\Delta I_{n_i}^{(\lambda)} &= 2\pi e D_n \beta_1 \frac{I_1(\beta_1)}{I_0(\beta_1)} \tau_n (1 - e^{-\alpha L}) \Delta N_{Ph}, \\ \Delta I_{p_i}^{(n)} &= 2\pi \beta_2 e D_p \frac{(f_4 - f_5) S' - f_3}{f_2 \cdot S' - f_1} \cdot \tau_p (1 - e^{-\alpha L}) \Delta N_{Ph}.\end{aligned}\tag{9}$$

где введены обозначения:

$$\beta_1 = \frac{R_0 - \omega_p}{L_n}, \beta_2 = \frac{R_0 + \omega_n}{L_p}, \beta_3 = \frac{R}{L_p}, S' = S_p \sqrt{\tau_p / D_p},$$

$L_n, L_p, D_n$  и  $D_p$  – длины и коэффициенты диффузии неосновных носителей.

$$\begin{aligned}f_1 &= K_1(\beta_3) I_0(\beta_2) + K_0(\beta_2) I_1(\beta_3), \\ f_2 &= K_0(\beta_3) I_0(\beta_2) - K_0(\beta_2) I_0(\beta_3), \\ f_3 &= K_1(\beta_3) I_1(\beta_2) - K_1(\beta_2) I_1(\beta_3), \\ f_4 &= K_0(\beta_3) I_1(\beta_2) + K_1(\beta_2) I_0(\beta_3), \\ f_5 &= K_1(\beta_2) I_0(\beta_2) + K_0(\beta_2) I_1(\beta_2).\end{aligned}$$

$I_0, I_1, K_0$  и  $K_1$  – цилиндрические функции Бесселя.

В полупроводниковой НП также имеют место процессы генерации и рекомбинации в слое ОПЗ:

$$\begin{aligned}\Delta I_g^{dep,p} &= \pi e (R_0^2 - (R_0 - \omega_p)^2) \cdot (1 - e^{-\alpha L}) \Delta N_{Ph}, \\ \Delta I_g^{dep,n} &= \pi e ((R_0 + \omega_n)^2 - R_0^2) \cdot (1 - e^{-\alpha L}) \Delta N_{Ph}, \\ I_r^{dep}(V) &= \frac{\pi^2 L n_i R_0 k T}{\sqrt{\tau_n \tau_p} E(R_0)}.\end{aligned}$$

где  $E(R_0) = e N_A R_0 (1 - x_0) / 2 \varepsilon \varepsilon_0$  – максимальное значение электрического поля при  $r = R_0$ .

Следовательно, выражение для полного фототока:

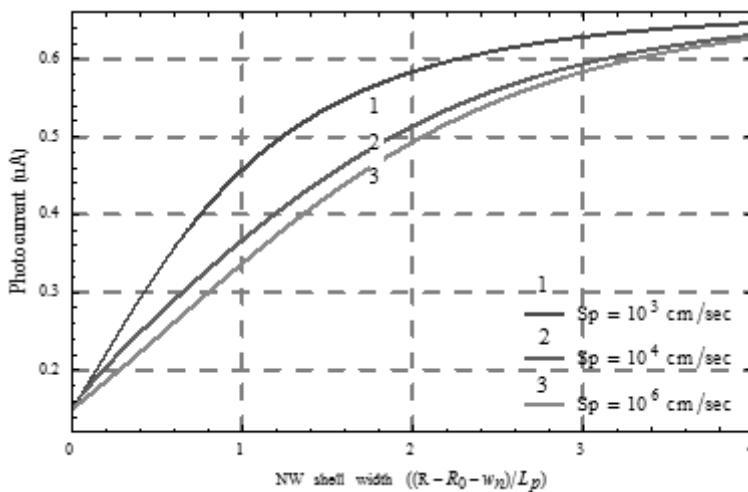
$$I_l^{tot} = 2\pi e \cdot N'_{Ph} \cdot R_0^2 \left[ \frac{\beta_1 D_n \tau_n}{R_0^2} \frac{I_1(\beta_1)}{I_0(\beta_1)} + \frac{\beta_2 D_p \tau_p}{R_0^2} \cdot \frac{(f_4 - f_5) S' - f_3}{f_2 \cdot S' - f_1} + \frac{1}{2} \left( \left( 1 + \frac{\omega_n}{R_0^2} \right) - \left( 1 - \frac{\omega_p}{R_0^2} \right) \right) \right].\tag{10}$$

где  $N'_{Ph} = \int_0^{hc/E_g} \frac{A(1 - e^{-\alpha L})}{\lambda^4 (e^{\frac{b}{\lambda T_c}} - 1)} d\lambda$  – суммарный поток поглощения НП.

#### 4. Результаты и обсуждение

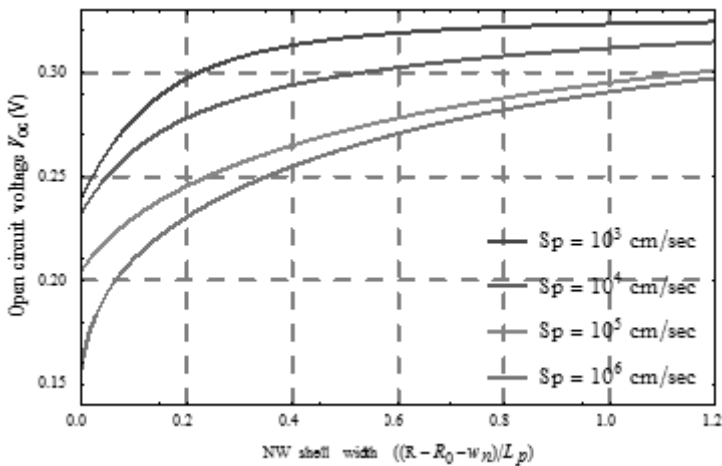
В работе исследована зависимость фототока и напряжения холостого хода от радиуса и скорости поверхностной рекомбинации для СЭ на основе единичной GaAs-НП при различных значениях скорости поверхностной рекомбинации.

Рис. 2 показывает зависимость фототока от радиуса ширины квазинейтральной области оболочки НП. Из графика видно, что с ростом ширины *n*-оболочки имеет место рост значения фототока. Это объясняется ростом области поглощения фотонов и генерации электрон-дырочных пар. Начиная с некоторого значения отношения  $(R-R_0-\omega_n)/L_p$ , фототок достигает насыщения, что обусловлено влиянием объемной рекомбинации. Из рисунка также видно, что имеет место значительное уменьшение значения фототока, связанное с ростом скорости поверхностной рекомбинации: при  $(R-R_0-\omega_n)/L_p=1$  с ростом  $S_p$  с  $10^3$  до  $10^6$  см/сек фототок спадает на  $\approx 29\%$ .



**Рис. 2.** Зависимость фототока от ширины квазинейтральной области оболочки для различных значений скорости поверхностной рекомбинации (GaAs-НП).

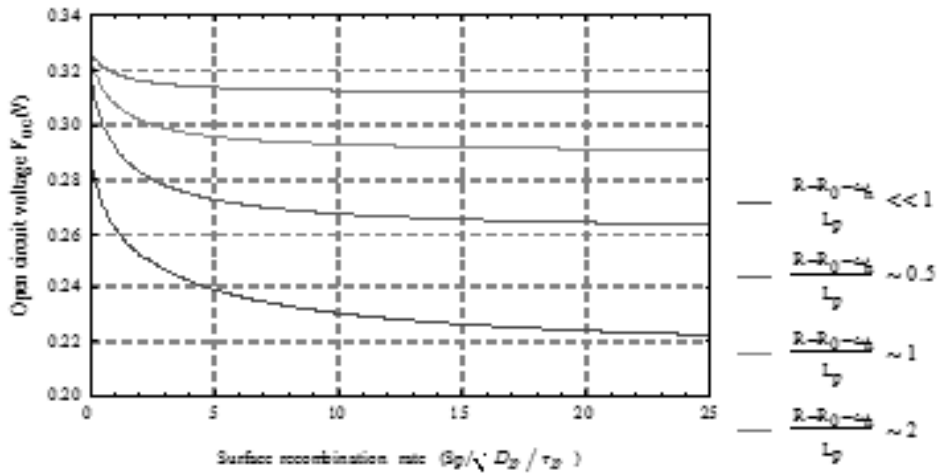
На рис. 3 показано изменение напряжения холостого хода от ширины квазинейтральной области оболочки НП для различных значений скорости поверхностной рекомбинации. На графике видно, что влияние поверхностной рекомбинации велико в области малых радиусов НП, при значениях радиуса больше диффузионной длины, поверхностные эффекты становятся несущественными и значение напряжения холостого хода достигает определенного постоянного значения. Подобный существенный спад значения  $V_{oc}$  под влиянием поверхностной рекомбинации является основной причиной низкого значения КПД в СЭ на основе НП с большим отношением объем/поверхность.



**Рис. 3.** Зависимость напряжения холостого хода от ширины квазинейтральной области оболочки для различных значений скорости поверхностной рекомбинации (GaAs-НП).

На рис. 4 показана зависимость напряжения холостого хода от скорости поверхностной рекомбинации. Влияние поверхности проявляется особенно сильно для НП с радиусами меньше диффузионной

длины. Для НП с радиусом порядка  $L_p$ ,  $2L_p$  спад значения  $V_{oc}$  очень мал.



**Рис. 4.** Зависимость напряжения холостого хода от скорости поверхностной рекомбинации (GaAs-НП).

### Заклучение

Поверхностная рекомбинация приводит к резкому уменьшению фототока и напряжения холостого хода солнечного элемента, что, в свою очередь, влияет на эффективность преобразования. С ростом скорости поверхностной рекомбинации описанные выше явления становятся более существенными.

В работе была изучена одиночная GaAs-НП с радиальным p-n-переходом. Теоретический анализ выполнен для НП с большим диапазоном значений радиуса оболочки. Описана зависимость напряжения холостого хода от скорости поверхностной рекомбинации для НП с различными значениями радиуса, сравнимыми с диффузионными длинами носителей заряда.



## ЛИТЕРАТУРА

1. *Colombo C., Heib M., Gratzel M., Morral A.* Gallium Arsenide p-i-n radial structures for photovoltaic applications. *Appl. Phys. Lett.* 2009, 94, 73108.
2. *Tian B., Zheng X., Kempa T., Fang Y., Yu N., Yu G., Huang J., Lieber Ch.* Coaxial silicon nanowires as solar cells and nanoelectronic power sources. *Nature* 2007, 449. PP. 885–890.
3. *Tsakalakos L., Balch J., Fronheiser J., Korevaar B.* Silicon nanowire solar cells. *Appl. Phys. Lett.* 2007, 91, 233117.
4. *Kelzenberg M., Turner-Evans D., Kayes B., Filler M., Putnam M., Lewis N., Atwater H.* Photovoltaic measurements in single-nanowire silicon solar cells. *Nano Lett.* 2008, 8 (2). PP. 710–714, 2008.
5. *Jin H., Werner P., and Zacharias M.* Semiconductor Nanowires: From Self-Organization to Patterned Growth. *Small* 2006, 2 (6). PP. 700–717.
6. *Tian B., Kempa Th., Lieber Ch.* Single Nanowire photovoltaics. *Chem Soc. Rev.* 2009, 38. PP. 16–24.
7. *Joseph D. Christesen, Xing Zhang, Christopher W. Pinion, Thomas A. Celano, Cory J. Flynn, and James F. Cahoon.* Design Principles for Photovoltaic Devices Based on Si Nanowires with Axial or Radial p–n Junctions. *Nano Lett.* 2012, 12. PP. 6024–6029.
8. *Garnett E., Yang P.* Silicon Radial p-n Junction Solar Cells. *J. Am. Chem. Soc.* 2008, 130. PP. 9224–9225.
9. *Pikus G.* Fundamentals of the theory of semiconductor devices, Publish.: Science, Moscow, 1965.
10. *Petrosyan S., Yesayan A., Nersesyan S.* Theory of NW radial p-n junction. *World Academy of Science Engineering and Technology* 2012, 71, 1065.

## INFLUENCE OF SURFACE RECOMBINATION ON THE OPEN CIRCUIT VOLTAGE OF THE GAAS - NANOWIRE SOLAR CELLS WITH RADIAL P-N JUNCTION

*V. Khachatryan*

### ABSTRACT

We have developed an analytic model for the radial p-n-junction in a GaAs nanowire (NW) core-shell structure to study the impact of surface recombination on photovoltaic performance of NW solar cell with radial p-n junction. It was found that low open circuit voltage experimentally often observed for such solar cells partially can be caused by large surface recombination at the NW sidewall. The role of which is increased as the diameters become smaller and the ratio of NW surface to volume is increased.

**Keywords:** gallium arsenide, surface recombination, nanowire, solar cell.

### ՄԱԿԵՐՆՈՒՅԹԱՅԻՆ ՌԵԿՈՄԲԻՆԱՑԻԱՅԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ GAAS-Ի P-N ԱՆՑՄԱՍԲ ՆԱՆՈԼԱՐԻ ԱՐԵԱՅԻՆ ԲԶԻԶՆԵՐԻ ՖՈՏՈՎՈԼՎԱՆԱՅԻՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՎՐԱ

*Վ. Ա. Խաչատրյան*

### ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատանքում ներկայացված պարզմոդելը՝ GaAs նանոլարը միջուկ-թաղանթ կառուցվածքով, թույլ է տալիս հետազոտել մակերևութային ռեկոմբինացիայի ազդեցությունը արևային բջիջների ֆոտոզավանային պարամետրերի վրա: Աշխատանքի արդյունքում ստացվել է, որ ցածր բաց հոսանքի լարումը նման կառուցվածքներում պայմանավորված է խոշոր մակերեսային ռեկոմբինացիայով, ինչի դերը մեծանում է տրամագծի փոքրացմանը զուգընթաց եւ մակերես/ծավալ հարաբերակցության ավելացմամբ:

**Հիմնաբառեր՝** գալիումի արսենիդ, մակերևութային ռեկոմբինացիա, նանոլար, արևային բջիջ:

# ХИМИЯ

УДК 547.874.789.781

## SYNTHESIS OF BIHETEROCYCLIC SYSTEMS DERIVATIVES BASED ON 4,6-DIAMINO SUBSTITUTED N<sup>1</sup>-(1,3,5-TRIAZIN-2-YL)ETHANE-1,2-DIAMINES

*A.P. Yengoyan<sup>1,2</sup>, Zh. A. Azaryan<sup>1</sup>, V.A. Pivazyan<sup>2</sup>, E.A. Ghazaryan<sup>2</sup>*

*<sup>1</sup>Russian-Armenian University*

*<sup>2</sup>National Agrarian University of Armenia*

*ayengoyan@mail.ru*

### ABSTRACT

On the basis of 4,6-diamino substituted N<sup>1</sup>-(1,3,5-triazin-2-yl)ethane-1,2-diamine the simple, accessible and effective methods for the synthesis of biheterocyclic systems derivatives with a combination of 1,3,5-triazine ring with 1,3-thiazole or imidazole cycle in the same molecule, were carried out.

**Keywords:** 1,3,5-triazine, 1,3-thiazole, imidazole, heterocyclization,

### Introduction

Derivatives of five- and six-membered heterocycles exhibit a wide diversity of biological activity. A large number of compounds synthesized

on the basis of 1,3,5-triazine, imidazole and 1,3-thiazole are used in medicine [1] and industry.

In agriculture the 1,3,5-triazine derivatives are widely used, mainly to control weeds. These include chloro-, fluoroalkyl-, methoxy- and methylthio substituted triazines, triazinone derivatives. A special place is occupied by triazinylsulfonyleurea herbicides, which are characterized by high efficiency, very low application rates and low toxicity [2].

The spectrum of pesticidal activity of 1,3-thiazole derivatives is much more diverse. Among them the chemical means of plant protection are known, which are used as fungicides (ethaboxam, isotianil, metsulfosax, othilone, thiabendazole, thifluzamide, flutianil, thiadiflour), insecticides (clothianidin, imidacloprid, thiamethoxam, thiapronil, tazimcarb, thiacloprid) and bactericides (amicathiazol) [2].

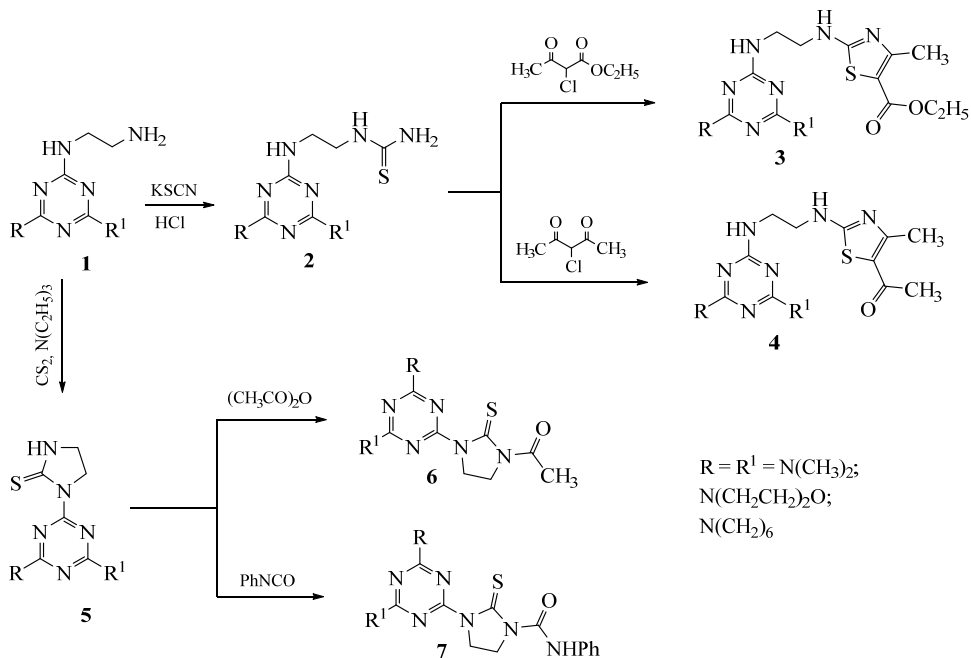
Preparations synthesized on the basis of imidazole also take a worthy place among the pesticides used. A series of imidazole derivatives are known and widely used as fungicides (cyazofamid, fenamidone, fenapanil, glyodin, iprodione, isovaldione, pefurazoate, triazoxide) and herbicides (imazamethabenz, imazamox, imazapic, imazapyr, imazaquin, imazethapyr) [2].

However, in the literature there is very few data on the pesticidal and growth-regulating activity of such compounds, in which molecules these heterocycles are present simultaneously. In connection with this, the purpose of this study was to develop simple, accessible and effective methods for the synthesis of a series of compounds with a combination of 1,3,5-triazine ring with 1,3-thiazole or imidazole cycle in the same molecule to search for new pesticides and plant growth regulators.

## **Results and discussion**

The reaction of initial 4,6-diamino substituted  $N^1$ -(1,3,5-triazin-2-yl)ethane-1,2-diamines (**1**) with potassium rhodanide and hydrochloric acid afforded corresponding thiourea derivatives (**2**). Their heterocyclization with

ethyl 2-chloro-3-oxobutanoate and 3-chloropentane-2,4-dione led to ethyl 2-((2-((4,6-disubstituted-1,3,5-triazin-2-yl)amino)ethyl)amino)-4-methylthiazole-5-carboxylates (**3**) and 1-(2-((2-((4,6-disubstituted-1,3,5-triazin-2-yl)amino)ethyl)amino)-4-methylthiazol-5-yl)ethan-1-ones (**4**), respectively.



On the other hand by heterocyclization of initial reagent (1) with carbon disulfide and triethylamine the compounds with a combination of 1,3,5-triazine and imidazole cycles in the molecule (5) were obtained. The reaction of these compounds with acetic anhydride and benzene isocyanat afforded 1-(3-(4,6-disubstituted-1,3,5-triazin-2-yl)-2-thioxoimidazolidin-1-yl)ethan-1-ones (6) and 3-(4,6-disubstituted-1,3,5-triazin-2-yl)-N-phenyl-2-thioxoimidazolidine-1-carboxamides (7).

In NMR spectra of all compounds, two groups of signals are observed for the protons of the alkyl groups of the amine substituents of positions 4

and 6. This is explained by the process of hindered internal rotation of these groups around the N-heterocycle bond. This phenomenon is discussed in detail in [3]. In addition, a similar process of hindered rotation also takes place around the amide bond in compounds **6** and **7**, as a result of which two sets of NMR signals are also observed for the methyl group of the acyl substituent and the methylene groups of the imidazole ring.

## Experimental

### General

The  $^1\text{H}$  and  $^{13}\text{C}$  NMR spectra were recorded at 30  $^{\circ}\text{C}$  on Varian Mercury-300 (300 and 75 MHz appropriately) spectrometer with standard pulse sequences operating in the mixture of solvents DMSO- $d_6$  and  $\text{CCl}_4$  (1:3), using tetramethylsilane (0.0 ppm) as internal standard. The NMR multiplicities *brs*, *s*, *d*, *t*, *q*, and *m* stand for broad singlet, singlet, doublet, triplet, quartet and multiplet, respectively. The reaction progress and purity of the obtained substances were checked by using the TLC method on "Silufol UV-254" plates and acetone/hexane mixture (2:1) as eluent. All melting points were determined in open capillaries and are uncorrected.

### Synthesis of compounds 1a-c

To 10 mL of ethane-1,2-diamine, at cooling ( $-5 - 0$   $^{\circ}\text{C}$ ) 0.01 mol of 2,4-bis-diamino substituted 1,3,5-triazine was added by portion. The mixture was stirred at 125  $^{\circ}\text{C}$  for 4 h, then ethane-1,2-diamine was evaporated at low pressure. The residue was processed with minimal amount of cold water and filtered off.

**N<sup>1</sup>-(4,6-Bis(dimethylamino)-1,3,5-triazin-2-yl)ethane-1,2-diamine (1a)**. Yield 65%, mp 136-140  $^{\circ}\text{C}$ .  $^1\text{H}$  NMR,  $\delta$  ppm: 2.82 and 3.26 (m,m, 4H,  $\text{CH}_2\text{CH}_2$ ); 3.07 (brs, 12H,  $2\text{N}(\text{CH}_3)_2$ ); 3.75 (brs, 2H,  $\text{NH}_2$ ); 6.35 (t,  $J=5.0$  Hz, 1H, NH).

**N<sup>1</sup>-(4,6-Dimorpholino-1,3,5-triazin-2-yl)ethane-1,2-diamine (1b).**

Yield 72%, mp 154-156 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 2.82 and 3.28 (m,m, 4H, CH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>); 3.60-3.85 (m, 16H, 2morphol.); 3.73 (brs, 2H, NH<sub>2</sub>); 6.42 (t, J=5.0 Hz, 1H, NH).

**N<sup>1</sup>-(4,6-Di(azepan-1-yl)-1,3,5-triazin-2-yl)ethane-1,2-diamine (1c).**

Yield 68%, mp 110-112 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 1.45-1.60 and 1.63-1.80 (m,m, 16H, N(CH<sub>2</sub>)<sub>8</sub>); 2.85 and 3.30 (m,m, 4H, CH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>); 3.57-3.70 (m, 10H, NH<sub>2</sub> and N(CH<sub>2</sub>)<sub>4</sub>); 6.35 (t, J=5.0 Hz, 1H, NH).

**Synthesis of compounds 2a-c**

To a solution of potassium rhodanide (0.015 mol) and HCl (0.015 mL) in 15 mL of ethanol, at heating 0.01 mol of compound **1** was added by portion, then the heating was continued for 2 h. The salt was filtered off, ethanol was evaporated from filtrate, the residue was processed with minimal amount of water and filtered off.

**1-(2-((4,6-Bis(dimethylamino)-1,3,5-triazin-2-yl)amino)ethyl)thiourea (2a).**

Yield 74%, mp 160-162 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 2.99 and 3.52 (t,t, J=5.7 Hz, NCH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>N); 3.07 (s, 12H, 2N(CH<sub>3</sub>)<sub>2</sub>); 6.44 and 7.77 (brt, J=5.7 Hz, 2NH). <sup>13</sup>C NMR, δ ppm: 35.35, 37.75, 39.14, 164.79, 165.20.

**1-(2-((4,6-Dimorpholino-1,3,5-triazin-2-yl)amino)ethyl)thiourea (2b).**

Yield 77%, mp 168-169 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 2.95 and 3.50 (t,t, J=5.7 Hz, NCH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>N); 3.60-3.85 (m, 16H, 2morphol.); 6.40 (t, J=5.0 Hz, 1H, NH); 7.80 (brs, 3H, NH and NH<sub>2</sub>).

**1-(2-((4,6-Di(azepan-1-yl)-1,3,5-triazin-2-yl)amino)ethyl)thiourea (2c).**

Yield 89%, mp 115-117 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 1.45-1.57 and 1.63-1.80 (m,m, 16H, N(CH<sub>2</sub>)<sub>8</sub>); 2.98 and 3.50 (m,m, 4H, CH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>); 3.63 (t, J=8.1 Hz, 8H, N(CH<sub>2</sub>)<sub>4</sub>); 6.35 (t, J=5.0 Hz, 1H, NH); 7.80 (brs, 3H, NH and NH<sub>2</sub>). <sup>13</sup>C NMR, δ ppm: 26.40, 26.63, 27.38, 27.83, 37.92, 39.27, 45.83, 164.15, 165.55.

### Synthesis of compounds 3,4a-c

The mixture of compound 2 (0.01 mol), 0.01 mol of ethyl 2-chloro-3-oxobutanoate (or 3-chloropentane-2,4-dione),  $K_2CO_3$  (0.01 mol) and 20 mL of ethanol was heated at 70-80 °C for 5 h. Ethanol was evaporated, the precipitate processed with water and filtered off. Purified by recrystallization from ethanol or its 50% water solution.

**Ethyl 2-((2-((4,6-bis(dimethylamino)-1,3,5-triazin-2-yl)amino)ethyl)amino)-4-methylthiazole-5-carboxylate (3a).** Yield 75%, mp 173-175 °C.  $^1H$  NMR,  $\delta$  ppm: 1.30 (t,  $J=7.1$  Hz, 3H,  $CH_3CH_2O$ ); 2.42 (s, 3H,  $CH_3$ ); 3.07 (brs, 12H,  $2N(CH_3)_2$ ); 3.38 and 3.52 (m,m,  $J_1=5.8$  Hz,  $J_2=5.0$  Hz, 4H,  $NCH_2CH_2N$ ); 4.18 (q,  $J=7.1$  Hz, 2H,  $CH_3CH_2O$ ); 6.23 and 8.08 (t,t,  $J=5.0$  Hz, 2H, 2NH).  $^{13}C$  NMR,  $\delta$  ppm: 14.08, 16.92, 35.32, 39.02, 44.79, 58.91, 159.04, 161.34, 164.95, 165.37, 169.71.

**Ethyl 2-((2-((4,6-dimorpholino-1,3,5-triazin-2-yl)amino)ethyl)amino)-4-methylthiazole-5-carboxylate (3b).** Yield 70%, mp 96-98 °C.  $^1H$  NMR,  $\delta$  ppm: 1.33 (t,  $J=7.1$  Hz, 3H,  $CH_3CH_2O$ ); 2.40 (s, 3H,  $CH_3$ ); 3.38 and 3.52 (m,m,  $J_1=5.8$  Hz,  $J_2=5.0$  Hz, 4H,  $NCH_2CH_2N$ ); 3.60-3.86 (m, 16H, 2morphol.); 4.20 (q,  $J=7.1$  Hz, 2H,  $CH_3CH_2O$ ); 7.40 and 8.20 (brt,  $J=5.0$  Hz, 2H, 2NH).

**Ethyl 2-((2-((4,6-di(azepan-1-yl)-1,3,5-triazin-2-yl)amino)ethyl)amino)-4-methylthiazole-5-carboxylate (3c).** Yield 88%, mp 105-107 °C.  $^1H$  NMR,  $\delta$  ppm: 1.30 (t,  $J=7.1$  Hz, 3H,  $CH_3CH_2O$ ); 1.50-1.62 and 1.67-1.82 (m,m, 16H,  $(CH_2)_8$ -azep.); 2.40 (s, 3H,  $CCH_3$ ); 3.40-3.80 (m, 12H,  $CH_2CH_2$  and  $N(CH_2)_4$ ); 4.18 (q,  $J=7.1$  Hz, 3H,  $CH_3CH_2O$ ); 7.40 and 8.20 (brt, 2H, 2NH).

**1-(2-((2-((4,6-Bis(dimethylamino)-1,3,5-triazin-2-yl)amino)ethyl)amino)-4-methylthiazol-5-yl)ethan-1-one (4a).** Yield 78%, mp 258-259 °C.  $^1H$  NMR,  $\delta$  ppm: 2.30 (s, 3H,  $COCH_3$ ); 2.44 (s, 3H,  $CCH_3$ ); 3.07-3.22 (brs, 12H,  $2N(CH_3)_2$ ); 3.43-3.70 (m, 4H,  $NCH_2CH_2N$ ); 8.33 (brs, 2H, 2NH).



**1-(2-((2-((4,6-Dimorpholino-1,3,5-triazin-2-yl)amino)ethyl)amino)-4-methylthiazol-5-yl)ethan-1-one (4b).** Yield 75%, mp 200-202 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 2.25 (s, 3H, COCH<sub>3</sub>); 2.42 (s, 3H, CCH<sub>3</sub>); 3.40-3.70 (m, 4H, NCH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>N); 3.60-3.85 (m, 16H, 2-morphol.); 7.70 and 8.15 (brs, 2H, 2-NH).

**1-(2-((2-((4,6-Di(azepan-1-yl)-1,3,5-triazin-2-yl)amino)ethyl)amino)-4-methylthiazol-5-yl)ethan-1-one (4c).** Yield 91%, mp 78-79 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 1.50-1.62 and 1.64-1.85 (m,m, 16H, (CH<sub>2</sub>)<sub>8</sub>-azep.); 2.30 (s, 3H, COCH<sub>3</sub>); 2.40 (s, 3H, CCH<sub>3</sub>); 3.40-3.80 (m, 12H, CH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub> and N(CH<sub>2</sub>)<sub>4</sub>); 7.75 and 8.30 (brs, 2H, 2NH).

### Synthesis of compounds 5a-c

To a suspension of compound **1** (0.01 mol) in benzene (10 mL), at stirring 0.015 mol of triethylamine was added dropwise, then 0.015 mol of CS<sub>2</sub>. The mixture was allowed to stand overnight at room temperature, then heated at 50-60 °C for 3 h, filtered off, and the precipitate was washed with water.

**1-(4,6-bis(Dimethylamino)-1,3,5-triazin-2-yl)imidazolidine-2-thione (5a).** Yield 75%, mp 220-222 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 3.10-3.24 (brs, 12H, 2×N(CH<sub>3</sub>)<sub>2</sub>); 3.50 and 4.22 (m,m, 4H, NCH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>N); 8.85 (brs, 1H, NH).

**1-(4,6-Dimorpholino-1,3,5-triazin-2-yl)imidazolidine-2-thione (5b).** Yield 60%, mp 230-232 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 3.52 and 4.20 (m,m, 4H, CH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>); 3.59-3.82 (m, 16H, 2morphol.); 8.93 (s, 1H, NH). <sup>13</sup>C NMR, δ ppm: 40.32, 43.24, 47.44, 65.89, 162.86, 164.36, 179.64.

**1-(4,6-Di(azepan-1-yl)-1,3,5-triazin-2-yl)imidazolidine-2-thione (5c).** Yield 62%, mp 245-246 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 1.50-1.58 and 1.70-1.80 (m,m, 16H, (CH<sub>2</sub>)<sub>8</sub>-azep.); 3.52 and 4.21 (t,t, J=8.8 Hz, 4H, CH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>); 3.67 and 3.73 (t,t, J=6.0 Hz, 8H, N(CH<sub>2</sub>)<sub>4</sub>-azep.); 8.74 (s, 1H, NH). <sup>13</sup>C NMR, δ ppm: 26.31, 26.49, 27.09, 27.60, 40.28, 46.03, 46.16, 47.60, 162.64, 164.17, 179.88.

### Synthesis of compounds 6a-c

The mixture of compound 5 (0.01 mol) and 10 mL of acetic anhydride was heated at 140 °C for 5 h. Anhydride was removed and the residue was washed with water. A few drops of NH<sub>4</sub>OH was added and the precipitate was filtered off.

**1-(3-(4,6-Bis(dimethylamino)-1,3,5-triazin-2-yl)-2-thioxoimidazolidin-1-yl)ethan-1-one (6a).** Yield 86%, mp 140-142 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 2.45 and 2.77 (s.s., 3H, COCH<sub>3</sub>); 3.13-3.14 (brs, 12H, 2NCH<sub>3</sub>)<sub>2</sub>); 3.71-4.16 (m, 4H, CH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>).

**1-(3-(4,6-Dimorpholino-1,3,5-triazin-2-yl)-2-thioxoimidazolidin-1-yl)ethan-1-one (6b).** Yield 96%, mp 203-205 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 2.40 and 2.75 (s.s., 3H, COCH<sub>3</sub>); 3.60-3.85 (m, 16H, 2 morphol.); 3.70-4.20 (m, 4H, NCH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>N).

**1-(3-(4,6-Di(azepan-1-yl)-1,3,5-triazin-2-yl)-2-thioxoimidazolidin-1-yl)ethan-1-one (6c).** Yield 87%, mp 134-136 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 1.48-1.60 and 1.70-1.80 (m,m, 16H, (CH<sub>2</sub>)<sub>8</sub>-azep.); 2.40 and 2.72 (s.s., 3H, COCH<sub>3</sub>); 3.65 and 3.71 (t,t, J=6.0 Hz, 8H, N(CH<sub>2</sub>)<sub>4</sub>-azep.); 3.72-4.18 (m, 4H, NCH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>N).

### Synthesis of compounds 7a-c

To a mixture of compound 5 (0.01 mol) in 10 mL of toluene, 0.01 mol of phenyl isocyanate (0.01 mol) and catalytic amount of pyridine was added dropwise at cooling. The mixture was boiled for 2 h, then benzene was evaporated, the precipitate was processed with hexane and filtered off. Purified by recrystallization from ethanol or its 50% water solution.

**3-(4,6-Bis(dimethylamino)-1,3,5-triazin-2-yl)-N-phenyl-2-thioxoimidazolidine-1-carboxamide (7a).** Yield 80%, mp 197-199 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ

ppm: 3.16 (s, 12H, 2NCH<sub>3</sub>)<sub>2</sub>); 4.10-4.20 (m, 4H, CH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>); 7.03-7.55 (m, 5H, C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>); 12.68 (s, 1H, NH).

**3-(4,6-Dimorpholino-1,3,5-triazin-2-yl)-N-phenyl-2-thioxoimidazolidine-1-carboxamide (7b).** Yield 84%, mp 213-214 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 3.58-3.90 (m, 16H, 2morphol.); 4.18 (s, 4H, CH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>); 7.00-7.57 (m, 5H, C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>); 12.62 (s, 1H, NH). <sup>13</sup>C NMR, δ ppm: 43.25, 43.29, 43.34, 43.40, 43.46, 44.07, 65.80, 119.05, 123.01, 128.27, 137.37, 149.43, 163.18, 164.25, 175.89.

**3-(4,6-Di(azepan-1-yl)-1,3,5-triazin-2-yl)-N-phenyl-2-thioxoimidazolidine-1-carboxamide (7c).** Yield 88%, mp 172-173 °C. <sup>1</sup>H NMR, δ ppm: 1.51-1.61 and 1.72-1.82 (m,m, 16H, (CH<sub>2</sub>)<sub>8</sub>-azep.); 3.70 and 3.73 (t,t, J=5.9 Hz, 8H, N(CH<sub>2</sub>)<sub>4</sub>-azep.); 4.12-4.20 (m, 4H, CH<sub>2</sub>CH<sub>2</sub>); 7.03-7.55 (m, 5H, C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>); 12.72 (s, 1H, NH). <sup>13</sup>C NMR, δ ppm: 26.28, 26.33, 26.89, 27.56, 43.33, 44.13, 46.18, 119.05, 122.88, 128.22, 137.50, 149.60, 162.87, 164.09, 175.88.

## REFERENCES

1. Richards D., Coleman J., Reynolds J., Aronson J. Oxford Handbook of Practical Drug Therapy, Oxford; New York: Oxford University Press, (2011).
2. [http://www.alanwood.net/pesticides/class\\_pesticides.html](http://www.alanwood.net/pesticides/class_pesticides.html)
3. Енгоян А.П., Мамян С.С., Гомкцян Т.А., Амбарцумян Э.Н., Ворсканян А.С., Довлатян В.В., Элиазян К.А., Пивазян В.А.; ХГС, № 8, 1236–1239, (2005).

**СИНТЕЗ ПРОИЗВОДНЫХ БИТЕРОЦИКЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
НА ОСНОВЕ 4,6-ДИАМИНОЗАМЕЩЕННЫХ  
N<sup>1</sup>-(1,3,5-ТРИАЗИН-2-ИЛ)ЭТАН-1,2-ДИАМИНОВ**

*А.П. Енгоян, Ж.А. Азарян, В.А. Пивазян, Е.А. Казарян*

**АННОТАЦИЯ**

На основе 4,6-диаминозамещенного N<sup>1</sup>-(1,3,5-триазин-2-ил)этан-1,2-диаминов разработаны простые, доступные и эффективные методы синтеза производных бигетероциклических систем с комбинацией 1,3,5-триазинового кольца с 1,3-тиазольным или имидазольным циклами в молекуле.

**Ключевые слова:** 1,3,5-триазин, 1,3-тиазол, имидазол, гетероциклизация.

**ԲԻԶԵՏԵՆՈՑԻԿԼԻԿ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՄԻՆԹԵԶԸ**

**4,6-ԴԻԱՄԻՆՈՏԵՂԱԿԱԼՎԱԾ**

**N<sup>1</sup>-(1,3,5-ՏՐԻԱԶԻՆ-2-ԻԼ)ԷԹԱՆ-1,2-ԴԻԱՄԻՆՆԵՐԻ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ**

*Ա.Փ. Ենգոյան, Ժ.Ա. Ազարյան, Վ.Ա. Պիվազյան, Է.Ա. Ղազարյան*

**ԱՄՓՈՓՈՒՄ**

4,6-Դիամինոտեղակալված N<sup>1</sup>-(1,3,5-տրիագին-2-իլ)էթան-1,2-դիամինների հիմքի վրա մշակվել են 1,3,5-տրիագինային օղակի և 1,3-թիագոլի կամ իմիդազոլի ցիկլերի համադրությամբ բիհետերոցիկլիկ համակարգերի ածանցյալների սինթեզի պարզ, մատչելի և արդյունավետ եղանակներ:

**Հիմնարարներ՝** 1,3,5-տրիագին, 1,3-թիագոլ, իմիդազոլ, հետերոցիկլում:

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ**

- Ж.А. Азарян* аспирант первого года обучения кафедры общей и фармацевтической химии РАУ
- А.К. Андриасян* аспирант кафедры молекулярной физики ЕГУ
- А.В. Асатрян* аспирант кафедры молекулярной физики ЕГУ
- А.П. Енгоян* д.х.н., профессор, профессор кафедры общей и фармацевтической химии РАУ, зав.лабораторией защиты растений и синтеза пестицидов АНАУ
- Е.А. Казарян* к.х.н., старший научный сотрудник лаборатории защиты растений и синтеза пестицидов АНАУ
- А.П. Карабахцян* студент второго курса магистратуры по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика» РАУ
- В.М. Кахкцян* к.ф.-м.н., доцент кафедры математики Московского института стали и сплавов
- Е.Ш. Мамасакхлисов* д.ф.-м.н., доцент кафедры молекулярной физики ЕГУ
- В.Н. Маргарян* д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры математики и математического моделирования РАУ

- А.В. Минасян* аспирант третьего года обучения кафедры дискретной математики и теоретической информатики ЕГУ
- В.Ф. Морозов* д.ф.-м.н., профессор кафедры молекулярной физики ЕГУ
- Г. Петросян* студент второго курса магистратуры факультета информатики и прикладной математики ЕГУ
- В.А. Пивазян* к.х.н., ведущий научный сотрудник лаборатории защиты растений и синтеза пестицидов АНАУ
- Ш.А. Тоноян* к.ф.-м.н., научный сотрудник лаборатории физики макромолекул
- А.Х. Хачатрян* д.ф.-м.н., профессор, зав.кафедрой высшей математики и теоретической механики Армянского национального аграрного университета
- А.А. Чубарян* д.ф.-м.н., профессор кафедры математической кибернетики РАУ, профессор кафедры дискретной математики и теоретической информатики ЕГУ

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

- A. Chubaryan, A. Karabakhtsyan, G. Petrosyan.** On some properties of several proof systems for non classical propositional logics ..... 5
- В.Н. Маргарян.** Гипоэллиптичность и почти гипоэллиптичность в терминах сравнения подмножеств ..... 18
- A. Minasyan.** On two representations of cosets ..... 27
- А.Х. Хачатрян, В.М. Кахкцян.** Однопараметрическое семейство нетривиальных решений для одного класса квазилинейных уравнений типа Вольтерра ..... 33

### Физика

- А.В. Асатрян, А.К. Андриасян, Ш.А. Тоноян, Е.Ш. Мамасахлисов, В.Ф. Морозов.** Переход порядок-беспорядок в гетерогенных биологических макромолекулах ..... 41
- В.А. Хачатрян.** Влияние поверхностной рекомбинации на напряжение холостого хода нанопроволоки из арсенида галлия ..... 55

### Химия

- A.P. Yengoyan, J.A. Azaryan, V.A. Pivazyan, E.A. Ghazaryan.** Synthesis of biheterocyclic systems derivatives based on 4,6-diamino substituted n<sup>1</sup>-(1,3,5-triazin-2-yl)ethane-1,2-diamines ..... 67
- Сведения об авторах** ..... 77

**Главный редактор РНИ – М.Э. Авакян**  
**Редактор – Э.А Рухкян**  
**Корректор – М.Р. Тадевосян**  
**Компьютерная верстка – А.Г. Антонян**

Адрес Редакции научных изданий  
Российско-Армянского  
университета:

*0051, г. Ереван, ул. Овсена Эмина, 123*  
*тел/факс: (+374 10) 27-70-52 (внутр. 42-02)*  
*e-mail: redaction.rau@gmail.com*

Заказ № 17  
Подписано к печати 16.05.2018г.  
Формат 70x100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная № 1.  
Объем 5 усл. п.л. Тираж 200 экз.