ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1992 Естественные науки

Математика

УДК 517.52.75

АЛЬ-АБДУЛЬ-РАЗЗАК ИСАМ

АБЕЛЕВЫЕ И ТАУБЕРОВЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

В работе получены аналоги абелевых и тауберовых теорем для обобщенного преобразования Лапласа, а именно для преобразования

$$f(s)=\int_0^\infty \omega(st,\gamma)d\alpha(t),$$

где построенная для последовательности $\gamma=\{\gamma_\nu\}$,

$$\gamma_0=0<\gamma_1<\gamma_2\le\cdots\le\cdots,\sum\frac{1}{\gamma_\nu}=\infty,\ \sum\frac{1}{\gamma_\nu^2}<\infty,$$

функция $\omega(t,\gamma)$ обобщает ядро преобразования Лапласа.

§1. Хорошо известны абелевые и тауберовые теоремы для преобразования Лапласа.

Рассматривается преобразование Лапласа

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t),$$

где $\alpha(0)=\alpha(0+)=0$, и $s>0$.

Известны следующие абелевые и тауберовые теоремы

Теорема A. Если

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t), \tag{1}$$

где $\alpha(0)=\alpha(0+)=0$, и $s>0$.

Тогда для любых $\gamma\ge 0$ и A справедливы неравенства

$$\varlimsup_{s\to 0+}|s^\gamma f(s)-A|\le\varlimsup_{t\to\infty}|\alpha(t)t^{-\gamma}\Gamma(\gamma+1)-A|, \tag{2}$$

$$\varlimsup_{s\to\infty}|s^\gamma f(s)-A|\le\varlimsup_{t\to 0+}|\alpha(t)t^{-\gamma}\Gamma(\gamma+1)-A|, \tag{3}$$

(см. [1], с.181–183, теорему 1).

Теорема Б. Пусть сходится интеграл

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\alpha(t)dt \text{ при } s > 0 \text{ и пусть}$$

1) $\lim\limits_{s\to 0+} f(s) = A$,
2) $\alpha(t) = o(1/t)$, $t \to \infty$, тогда

$$f(0+) = \int_0^\infty \alpha(t)dt = A.$$

Теорема С. Для того, чтобы из

1) сходимости $f(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$ при $s > 0$ и

2) условия $\lim\limits_{s\to 0+} f(s) = A$ последовало существование интеграла $\int\limits_0^\infty d\alpha(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) - \alpha(0+)$ (можно полагать $\alpha(0+) = \alpha(0) = 0$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\beta(t) = \int_0^t u d\alpha(u) = o(t), \quad t \to \infty \text{ (см.[1]; с.187–188, теорему 3в).} \tag{4}$$

В настоящей работе рассматривается преобразование типа свертки, обобщающее непосредственно преобразование Лапласа (1).

Ядро этого преобразования—функция $\omega(t,\gamma)$—составляется следующим образом.

Пусть имеется последовательность чисел

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 \le \gamma_3 \le \cdots, \sum \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty, \; \sum \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \infty. \tag{5}$$

По этой последовательности составляется и функция $\omega(t,\gamma)$, а именно

$$\omega(t,\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\zeta e_{1,\infty}(\zeta,\gamma)}, \; \sigma > 0, \; t > 0, \tag{6}$$

где

$$e_{1,\infty}(\zeta,\gamma) = \prod_{\nu=1}^\infty \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}. \tag{7}$$

Ставятся задачи получить результаты типа теорем А,Б,С для преобразования с ядром $\omega(t,\gamma)$, а именно преобразования

$$f(s) = \int_0^\infty \omega(st,\gamma)d\alpha(t). \tag{1'}$$

Это преобразование обобщает преобразование (1), так как известно, что при $\gamma_\nu = \nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

$$\omega(t, \gamma) = \mathrm{e}^{-ct}, \tag{8}$$

где $c > 0$—число, связанное с постоянной Эйлера (см. [2], с.511).

Так как функция $\omega(st, \gamma)$ обобщает ядро преобразования Лапласа, то естественно выяснить,как соответственно обобщаются теоремы А, Б, С для преобразования (1′).

Указанные вопросы составляют содержание настоящей работы.

Преобразование (1′) нами названо основным преобразованием типа свертки.

§2. Абелевые теоремы для основного преобразования типа свертки

Теорема 1. Если

$$f(s) = s\int_0^\infty \omega(st, \gamma)\alpha(t)d(t), \ s > 0, \ \alpha(0+) = \alpha(0) = 0, \tag{9}$$

тогда для любых $\chi \geq 0$ и $A \geq 0$ справедливы неравенства

$$\overline{\lim_{s\to 0+}}\, |s^\chi f(s) - A| \leq \overline{\lim_{t\to\infty}}\, |\alpha(t)t^{-\chi}\tilde{\Gamma}(\chi + 1, \gamma) - A|, \tag{10}$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\, |s^\chi f(s) - A| \leq \overline{\lim_{t\to 0}}\, |\alpha(t)t^{-\chi}\tilde{\Gamma}(\chi + 1, \gamma) - A|, \tag{11}$$

где

$$\tilde{\Gamma}(\zeta, \gamma) = \frac{1}{\zeta e_{1,\infty}(\zeta, \gamma)}. \tag{7′}$$

Доказательство. Согласно формуле преобразования Меллина для функции $\omega(t, \gamma)$ имеем

$$\int_0^\infty \omega(st, \gamma)t^\chi dt = \frac{\tilde{\Gamma}(\chi + 1, \gamma)}{s^{\chi+1}},$$

это значит,что

$$\frac{s^{\chi+1}}{\tilde{\Gamma}(\chi + 1, \gamma)}\int_0^\infty \omega(st, \gamma)t^\chi dt = 1. \tag{12}$$

Из равенства (9) имеем

$$s^\chi f(s) = s^{\chi+1}\int_0^\infty \omega(st, \gamma)\alpha(t)dt, \tag{9′}$$

а из равенства (12)—

$$A = s^{\chi+1}\int_0^\infty \omega(st, \gamma)\frac{t^\chi A}{\tilde{\Gamma}(\chi + 1, \gamma)}dt, \tag{12′}$$

из равенств $(9')$ и $(12')$ получим

$$s^{\chi}f(s)-A=s^{\chi+1}\int\limits_0^\infty \omega(st,\gamma)\left[\alpha(t)-\frac{At^{\chi}}{\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)}\right]dt=$$

$$=s^{\chi+1}\int\limits_0^\infty \frac{\omega(st,\gamma)}{\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)}\left[\alpha(t)t^{-\chi}\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)-A\right]dt. \qquad (13)$$

Докажем теперь неравенство (10). С этой целью заменим интеграл правой части (13) на сумму интегралов по промежуткам $(0,T)$ и (T,∞).

Тогда из (13) можем получить неравенство

$$|s^{\chi}f(s)-A|=\left|s^{\chi+1}\int\limits_0^T \omega(st,\gamma)\left[\alpha(t)-\frac{At^{\chi}}{\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)}\right]dt+\right.$$

$$\left.+s^{\chi+1}\int\limits_T^\infty \frac{\omega(st,\gamma)t^{\chi}}{\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)}\left[\alpha(t)t^{-\chi}\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)-A\right]dt\right|\leq$$

$$\leq s^{\chi+1}\int\limits_0^T \frac{\omega(st,\gamma)t^{\chi}}{\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)}|\alpha(t)t^{-\chi}\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)-A|dt+$$

$$+\sup_{t\geq T}|\alpha(t)t^{-\chi}\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)-A|s^{\chi+1}\int\limits_T^\infty \frac{\omega(st,\gamma)t^{\chi}}{\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)}dt\leq$$

$$\leq O(s^{\chi+1})+\sup_{t\geq T}|\alpha(t)t^{-\chi}\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)-A|. \qquad (14)$$

Это потому, что

$$s^{\chi+1}\int\limits_T^\infty \frac{\omega(st,\gamma)t^{\chi}}{\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)}dt\leq 1.$$

Так как (14) имеет место для всех $T>0$, то из (14) получим

$$\overline{\lim_{s\to 0}}|s^{\chi}f(s)-A|\leq \overline{\lim_{t\to\infty}}|\alpha(t)t^{-\chi}\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)-A|.$$

Получили неравенство (10) теоремы.

Аналогично получается и неравенство (11). Но тогда из (13) следует неравенство

$$|s^{\chi}f(s)-A|\leq \sup_{t\in(0,T)}|\alpha(t)t^{-\chi}\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)-A|+$$

$$+s^{\chi+1}\int\limits_T^\infty \omega(st,\gamma)\left|\alpha(t)-\frac{At^{\chi}}{\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)}\right|dt.$$

Заметим теперь,что

$$\left|\alpha(t) - \frac{At^{\chi}}{\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)}\right| \le [\omega(\varepsilon t,\gamma)]^{-1}.$$

Поэтому

$$s^{\chi+1}\int_T^{\infty}\omega(st,\gamma)\left|\alpha(t) - \frac{At^{\chi}}{\tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma)}\right|dt \le s^{\chi+1}\int_T^{\infty}\frac{\omega(st,\gamma)}{\omega(\varepsilon t,\gamma)}dt. \qquad (15)$$

Нам следует доказать,что правая часть последнего неравенства стремится к нулю, когда $s \to \infty$.

Для числа T выберем число S_0, $\varepsilon < 1 < S_0 < S$ так, чтобы имели $S_0T > N_0$, где $N_0 > 0$—число достаточно большое.

Заметим еще, что $\omega(s_0t,\gamma) < \omega(\varepsilon t,\gamma)$.

Поэтому

$$\int_T^{\infty}\frac{\omega(st,\gamma)}{\omega(\varepsilon t,\gamma)}dt \le \int_T^{\infty}\frac{\omega(st,\gamma)}{\omega(s_0t,\gamma)}dt \le 2\max_{t\ge T}\frac{\omega(st,\gamma)}{\omega(s_0t,\gamma)}(s_0t)^2\int_T^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} \le$$

$$\le c\max_{t\ge T}\frac{\omega(st,\gamma)}{\omega(s_0t,\gamma)}(s_0t)^2. \qquad (15')$$

В процессе доказательства теоремы 2 работы [3] получено неравенство

$$\frac{\omega(st,\gamma)}{\omega(s_0t,\gamma)} \le c\exp\Big(-r\ln\frac{s}{s_0}\Big)r$$

(см. [3] неравенства (20′), (22′)), где число $r > 0$ определяется из

$$\ln ts_0 = r\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_\nu(r+\gamma_\nu)}.$$

(см. [3], (15)).

При этом доказано, что для любого $\varepsilon' > 0$, $\ln ts_0 < \varepsilon' r$, $r > N(\varepsilon')$ (см. там же, неравенство (18)), где из $s_0t \to \infty$ следует и $r \to \infty$.

Это значит,что

$$(s_0t)^2\frac{\omega(st,\gamma)}{\omega(s_0t,\gamma)} \le c\exp\Big(-\frac{\ln ts_0}{\varepsilon'}\ln\frac{s}{s_0}\Big)(s_0t)^2 <$$

$$< c\exp\Big(-\frac{\ln ts_0}{2\varepsilon'}\ln\frac{s}{s_0}\Big) < c\exp\Big(-\frac{\ln ts_0}{4\varepsilon'}\ln s\Big),$$

если только $s > s_0$—число достаточно большое.

Из последнего неравенства следует,что

$$(s_0t)^2\frac{\omega(st,\gamma)}{\omega(s_0t,\gamma)} < \frac{c_0}{s^{\frac{\ln(ts_0)}{4\varepsilon'}}} < \frac{c_1}{s^{\chi+2}}, \qquad (15'')$$

так как при произвольно малом $\varepsilon' > 0$ и $t \ge T$,

$$ts_0 > N_0 = N_0(\varepsilon'),\ \frac{\ln(ts_0)}{4\varepsilon'} > \chi + 2.$$

Возвращаясь к (15), согласно (15′) и (15″) получаем, что при $s \to \infty$ и любом $T > 0$,

$$s^{\chi+1} \int\limits_T^\infty \frac{\omega(st,\gamma)}{\omega(\varepsilon t,\gamma)} dt \leq \frac{c_0}{s} = o(1), \quad s \to \infty.$$

Эти оценки показывают, что

$$|s^\chi f(s) - A| \leq \sup_{t\in(0,T]} |\alpha(t) t^{-\chi} \tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma) - A| + o(1), \ s \to \infty,$$

для всякого $T > 0$.

Следовательно, используя произвольность $T > 0$, из последнего неравенства получим, что

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} |s^\chi f(s) - A| \leq \overline{\lim_{t\to 0}} |\alpha(t) t^{-\chi} \tilde{\Gamma}(\chi+1,\gamma) - A|.$$

Теорема 1 доказана.

§3. Тауберовые теоремы для основного преобразования типа свертки

Теорема 2. Пусть преобразование

$$f(s) = \int\limits_0^\infty \omega(st,\gamma) a(t) dt, \tag{1''}$$

где $\omega(st,\gamma)$ определено в (6), а $\gamma_1 \geq 1$, $\gamma_2 > \gamma_1$ сходится, когда $s > 0$.

Пусть:

1) существует $\lim\limits_{s\to 0+} f(s) = A$,

2) $a(t) = o(1/t^{\gamma_1})$, $t \to \infty$, тогда существует $\int\limits_0^\infty a(t)dt$ и имеет место равенство

$$\int\limits_0^\infty a(t)dt = A.$$

Доказательство. Нам следует доказать, что существует

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t a(u)du = A.$$

Для этого составим

$$\int\limits_0^t a(u)du - f(s) = \int\limits_0^t a(u)du - \int\limits_0^\infty \omega(su,\gamma) a(u) du =$$

$$= \int\limits_0^t (1 - \omega(su,\gamma)) a(u) du - \int\limits^\infty \omega(su,\gamma) a(u) du.$$

Получили, что

$$\int_0^t a(u)du - f(s) = \int_0^t (1 - \omega(su,\gamma))a(u)du - \int_t^\infty \omega(su,\gamma)a(u)du, \qquad (16)$$

поэтому

$$\left|\int_0^t a(u)du - f(s)\right| \le \int_0^t (1 - \omega(su,\gamma))|a(u)|du + \int_0^\infty \omega(su,\gamma)|a(u)|du.$$

Имеем

$$J_1(s,t) = \int_0^t (1 - \omega(su,\gamma))|a(u)|du = s^{\gamma_1} \int_0^t \frac{1 - \omega(su,\gamma)}{(su)^{\gamma_1}}|a(u)|u^{\gamma_1}du =$$

$$= s^{\gamma_1} \int_0^T \frac{1 - \omega(su,\gamma)}{(su)^{\gamma_1}}|a(u)|u^{\gamma_1}du + s^{\gamma_1} \int_T^t \frac{1 - \omega(su,\gamma)}{(su)^{\gamma_1}}|a(u)|u^{\gamma_1}du,$$

поэтому

$$|J_1(s,t)| \le c_1 s^{\gamma_1} \int_0^T |a(u)|u^{\gamma_1}du + s^{\gamma_1} \int_T^t \frac{1 - \omega(su,\gamma)}{(su)^{\gamma_1}}|a(u)|u^{\gamma_1}du,$$

где по условию теоремы $a(t) = o(1/t^{\gamma_1})$, $t \to \infty$, $\gamma_1 \ge 1$.

Это потому, что для фиксированного $T > 0$ и $s \to 0$ имеем

$$\lim_{s\to 0} \frac{1 - \omega(su,\gamma)}{(su)^{\gamma_1}} = c, \quad 0 < u \le T.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что путем вычисления вычетов в контурном интеграле (6), получим

$$\omega(su,\gamma) = 1 - (su)^{\gamma_1}c_1 + O[(su)^{\gamma_2}], \quad s \to 0,$$

поэтому

$$1 - \omega(su,\gamma) = (su)^{\gamma_1}c_1 + O[(su)^{\gamma_2}], \quad c_1 > 0.$$

Это значит, что

$$\frac{1 - \omega(su,\gamma)}{(su)^{\gamma_1}} < c, \quad \text{если} \quad su < c_0.$$

Согласно условию теоремы

$$a(t) = o\Big(\frac{1}{t^{\gamma_1}}\Big), \quad a(t)t^{\gamma_1} = o(1),$$

т.е. $a(t)t^{\gamma_1} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, поэтому $|a(u)u^{\gamma_1}| < \varepsilon$, $u \ge T$.

С другой стороны, полагая, что $st < c$, будем иметь

$$|J_1(s,t)| \le c_1 s^{\gamma_1} c_* + s^{\gamma_1} c_{**}\varepsilon \int\limits_T^t du < H_1 s^{\gamma_1} + H_2 \varepsilon s^{\gamma_1} t < H_3 \varepsilon.$$

Получили $J_1(s,t) = o(1)$, $s \to 0$. Но st ограниченно, поэтому

$$|J_2(s,t)| \le \int\limits_t^\infty \omega(su,\gamma)|a(u)|du = \int\limits_t^\infty \omega(su,\gamma)|a(u)u^{\gamma_1}|u^{-\gamma_1}du =$$

$$= o(1)\int\limits_t^\infty \omega(su,\gamma)u^{-\gamma_1}du \le o(1)t^{-\gamma_1}\int\limits_t^\infty \omega(su,\gamma)du \le$$

$$\le o(1)t^{-\gamma_1}\int\limits_0^\infty \omega(su,\gamma)du.$$

Согласно (12)

$$\int\limits_0^\infty \omega(xt,\gamma)x^{\mu-1}dx = \frac{\tilde\Gamma(\mu,\gamma)}{t^\mu},$$

откуда при $\mu = 1$ получаем

$$\int\limits_0^\infty \omega(su,\gamma)du = \int\limits_0^\infty \omega(su,\gamma)u^{1-1}du = \frac{\tilde\Gamma(1,\gamma)}{s},$$

следовательно,

$$J_2(s,t) = o(1)t^{-\gamma_1}\frac{\tilde\Gamma(1,\gamma)}{s},$$

и, так как $\tilde\Gamma(1,\gamma)$—конечное число,

$$J_2(s,t) = o(1)\frac{1}{t^{\gamma_1}s},$$

когда $s \to 0$, $t \to \infty$ для $ts = 1$, $\gamma_1 \ge 1$.

Следовательно,

$$J_2(s,t) = o(1)\frac{1}{t^{\gamma_1}s}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Из (15) согласно оценкам $J_1(s,t)$ и $J_2(s,t)$ получаем

$$\int\limits_0^t a(u)du = \lim_{s\to 0} f(s) = A.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Для того чтобы из существования

$$\lim_{s\to 0} f(s) = A,$$

где

$$f(s) = \int\limits_0^\infty \omega(st,\gamma)d\alpha(t), \ \ \alpha(0+) = \alpha(0) = 0, \ \ \gamma_1 = 1 < \gamma_2, \tag{18}$$

следовали существование и равенство

$$\int\limits_0^\infty d\alpha(t) = A, \tag{19}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\beta(t) = \int\limits_0^t u d\alpha(u) = o(t), \ \ t \to \infty. \tag{20}$$

Необходимость. Пусть

$$\alpha(t) = \int\limits_0^t d\alpha(u) \to A, \ \ t \to \infty.$$

Из (20) интегрированием по частям получаем

$$\beta(t) = t\alpha(t) - \int\limits_0^t \alpha(u)du.$$

Из последнего равенства с учетом того, что

$$\int\limits_0^t \alpha(u)du = At + o(t), \ \ t \to \infty,$$

(так как $\int\limits_0^t \alpha(u)du = \int\limits_0^T \alpha(u)du + \int\limits_T^t \alpha(u)du = 0(1) + \int\limits_T^t (A + o(1))du = At+$ $+o(t)$), получаем, что

$$\frac{\beta(t)}{t} = \alpha(t) - \frac{1}{t}\int\limits_0^t \alpha(u)du \sim A - A + o(1), \ \ t \to \infty,$$

откуда следует, что

$$\beta(t) = o(t), \ \ t \to \infty.$$

Достаточность. Рассмотрим

$$J(s) = \int\limits_1^\infty \omega(st)d\alpha(t) = \int\limits_1^\infty \omega(st)\frac{d\beta(t)}{t}, \tag{21}$$

где

$$\beta(t) = \int\limits_0^t u d\alpha(u). \tag{20'}$$

Из (21) интегрированием по частям получаем

$$J(s)=\frac{\beta(t)\omega(st)}{t}\bigg|_{t=1}^{\infty}-\int_1^\infty\beta(t)\Big[\frac{\omega'(st)_t}{t}-\frac{\omega(st)}{t^2}\Big]dt=$$

$$=-\frac{\beta(t)\omega(st)}{t}\bigg|_{t=1}^{\infty}-\int_1^\infty\frac{\beta(t)}{t}\omega'(st)_t+\int_1^\infty\omega(st)\frac{\beta(t)}{t^2}dt. \qquad (21')$$

Согласно (17) имеем

$$\lim_{s\to0}\int_1^\infty\omega(st)d\alpha(t)=A-\int_0^1d\alpha(t)=-\alpha(1)+A. \qquad (22)$$

Значит,

$$\lim_{s\to0}J(s)=-\alpha(1)+A. \qquad (22')$$

Из (21′) согласно (20′) получим

$$A-\alpha(1)=-\beta(1)-\lim_{s\to0}\int_1^\infty\frac{\beta(t)}{t}\omega'(st)_tdt-$$

$$-\lim_{s\to0}\int_1^\infty\omega(st)\frac{\beta(t)}{t^2}dt=-\beta(1)-\lim_{s\to0}J_1(s)+\lim_{s\to0}J_2(s). \qquad (21'')$$

Докажем сперва, что

$$\lim_{s\to0}J_1(s)=\lim_{s\to0}\int_1^\infty\frac{\beta(t)}{t}\omega'(st)_tdt=0. \qquad (23)$$

Для этого заметим, что

$$\omega'(st)_t=\frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\frac{(st)^{-\zeta}t^{-1}d\zeta}{\mathrm{e}_{1,\infty}(\zeta,\gamma)}=\frac{-s}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\frac{(st)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\Big(1+\frac{\zeta-1}{\gamma_\nu}\Big)\mathrm{e}^{-\frac{\zeta-1}{\gamma_\nu}}}=$$

$$=-\frac{s}{\prod\limits_{\nu=2}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{\gamma_\nu-1}\Big)\mathrm{e}^{\frac{1}{\gamma_\nu}}}\frac{\gamma_1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}\frac{(st)^{-\zeta}d\zeta}{(\zeta+\gamma_1-1)\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\Big(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu-1}\Big)\mathrm{e}^{\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}}=s.O(1). \qquad (24)$$

Итак, $\omega'(st)_t=s.O(1)$, $s\to0$, если $\gamma_1=1$, и, кроме того, $\mathrm{Sgn}\,\omega'(st)_t=-1$.

Поэтому

$$\int_1^\infty\frac{\beta(t)}{t}\omega'(st)_tdt=\int_1^T\frac{\beta(t)}{t}\omega'(st)_tdt+$$

$$+\int_T^\infty \frac{\beta(t)}{t}\omega'(st)_t dt = s.O(1)+\int_T^\infty \frac{\beta(t)}{t}\omega'(st)_t dt.$$

Значит,

$$\int_1^\infty \frac{\beta(t)}{t}\omega'(st)_t dt = s.O(1)+o(1)\int_T^\infty(-\omega'(st)_t)dt = s.O(1)+o(1)\omega(sT),$$

так как

$$\lim_{t\to 0}\omega(st)=0 \text{ и } \omega(sT)\le 1.$$

Таким образом получаем, что

$$\lim_{s\to 0} J_1(s) = \lim_{s\to 0}\int_1^\infty \frac{\beta(t)}{t}\omega'(st)_t dt = 0. \tag{23'}$$

Возвращаясь к (21″) и учитывая (23′), получаем

$$A+\beta(1)-\alpha(1) = \lim_{s\to 0}\int_1^\infty \omega(st)\frac{\beta(t)}{t^2}dt. \tag{21'''}$$

Теперь нам остается выяснить, чему равняется

$$\lim_{s\to 0} J_2(s) = \lim_{s\to 0}\int_1^\infty \omega(st)\frac{\beta(t)}{t^2}dt. \tag{25}$$

Из того, что при обозначении $a(t) = \frac{\beta(t)}{t^2} = o(1/t)$ и существовании (согласно первой тауберовой теореме) предела

$$\lim_{s\to 0}\int_1^\infty \omega(st)a(t)dt,$$

следует сходимость интеграла $\int_1^\infty \frac{\beta(t)}{t^2}dt$. Но

$$\int_1^\infty \frac{\beta(t)}{t^2}dt = -\frac{\beta(t)}{t}\Big|_{t=1}^\infty + \int_1^\infty \frac{d\beta(t)}{t} = \beta(1)+\int_1^\infty d\alpha(t) = \alpha(\infty)-\alpha(1)+\beta(1).$$

Возвращаясь к (21‴) с учетом последнего равенства будем иметь

$$A+\beta(1)-\alpha(1) = \beta(1)+\alpha(\infty)-\alpha(1),$$

откуда следует, что

$$A = \alpha(\infty) = \int_0^\infty d\alpha(t).$$

Теорема доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю проф Г.В. Бадаляну за постоянное внимание к предлагаемой работе.

Кафедра мат.анализа

Поступила 17.12.1990

ЛИТЕРАТУРА

1. **Widder D.V.** The Laplace trans form 2ed,Princetion, 1946.
2. **Бадалян Г.В.** Применение преобразования типа свертки к теории обобщенной проблемы моментов Стилтьеса.—Изв.АН. СССР, серия математическая, 1967, т.31, вып.3, 491-530.
3. **Бадалян Г.В., Бабаян Ж.А.** Об общей сходимости одного преобразования типа свертки.—Межвуз.сб. Армении, Математика, 1991, N 7.

ԱԼ-ԱԲԴՈՒԼ-ՌԱԶԶԱԿ ԻՍԱՄ

ԱԲԵԼՅԱՆ ԵՎ ՏԱՈՒԲԵՐՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՓԱԹԵԹԻ ՏԻՊԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում ստացվել են Լապլասի ձևափոխության վերաբերյալ հայտնի աբելյան և տաուբերյան թեորեմների անալոգները ավելի ընդհանուր կորիկներով լապլասյան տիպի ձևափոխությունների համար:

ISAM AlABDUL-RAZZAK

ABELIAN AND TAUBERIAN THEOREMS FOR THE CONVOLUTION TYPE TRANSFORMATIONS

Summary

In this paper we have receved analogies of Abelian and Tauberian theorems for the generalization Laplace transformations, namely the following transformation:

$$f(s) = \int_0^\infty w(st, \gamma) d\alpha(t),$$

where the sequence is constructed $\gamma = \{\gamma_\upsilon\}$,

$$\gamma_0 = 0 < \gamma_1 < \gamma_2 \leq \cdots \leq \cdots, \quad \sum \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty, \quad \sum \frac{1}{\gamma_\nu^2} < \infty,$$

the function $w(t, \gamma)$ sumarized the nucleus of Laplace transformation.