

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՆԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վ. Ժ. ԴՈՒՄԱՆՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ

ՆԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

2017

ԵՐԵՎԱՆ

Մասնագետ խմբագիր՝ Ֆիզմաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա.Ն.Նովիանինյան  
Նրա փարակության խմբագիր՝ Լ.Գ.Մանուկյան

Ուսումնասիրվում են երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով գծային  
դիֆերենցիալ հավասարումները և նրանց լուծումների կառուցման եղանակները:

Երաշխավորված է ՆՆ ԿԳ նախարարության կողմից, որպես դասագիրք  
բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողների  
համար:

© Վ. Ժ. Դումանյան

# Բովանդակություն

<b>Ներածություն</b> .....	5
<b>Գլուխ 1. Երկրորդ կարգի հավասարումների դասակարգումը: Բնութագրիչ մակերևույթներ</b> .....	18
§ 1. Նավասարումների դասակարգումը .....	19
§ 2. Դասակարգման ինվարիանտությունը ողորկ փոխամիարժեք արտապատկերումների նկատմամբ .....	21
§ 3. Բնութագրիչ մակերևույթներ .....	23
<b>Գլուխ 2. Նիպերբուլական փիպի հավասարումներ</b> .....	27
§ 1. Կոշիի խնդիրը և Կոշիի լոկալացված խնդիրը ալիքային հավասարման համար .....	27
§ 2. Ֆուրյեի ձևափոխության կիրառումը ալիքային հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծումը ստանալու համար .....	29
§ 3. Կոշիի խնդիրը լարի փափուկման հավասարման համար: Դալանբերի բանաձևը .....	32
§ 4. Կոշիի խնդրի լուծման միակությունը ալիքային հավասարման համար ...	38
§ 5. Ալիքային հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը երեք փարածական փոփոխականների դեպքում .....	42
§ 6. Ալիքային հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը երկու և մեկ փարածական փոփոխականների դեպքում .....	47
§ 7. Ալիքների դիֆուզիայի մասին .....	50
§ 8. Խառը խնդիրը հիպերբուլական հավասարման համար .....	55
§ 9. Փոփոխականների անջատման մեթոդը .....	59
<b>Գլուխ 3. Պարաբոլական փիպի հավասարումներ</b> .....	70
§ 1. Ֆուրյեի ձևափոխության կիրառումը ջերմահաղորդականության հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծումը ստանալու համար .....	71

§ 2. Ֆունդամենտալ լուծում: Զերմահաղորդականության հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը	73
§ 3. Լուծման միակությունը: Մաքսիմումի սկզբունքը: Լուծման անընդհատ կախվածությունը սկզբնական ֆունկցիայից	78
§ 4. Խառը խնդիրը պարաբոլական հավասարման համար	86
§ 5. Փոփոխականների անջատման մեթոդը	90
<b>Գլուխ 4. Էլիպսական փայի հավասարումներ</b>	<b>98</b>
§ 1. Նարմոնիկ ֆունկցիաներ: Լապլասի հավասարման ֆունդամենտալ լուծումը: Գրինի բանաձևերը	98
§ 2. Պոպերենցիալներ: Ողորկ ֆունկցիայի ներկայացումը պոպերենցիալների գումարի տեսքով	101
§ 3. Միջինի մասին թեորեմը	104
§ 4. Մաքսիմումի սկզբունքը	106
§ 5. Դիրիխլեի խնդիր: Լուծման միակությունը և անընդհատ կախվածությունը եզրային ֆունկցիայից	109
§ 6. Ողորկ ֆունկցիայի ներկայացումը գնդում: Գրինի ֆունկցիան գնդի համար	112
§ 7. Լապլասի հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծման գոյությունը գնդում	116
§ 8. Միջինի մասին հակադարձ թեորեմը	119
§ 9. Վերացնելի եզակիության մասին թեորեմը	120
§ 10. Լիուվիլի թեորեմը	123
§ 11. Նեյմանի խնդիրը Լապլասի հավասարման համար՝ գնդում	124
<b>Գրականություն</b>	<b>130</b>

## Ներածություն

Դիֆերենցիալ հավասարումներ կոչվում են այն հավասարումները, որոնցում անհայտները մեկ կամ մի քանի փոփոխականներից կախված ֆունկցիաներ են, ընդ որում հավասարումների մեջ մասնակցում են ինչպես անհայտ ֆունկցիաները, այնպես էլ նրանց ածանցյալները: Եթե անհայտ ֆունկցիաները կախված են մեկ փոփոխականից, ապա հավասարումները կոչվում են սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ, իսկ եթե անհայտ ֆունկցիաները կախված են մի քանի (երկու կամ ավելի) փոփոխականներից, ապա հավասարումները կոչվում են մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումներ: Նավասարման մեջ մասնակցող որոնելի ֆունկցիայի ածանցյալի մաքսիմալ կարգը կոչվում է հավասարման կարգ:

Դասագրքում ուսումնասիրվում են միայն երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումները:

Ներմուծենք որոշ նշանակումներ:  $R_n$ -ով նշանակենք  $n$ -չափանի Էվկլիդեսյան փարածությունը,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ -ով նշանակենք  $R_n$  փարածության կետը,  $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ :  $R_n$  փարածության փիրույթ կամ  $n$ -չափանի փիրույթ ասելով կհասկանանք  $R_n$  փարածության կետերի բաց և կապակցված բազմություն (ոչ դափարկ):

Դիցուք  $Q$ -ն  $n$ -չափանի փիրույթ է:  $E \subset Q$  բազմությունը կոչվում է  $Q$ -ի համար *խիստ ներքին*, եթե  $\bar{E} \subset Q$ , որպեսզի  $\bar{E}$ -ով նշանակված է  $E$  բազմության փակումը  $R_n$  փարածության մեքրիկայով:

$C^k(Q)$ -ով նշանակենք  $Q$  փիրույթում մինչև  $k$ -րդ կարգը ներառյալ անընդհատ մասնական ածանցյալներ ունեցող բոլոր ֆունկցիաների բազմությունը, որպեսզի  $k$ -ն ոչբացասական ամբողջ թիվ է:

$C^k(\bar{Q})$ -ով նշանակենք  $C^k(Q)$  բազմության ենթաբազմությունը, որը բաղկացած է բոլոր այն ֆունկցիաներից, որոնց մինչև  $k$ -րդ կարգը ներառյալ

մասնական ածանցյալները անընդհատ են  $\bar{Q}$ -ում:

$C^0(Q)$  և  $C^0(\bar{Q})$  բազմությունների համար, որոնք համապատասխանաբար  $Q$ -ում և  $\bar{Q}$ -ում անընդհատ ֆունկցիաների բազմություններն են, կօգտագործենք նաև  $C(Q)$  և  $C(\bar{Q})$  նշանակումները:

$C^\infty(Q)$ -ով նշանակենք այն ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք պարկանում են բոլոր  $C^k(Q)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , բազմություններին՝  $C^\infty(Q) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(Q)$ :

$C^\infty(\bar{Q})$ -ով նշանակենք այն ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք պարկանում են բոլոր  $C^k(\bar{Q})$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , բազմություններին՝  $C^\infty(\bar{Q}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\bar{Q})$ :

$f(x)$  ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալների համար կօգտագործենք նաև  $f_{x_i}$ ,  $f_{x_i x_j}$  նշանակումները.

$$f_{x_i} \equiv \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad f_{x_i x_j} \equiv \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} :$$

$f \in C^1(Q)$  ֆունկցիայի  $(f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$  գրադիենտը կնշանակենք  $\nabla f$ :

$(n-1)$ -չափանի  $S$  փակ մակերևույթ ասելով՝ կհասկանանք  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , դասի առանց եզրի  $(n-1)$ -չափանի սահմանափակ փակ մակերևույթ, այսինքն՝  $R_n$ -ում ընկած կապակցված սահմանափակ փակ մակերևույթ ( $S = \bar{S}$ ), որն օժտված է հետևյալ հատկությամբ.

ցանկացած  $x^0 \in S$  կետի համար գոյություն ունի այդ կետի  $U_{x^0}$  շրջակայք  $(n-1)$ -չափանի) և  $C^k(U_{x^0})$ -ին պարկանող այնպիսի  $F_{x^0}(x)$  ֆունկցիա, ընդ որում  $\nabla F_{x^0}(x^0) \neq 0$ , որ  $S \cap U_{x^0}$  բազմությունը նկարագրվում է  $F_{x^0}(x) = 0$  հավասարումով ( $S \cap U_{x^0}$  բազմության բոլոր կետերը բավարարում են  $F_{x^0}(x) = 0$  հավասարմանը, և  $U_{x^0}$ -ին պարկանող ցանկացած կետ, որը բավարարում է  $F_{x^0}(x) = 0$  հավասարմանը, պարկանում է  $S$ -ին):

$Q$  փիրույթի եզրը կնշանակենք  $\partial Q$ -ով: Այսուհետ կենթադրենք, եթե հակառակը հաբուկ չենվի, որ դիֆարկվող փիրույթների եզրերը բաղկացած են վերջավոր թվով իրար հետ չհապվող  $(n-1)$ -չափանի  $C^1$  դասի փակ մակերևույթներից: Նկատենք, որ եթե  $S$  փակ մակերևույթը պարկանում է  $C^k$  դասին, ապա այդ մակերևույթի ցանկացած  $x^0 \in S$  կետի համար գոյություն ունի այդ կետի այն-

քան փոքր  $U'_{x^0}$  շրջակայք, որ  $S \cap U'_{x^0}$  հափումը միարժեքորեն պրոյեկտվում է կոորդինատական հարթություններից մեկում ընկած  $C^k$  դասին պարականոց եզր ունեցող որևէ  $(n - 1)$ -չափանի  $D_{x^0}$  փրիույթի վրա. գոյություն ունի այնպիսի  $i, i = 1, \dots, n$ , որ այդ հափումը նկարագրվում է

$$x_i = \varphi_{x^0}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in D_{x^0},$$

հավասարումով և  $\varphi_{x^0} \in C^k(\overline{D}_{x^0})$ :  $S \cap U'_{x^0}$  հափումը կանվանենք  $S$  մակերևույթի *պարզ կտոր* (կամ *կտոր*):

Քանի որ  $S$  մակերևույթը սահմանափակ է և փակ, ապա  $\{U_x, x \in S\}$  ծածկույթից կարելի է ընտրել վերջավոր ենթածածկույթ: Այդպիսի վերջավոր ենթածածկույթին համապատասխանող  $S_1, \dots, S_N$  պարզ կտորների համախումբը կանվանենք  $S$  մակերևույթի պարզ կտորներով ծածկույթ:

$(n - 1)$ -չափանի  $C^k, k \geq 1$ , դասի  $S$  մակերևույթ ասելով՝ կհասկանանք կապակցված մակերևույթ, որը կարելի է այնպես ծածկել վերջավոր թվով  $U_i, i = 1, \dots, N$ , փրիույթներով ( $n$ -չափանի), որ  $S_i = S \cap U_i, i = 1, \dots, N$ , բազմություններից յուրաքանչյուրը միարժեքորեն պրոյեկտվում է կոորդինատական հարթություններից մեկում ընկած  $C^k$  դասին պարականոց եզրով որևէ  $(n - 1)$ -չափանի  $D_i$  փրիույթի վրա. որևէ  $p$ -ի համար,  $p = p(i), 1 \leq p \leq n$ , այդ հափումը նկարագրվում է

$$x_p = \varphi_i(x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_n) \in D_i,$$

հավասարումով և  $\varphi_i \in C^k(\overline{D}_i)$ :  $S$  մակերևույթի  $U_1, \dots, U_N$  ծածկույթին համապատասխանող  $S_i, i = 1, \dots, N$ , պարզ կտորների համախումբը կանվանենք  $S$  մակերևույթի պարզ կտորներով ծածկույթ: Այսուհետ  $(n - 1)$ -չափանի մակերևույթ ասելով՝ կհասկանանք  $C^k, k \geq 1$ , դասի  $(n - 1)$ -չափանի մակերևույթ:

Դիցուք  $S$ -ը  $\overline{Q}$ -ում ընկած  $C^k, k \geq 1$ , դասի որևէ մակերևույթի պարզ կտոր է և դիցուք

$$x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \varphi(x'), \quad x' \in D, \quad \varphi(x') \in C^k(\overline{D}),$$

այդ կտրորի հավասարումն է:

Կասենք, որ  $S$ -ի վրա փրված  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x \in S$ , ֆունկցիան պարկանում է  $C^k(S)$  բազմությանը,  $f \in C^k(S)$ , եթե  $f(x', \varphi(x'))$  ֆունկցիան պարկանում է  $C^k(\bar{D})$  բազմությանը:

Ենթադրենք  $S$ -ը  $\bar{Q}$ -ում ընկած  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , դասի փակ մակերևույթ է (մասնավորապես  $S = \partial Q$ ) և  $S_1, \dots, S_N$  նրա պարզ կտրորներով ծածկույթ է: Կասենք, որ  $S$ -ի վրա փրված  $f(x)$ ,  $x \in S$ , ֆունկցիան պարկանում է  $C^k(S)$  բազմությանը,  $f \in C^k(S)$ , եթե  $f \in C^k(S_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ : Դժվար չէ նկատել, որ  $f(x)$  ֆունկցիայի պարկանելությունը  $C^k(S)$  բազմությանը կախված չէ  $S$  մակերևույթի պարզ կտրորներով ծածկույթից:

Վերադառնանք դիֆերենցիալ հավասարումներին:

Կիրառություններում անհրաժեշտություն է առաջանում ուսումնասիրել դիֆերենցիալ հավասարումներ և որոշակի փիրություն գտնել ճշգրիտ, կամ մոտավոր, լուծումներ կամ ուսումնասիրել լուծման որակական հարկությունները: Ընդ որում, դիֆարկվում են դիֆերենցիալ հավասարման ոչ բոլոր լուծումները, այլ այն լուծումները, որոնք, որպես կանոն, փիրության եզրի վրա բավարարում են ուսումնասիրվող խնդրի բնույթից բխող լրացուցիչ պայմանների: Բերենք մի քանի փրպային օրինակներ:

**1. Մենբրանի հավասարակշռության և շարժման խնդիրը:** Խնդիրը կայանում է հեթևյալում՝ գտնել ուժերի ազդեցության փակ գտնվող մենբրանի հավասարակշռության դիրքը:

Ենթադրվում է, որ մենբրանի ցանկացած թույլափրելի դիրք իրենից ներկայացնում է  $(x, u) = (x_1, x_2, u)$  փարածության մակերևույթ, որը միարժեքորեն պրոյեկտվում է  $x_1 O x_2$  հարթության որևէ  $Q$  փիրության վրա և փրվում է  $u = u(x)$ ,  $x \in Q$ , հավասարումով, որպեսզի  $u \in C^1(\bar{Q})$ :

Ենթադրվում է, որ եթե  $u = \varphi(x)$ ,  $x \in Q$ , մենբրանի որևէ թույլափրելի դիրք է, ապա ցանկացած այլ  $u = u(x)$  թույլափրելի դիրք սրացվում է  $u = \varphi(x)$  դիրքից



մենբրանի յուրաքանչյուր կետի  $Ou$  առանցքին զուգահեռ փեղափոխությամբ:

Ենթադրվում է նաև, որ մենբրանի վրա ազդող արտաքին ուժը ուղղված է  $Ou$  առանցքին զուգահեռ և ունի  $f(x)$  անընդհատ խտություն: Մենբրանը  $\varphi$  դիրքից  $u$  դիրքը փեղափոխելու համար այդ ուժի կարարած աշխատանքը հավասար է

$$\int_Q \int_{\varphi(x)}^{u(x)} f(x) du dx = \int_Q f(x) (u(x) - \varphi(x)) dx :$$

Բացի այդ, մենբրանի վրա ազդում է նաև ներքին ուժ: Կհամարենք, որ մենբրանը  $\varphi$  դիրքից  $u$  դիրքը փեղափոխելու ընթացքում այդ ուժի կարարած աշխատանքը հավասար է

$$- \int_Q k(x) \left( \sqrt{1 + |\nabla u|^2} - \sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2} \right) dx$$

( $(x_1, x_1 + \Delta x_1) \times (x_2, x_2 + \Delta x_2)$  քարրին այդ ուժի հարկացրած աշխատանքը համեմատական է մենբրանի մակերևույթի այն մասի մակերեսի փոփոխությանը, որը պրոյեկտվում է այդ քարրի վրա,  $k(x) > 0$  գործակիցը կոչվում է մենբրանի ճկվածություն,  $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2})$ ):

Եթե մենբրանի եզրի կետերում կիրառված է  $g_1(x, u) = g_1(x) - \sigma_1(x)u$  ( $\sigma_1(x) \geq 0$  եզրի առաձգական ամրացման գործակիցն է) գծային խտությամբ ուժ, ապա մենբրանը  $\varphi(x)$  դիրքից  $u(x)$  դիրքը փեղափոխելու համար այդ ուժի կարարած աշխատանքը հավասար է

$$\int_{\partial Q} \int_{\varphi(x)}^{u(x)} g_1(x, u) du dS = \int_{\partial Q} \left( g_1(x) (u(x) - \varphi(x)) - \frac{\sigma_1(x)}{2} (u^2(x) - \varphi^2(x)) \right) dS :$$

$u(x)$  դիրքում մենբրանի պոպենցիալ էներգիան հավասար է

$$U(u) = U(\varphi) + \int_Q k(x) \left( \sqrt{1 + |\nabla u|^2} - \sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2} \right) dx - \int_Q f(x)(u - \varphi) dx + \\ + \int_{\partial Q} \left( \frac{\sigma_1}{2} (u^2 - \varphi^2) - g_1(u - \varphi) \right) dS,$$

որտեղ  $U(\varphi)$ -ն  $\varphi$  դիրքում մենբրանի պոպենցիալ էներգիան է:

Պարզության համար ենթադրենք, որ մեմբրանի թույլափրելի  $u(x)$  դիրքերի համար  $\nabla u(x)$  բավականաչափ փոքր է և  $|\nabla u|^4$  կարգի անդամները կարող ենք հաշվի չառնել: Այդ դեպքում  $u(x)$  դիրքում մեմբրանի պոտենցիալ էներգիան կընդունի

$$U(u) = U(\varphi) + \int_Q \frac{k}{2} (|\nabla u|^2 - |\nabla \varphi|^2) dx - \int_Q f(x)(u - \varphi) dx + \\ + \int_{\partial Q} \left( \frac{\sigma_1}{2} (u^2 - \varphi^2) - g_1 (u - \varphi) \right) dS$$

փեսքը:

Եթե  $u(x)$ -ը մեմբրանի հավասարակշռության դիրքն է, ապա ցանկացած որևէ այլ թույլափրելի  $v(x)$  դիրքի դեպքում  $t = 0$  կերը

$$P(t) = U(u + tv) = U(u) + t \left[ \int_Q (k \nabla u \nabla v - f v) dx + \int_{\partial Q} (\sigma_1 u v - g_1 v) dS \right] + \\ + \frac{t^2}{2} \left[ \int_Q k |\nabla v|^2 dx + \int_{\partial Q} \sigma_1 v^2 dS \right]$$

բազմանդամի (ըստ  $t$ -ի) մինիմումի կեր է (այսպես  $\nabla u \nabla v$ -ով նշանակված է  $\nabla u$  և  $\nabla v$  վեկտորների սկալյար արտադրյալը՝  $\nabla u \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + u_{x_2} v_{x_2}$ ): Ներկայացնենք,

$$\frac{dP(0)}{dt} = 0,$$

որտեղից ստացվում է, որ ցանկացած  $v \in C^1(\overline{Q})$  ֆունկցիայի համար մեմբրանի հավասարակշռության դիրքը նկարագրող  $u(x)$  ֆունկցիան բավարարում է

$$\int_Q k \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial Q} \sigma_1 u v dS = \int_Q f v dx + \int_{\partial Q} g_1 v dS \quad (0.1)$$

ինքնագրալ նույնությանը:

Եթե մեմբրանի եզրը անշարժ է, այսինքն՝ կոշտ ամրացված է, ապա մեմբրանի բոլոր թույլափրելի  $u(x)$  դիրքերը բավարարում են

$$u \Big|_{\partial Q} = \varphi \Big|_{\partial Q} \quad (0.2)$$

պայմանին, և այդ դեպքում կանայական  $u(x)$  դիրքում մեմբրանի պոպենցիալ էներգիան հավասար է

$$U(u) = U(\varphi) + \int_Q \left( \frac{k}{2} (|\nabla u|^2 - |\nabla \varphi|^2) - f(u - \varphi) \right) dx :$$

Դիցուք  $u$ -ն կոշտ ամրացված մեմբրանի հավասարակշռության դիրքն է: Այդ դեպքում ցանկացած  $v \in C^1(\overline{Q})$  ֆունկցիայի համար, որը բավարարում է

$$v|_{\partial Q} = 0 \tag{0.3}$$

պայմանին,  $u + tv$  ֆունկցիան կբավարարի (0.2) պայմանին: Ներկայացնելով, բոլոր այդպիսի  $v$  ֆունկցիաների համար

$$P(t) = U(u + tv) = U(u) + t \int_Q (k \nabla u \nabla v - f v) dx + \frac{t^2}{2} \int_Q k |\nabla v|^2 dx$$

բազմանդամը  $t = 0$  կետում ընդունում է փոքրագույն արժեք: Ուստի, (0.3) պայմանին բավարարող ցանկացած  $v \in C^1(\overline{Q})$  ֆունկցիայի համար կոշտ ամրացված մեմբրանի հավասարակշռության դիրքը նկարագրող  $u(x)$  ֆունկցիան բավարարում է

$$\int_Q k \nabla u \nabla v dx = \int_Q f v dx \tag{0.4}$$

ինպեգրալ նույնությանը: Եթե համարենք, որ մեմբրանի հավասարակշռության  $u$  որոնելի դիրքը արվում է ոչ թե մեկ, այլ երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիայի միջոցով,  $u \in C^2(\overline{Q})$ , ապա (0.1) և (0.4) ինպեգրալ պայմանները կարելի է փոխարինել լոկալ պայմաններով՝ ենթադրելով  $k(x) \in C^1(\overline{Q})$ ,  $k(x) > 0$ ,  $x \in \overline{Q}$ ,  $\sigma_1, g_1, \varphi \in C(\partial Q)$ :

Նամաձայն Օստրոգրադսկու բանաձևի

$$\int_Q k \nabla u \nabla v dx = - \int_Q v \operatorname{div} (k \nabla u) dx + \int_{\partial Q} k \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS,$$

որտեղ  $A = (A_1, A_2)$  վեկտորի համար  $div A = A_{1x_1} + A_{2x_2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial Q} = (\nabla u, \nu) \Big|_{\partial Q} = (u_{x_1} \nu_1 + u_{x_2} \nu_2) \Big|_{\partial Q}$ ,  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ -ը  $\partial Q$ -ին փարված  $Q$ -ի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալ վեկտորն է: Ներկայացրեք, (0.1) և (0.4) նույնությունները կարելի է գրել

$$\int_Q (div(k\nabla u) + f)v dx - \int_{\partial Q} \left( k \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma_1 u - g_1 \right) v dS = 0 \quad (0.1')$$

և

$$\int_Q (div(k\nabla u) + f)v dx = 0 \quad (0.4')$$

տեսքով:

Քանի որ  $div(k\nabla u) + f$  ֆունկցիան անընդհատ է, ապա (0.4') նույնությունից ստանում ենք

$$div(k\nabla u) + f = 0, \quad x \in Q, \quad (0.5)$$

ինչը կոչվում է անընդհատ մեմբրանի դեպքում (0.2) եզրային պայմանի հետ միասին հանդիսանում է այն լուծված պայմանը, որին պետք է բավարարի որոնելի  $u(x)$  ֆունկցիան: (0.2) եզրային պայմանին բավարարող (0.5) հավասարման լուծումը գտնելու խնդիրը կոչվում է *սուսջին եզրային խնդիր* (կամ *Դիրիխլեի խնդիր*) (0.5) հավասարման համար:

Քանի որ (0.1')-ում  $v(x)$  կամայական ֆունկցիա է  $C^1(\overline{Q})$  դասից, ապա դիտարկելով մասնավորապես (0.3) պայմանին բավարարող  $v(x)$  ֆունկցիաներ՝ կտանանք, որ այս դեպքում ևս  $u(x)$  ֆունկցիան բավարարում է (0.5) հավասարմանը: Ներկայացրեք, (0.1') նույնությունը կարելի է գրել

$$\int_{\partial Q} \left( k \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma_1 u - g_1 \right) v dS = 0$$

տեսքով: Դիցուք  $\sigma_1, g_1 \in C^1(\partial Q)$ : Քանի որ  $C^1(\partial Q)$ ,  $\partial Q \subset C^1$ , բազմությանը պարկանող ցանկացած ֆունկցիա ունի  $C^1(\overline{Q})$ -ին պարկանող շարունակություն, ապա վերջին նույնությունից ստանում ենք

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right) \Big|_{\partial Q} = g \quad (0.6)$$

եզրային պայմանը, որպես  $\sigma = \frac{\sigma_1}{k} \geq 0$ ,  $g = \frac{g_1}{k}$ :

(0.6) եզրային պայմանին բավարարող (0.5) հավասարման լուծումը գտնելու խնդիրը կոչվում է *երրորդ եզրային խնդիր* (0.5) հավասարման համար:  $\sigma \equiv 0$  դեպքում երրորդ եզրային խնդիրը կոչվում է *երկրորդ եզրային խնդիր* (կամ *Նեյմանի խնդիր*): Այս դեպքում եզրային պայմանն ունի

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial Q} = g \quad (0.7)$$

տեսքը: Այսպիսով սրացանք, որ մեմբրանի հավասարակշռության դիրքը նկարագրվում է (0.5) հավասարման լուծման միջոցով, որը բավարարում է որոշակի եզրային պայմանի:

Այժմ դիտարկենք մեմբրանի շարժման խնդիրը:

Դիցուք  $u(x, t)$  ֆունկցիան որոշում է մեմբրանի դիրքը ժամանակի  $t$  պահին: Այդ դեպքում  $u_t(x, t)$  և  $u_{tt}(x, t)$  ֆունկցիաները որոշում են մեմբրանի  $x \in Q$  կետի արագությունը և արագացումը (ենթադրվում է, որ այդ ածանցյալները գոյություն ունեն): Դիցուք ժամանակի որոշակի  $t = t_0$  պահին արված են մեմբրանի  $(x, t)$  կետի դիրքը և արագությունը.

$$u|_{t=t_0} = \psi_0(x), \quad x \in \bar{Q}, \quad (0.8)$$

$$u_t|_{t=t_0} = \psi_1(x), \quad x \in \bar{Q}: \quad (0.9)$$

(0.8) և (0.9) պայմանները կոչվում են *սկզբնական պայմաններ*:

Դալամբերի սկզբունքի համաձայն՝ մեմբրանի շարժման հավասարումը մեմբրանի հավասարակշռության (0.5) հավասարումն է, որում  $f(x)$  ֆունկցիան փոխարինված է  $-\rho(x)u_{tt} + f(x, t)$  ֆունկցիայով ( $-\rho(x)u_{tt}$ -ն իներցիայի ուժի խտությունն է  $x$  կետում,  $f(x, t)$ -ն արտաքին ուժի խտությունն է, որը, ընդհանրապես ասած, կախված է  $t$ -ից).

$$\operatorname{div}_x (k \nabla_x u) + f(x, t) - \rho(x)u_{tt} = 0, \quad x \in Q, \quad t > t_0: \quad (0.10)$$

$\partial Q$  եզրի վրա արված պայմաններից կախված, ինչպես և սրացիոնար դեպքում,

եզրային պայմանները ընդունում են (0.2), (0.6) կամ (0.7) տեսքը և տեղի ունեն  
 դիֆարկվող ժամանակի բոլոր  $t \geq t_0$  արժեքների համար:

(0.2), (0.8), (0.9) կամ (0.7), (0.8), (0.9) (կամ (0.6), (0.8), (0.9))  
 պայմաններին բավարարող (0.10) հավասարման լուծումը գտնելու խնդիրը  
 կոչվում է, համապատասխանաբար, *ստաշին* կամ *երկրորդ* (կամ *երրորդ*)  
*խտր խնդիր* (0.10) հավասարման համար:

Այսպիսով, մենբրանի շարժումը նկարագրվում է (0.10) հավասարման լուծման  
 միջոցով, որը բավարարում է սկզբնական և որոշակի եզրային պայմանների:

Անվերջ փարածված մենբրանի դեպքում ( $Q = R_2$ ) շարժումը նկարագրող  
 $u(x, t)$ ,  $x \in R_2$ ,  $t > 0$ , ֆունկցիան (0.10) հավասարման լուծում է և բավարարում  
 է (0.8), (0.9) սկզբնական պայմաններին: Այդ դեպքում ասում են, որ  $u(x, t)$   
 ֆունկցիան (0.10) հավասարման համար *սկզբնական խնդրի* (*Կոշիի խնդրի*)  
 լուծում է:

Եթե (0.5) և (0.10) հավասարումներում գործակիցները հաստատուններ են,  
 $k(x) \equiv k > 0$ ,  $\rho(x) \equiv \rho > 0$ , ապա այդ հավասարումները համապատասխանա-  
 բար կոչվում են՝

*Պուասոնի հավասարում.*

$$\Delta u = -\frac{f(x)}{k}, \quad x \in Q, \quad (0.5')$$

և *ալիքային հավասարում.*

$$\frac{1}{a_0^2} u_{tt} - \Delta u = -\frac{f(x, t)}{k}, \quad x \in Q, \quad t > t_0, \quad a_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad (0.10')$$

որտեղ  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  և կոչվում է *Լապլասի օպերատոր*:

Մեկ փարածական փոփոխականի դեպքում (0.10') հավասարումն ունի

$$\frac{1}{a_0^2} u_{tt} - u_{xx} = -\frac{f(x, t)}{k}, \quad x \in (\alpha, \beta), \quad t > t_0, \quad (0.10'')$$

տեսքը: Այս հավասարումը նկարագրում է  $(\alpha, \beta)$  միջակայքի վրա տեղակայված

լարի շարժումը: Եռաչափ  $x = (x_1, x_2, x_3)$  դեպքում

$$\frac{1}{a_0^2} u_{tt} - \Delta u = -\frac{f(x, t)}{k}, \quad x \in Q, t > t_0, \quad (0.10''')$$

հավասարումը, որտեղ  $\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}$ , նկարագրում է գազի շարժումը  $Q$  փրոյություն ( $u(x, t)$  ֆունկցիան բնութագրում է ժամանակի  $t$  պահին  $x \in Q$  կետում գազի ճնշման շեղումը հասարակրոն ճնշումից): Այս դեպքում  $a_0$ -ն գազում ձայնի փարածման արագությունն է:

**2. Ջերմության փարածման խնդիրը:** Դիցուք եռաչափ փարածության  $Q$  փրոյություն ունենք նյութ, որն ունի  $\rho > 0$  խտություն,  $c > 0$  ջերմունակություն և  $k(x) > 0$  ջերմահաղորդականության գործակից:  $u(x, t)$ -ով նշանակենք  $t$  պահին  $x \in Q$  կետում ջերմաստիճանը: Ենթադրենք, որ  $t = t_0$  սկզբնական պահին ջերմաստիճանը հայտնի է,

$$u(x, t)|_{t=t_0} = \psi_0(x), \quad x \in Q, \quad (0.11)$$

և պահանջվում է գտնել ջերմաստիճանը  $t > t_0$  համար:

Դիցուք  $Q'$  փրոյությոն  $Q$ -ի որևէ ենթափրոյությոն է: Ֆուրյեի օրենքի համաձայն՝  $(t_1, t_2)$ ,  $t_0 \leq t_1 < t_2$ , ժամանակահատվածում  $\partial Q'$  եզրով  $Q'$  փրոյությոն մտնող ջերմության քանակը հավասար է

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

որտեղ  $\nu$ -ն  $\partial Q'$ -ին փարված  $Q'$ -ի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալն է:

Եթե  $Q$  փրոյություն առկա է  $f(x, t)$  խտությամբ ջերմության աղբյուր, ապա  $(t_1, t_2)$  ժամանակահատվածում  $Q'$  - ում ջերմության աճը հավասար է

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{Q'} f(x, t) dx + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS :$$

Այդ ջերմությունը ծախսվում է յուրաքանչյուր  $x \in Q'$  կետում ջերմաստիճանի

արժեքը  $u(x, t_1)$ -ից մինչև  $u(x, t_2)$  փոփոխելու վրա և Գրեդի ունի

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{Q'} f(x, t) dx + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_{Q'} c(x) \rho(x) (u(x, t_2) - u(x, t_1)) dx$$

ջերմային հավասարակշռության հավասարումը: Նաշվի առնելով, որ

$$u(x, t_2) - u(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

և օգտվելով Օսթրոգրադսկու բանաձևից՝ կստանանք

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{Q'} \left( c(x) \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (k(x) \nabla u) - f(x, t) \right) dx = 0,$$

որտեղ  $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$ :

Եթե ենթաինքագրալային ֆունկցիան անընդհատ է  $Q$  փրոյթում, ապա հաշվի առնելով  $Q'$  փրոյթի և  $(t_1, t_2)$  միջակայքի կամայական լիները՝ կստանանք, որ վերջին հավասարությունը համարժեք է

$$c(x) \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (k(x) \nabla u) = f(x, t), \quad x \in Q, t > t_0, \quad (0.12)$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը: Այն դեպքում, երբ  $c(x)$ ,  $\rho(x)$  և  $k(x)$  ֆունկցիաները հասարարուններ են՝  $c(x) = c$ ,  $\rho(x) = \rho$ ,  $k(x) = k$ , (0.12) հավասարումը կոչվում է *ջերմահաղորդականության հավասարում*.

$$\frac{1}{a^2} u_t - \Delta u = \frac{f(x, t)}{c\rho}, \quad (0.12')$$

որտեղ  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ ,  $\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3}$ :

Նկատենք, որ (0.12) հավասարումը Գրեդի ունի միայն  $t > t_0$  և միայն  $Q$  փրոյթի ներքին կետերի համար:  $u(x, t)$  ֆունկցիայի վարքը  $t = t_0$  պահին արվում է (0.11) սկզբնական պայմանով, իսկ  $x \in \partial Q$  կետերում պետք է արվի լրացուցիչ: Այն թելադրվում է ֆիզիկական կոնկրետ խնդրով, որը ջերմային կապ է հասարարում  $Q$  փրոյթի և արտաքին միջավայրի միջև:



Պարզագույն դեպքում  $\partial Q$  եզրի վրա  $t$ -ի բոլոր դիֆարկվող արժեքների համար արվում է  $u(x, t)$  ջերմաստիճանը՝

$$u|_{\partial Q} = f_0(x, t) : \quad (0.13)$$

Այդ դեպքում ջերմաստիճանը կնկարագրվի (0.12) հավասարման այն լուծման միջոցով, որը բավարարում է (0.11) և (0.13) պայմաններին:

Եթե հայտնի է  $\partial Q$  եզրով ջերմային հոսքի  $q_0(x, t)$  խտությունը, ապա Ֆուրյեի օրենքի համաձայն՝ եզրային պայմանն ունի

$$k(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial Q} = q_0(x, t) \quad (0.14)$$

փեսքը:

Եթե հայտնի է  $Q$  փիրույթից դուրս ընկած միջավայրի  $u_0(x, t)$  ջերմաստիճանը, և  $\partial Q$  եզրով ջերմային հոսքի  $q_0(x, t)$  խտությունը համեմատական է  $u|_{\partial Q}$  և  $u_0|_{\partial Q}$  ջերմաստիճանների փարբերությանը, ապա եզրային պայմանն ընդունում է

$$\left( k(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} + k_1 u \right) \Big|_{\partial Q} = k_1 u_0 \Big|_{\partial Q} \quad (0.15)$$

փեսքը, որտեղ  $k_1(x) > 0$  շրջակա միջավայրի հետ մարմնի ջերմափոխանակության գործակիցն է:

(0.11), (0.13) կամ (0.11), (0.14) (կամ (0.11), (0.15)) պայմաններին բավարարող (0.12) հավասարման լուծումը գտնելու խնդիրը կոչվում է, համապատասխանաբար, *ստաջին* կամ *երկրորդ* (կամ *երրորդ*) *խտոր խնդիր* (0.12) հավասարման համար:

Այն դեպքում, երբ նյութը լցնում է ամբողջ  $R_3$  տարածությունը ( $Q = R_3$ ),  $u(x, t)$  ջերմաստիճանը բավարարում է (0.12) հավասարմանը, երբ  $t > t_0$  և (0.11) սկզբնական պայմանին, երբ  $t = t_0$ : Այդ դեպքում ասում են, որ  $u(x, t)$  ֆունկցիան (0.12) հավասարման համար *սկզբնական խնդիր* (*Կոչիի խնդիր*) լուծում է:

## Գլուխ 1

### Երկրորդ կարգի հավասարումների դասակարգումը Բնութագրիչ մակերևույթներ

$n$ -չափանի  $R_n$ ,  $n > 1$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , փարածության  $Q$  բաց բազմության վրա դիֆարենց

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x), \quad x \in Q, \quad (1.1)$$

երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ հավասարման  $a_{ij}$ ,  $a_i$ ,  $a$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ) գործակիցները փրված իրական արժեքանի ֆունկցիաներ են  $C(Q)$ -ից, հավասարման  $f(x)$  ազատ անդամը (աջ մասը) փրված ֆունկցիա է  $C(Q)$ -ից:  $u(x)$  ֆունկցիան կոչվում է (1.1) հավասարման լուծում, եթե  $u \in C^2(Q)$  և բավարարում է (1.1) հավասարմանը: Բարձր կարգի ածանցյալների  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) գործակիցները ձևավորում են *ավագ գործակիցների*  $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$  բառակուսային մատրից:

Ներագայում, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կենթադրենք, որ  $A(x)$  մատրիցը սիմետրիկ է: Իրոք, հաշվի առնելով այն փաստը, որ  $C^2(Q)$  դասին պարկանող ֆունկցիաների համար

$$u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$
$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} = \sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} u_{x_i x_j},$$

այս  $A(x)$  մատրիցի փոխարեն միշտ կարելի է վերցնել

$$\frac{1}{2}\|a_{ij}(x) + a_{ji}(x)\| = \frac{1}{2}(A(x) + A^*(x))$$

սիմետրիկ մատրիցը (չփոխելով հավասարումը):

## § 1. Նավասարումների դասակարգումը

Վերցնենք կամայական  $x$  կետ  $Q$ -ից:  $\|A(x)\|$  մատրիցի սեփական արժեքները, այսինքն՝  $\det\|A(x) - \lambda E\| = 0$  հավասարման արմատները, նշանակենք  $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$  (յուրաքանչյուր  $\lambda_i$  կրկնվում է այնքան անգամ, որքան նրա պարիկությունն է): Քանի որ  $\|A(x)\|$  մատրիցը սիմետրիկ է, ապա բոլոր  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , իրական են: Դիցուք դրանցից  $n_- = n_-(x)$  բացասական են,  $n_0 = n_0(x)$  գրոյական են և  $n_+ = n_+(x)$  դրական են.  $n_- + n_0 + n_+ = n$ :

1.  $n_0 = 0$  դեպք.

ա) եթե  $n_+ = n$ ,  $n_- = 0$ , կամ  $n_+ = 0$ ,  $n_- = n$ , ապա  $x$  կետում (1.1)

հավասարումը կոչվում է *էլիպսական* փիպի,

բ) եթե  $n_+ = n - 1$ ,  $n_- = 1$ , կամ  $n_+ = 1$ ,  $n_- = n - 1$ , ապա  $x$  կետում (1.1)

հավասարումը կոչվում է *հիպերբոլական* փիպի,

գ) եթե  $n_+ > 1$  և  $n_- > 1$  (դա հնարավոր է միայն  $n \geq 4$  դեպքում), ապա  $x$  կետում (1.1) հավասարումը կոչվում է *ուլտրահիպերբոլական* փիպի:

2.  $n_0 > 0$  դեպք.

Այս դեպքում  $x$  կետում (1.1) հավասարումը կոչվում է *պարաբոլական* փիպի:

**Դիփոդություն:** Նավասարման դասակարգման սահմանումից բխում է, որ հավասարման փիպը որոշելու համար պարպադիր չէ գտնել  $\lambda_i(x)$  արմատների արժեքները, այլ բավարար է իմանալ արմատների նշանները, ավելի ճիշտ՝  $n_-(x)$ ,  $n_0(x)$  և  $n_+(x)$  ամբողջ թվերը: Այդ նպատակով դիտարկենք

$$(A(x)\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R_n,$$

քառակուսային ձևը ( $x \in Q$  ֆիքսած կետ է): Նանրահաշվի դասընթացից հայրնի է, որ չվերասերվող իրական ձևափոխության միջոցով այն կարելի է բերել կանոնական (անկյունագծային) տեսքի և քառակուսային ձևերի իներցիայի օրենքի համաձայն՝ այդ կանոնական տեսքի դրական նշանով անդամների քանակը  $n_+(x)$  է, բացասական նշանով անդամների քանակը  $n_-(x)$  է, իսկ  $n_0(x) = n - n_+(x) - n_-(x)$ :

Եթե (1.1) հավասարումը որևէ  $E \subset Q$  բազմության բոլոր կետերում էլիպսական է (հիպերբոլական է և այլն), ապա այն կոչվում է *էլիպսական (հիպերբոլական և այլն)  $E$  բազմության վրա*:

**Օրինակներ.**

*Պուասոնի հավասարումը.*

$$\Delta u = f(x), \quad x \in Q,$$

որտեղ  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  *Լապլասի օպերատորն է*,  $\Delta u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$ , (երբ  $f = 0$  այս հավասարումը կոչվում է *Լապլասի հավասարում*)  $Q$  փրոյեկտում էլիպսական փիպի է, քանի որ այս դեպքում  $A(x) = E$  և բոլոր  $x \in Q$  կետերի համար  $\lambda_1(x) = \dots = \lambda_n(x) = 1$ :

*Ալիքային հավասարումը.*

$$u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_{n-1} x_{n-1}} - u_{x_n x_n} = f(x), \quad x \in Q,$$

$Q$  փրոյեկտում հիպերբոլական փիպի է, քանի որ այս դեպքում բոլոր  $x \in Q$  կետերի համար  $\lambda_1(x) = \dots = \lambda_{n-1}(x) = 1$ ,  $\lambda_n(x) = -1$ :

*Ջերմահաղորդականության հավասարումը.*

$$u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_{n-1} x_{n-1}} - u_{x_n} = f(x), \quad x \in Q,$$

$Q$  փրոյեկտում պարաբոլական փիպի է, քանի որ այս դեպքում բոլոր  $x \in Q$  կետերի համար  $\lambda_1(x) = \dots = \lambda_{n-1}(x) = 1$ ,  $\lambda_n(x) = 0$ :

*Տրիկոմիի հավասարումը.*

$$x_2 u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = f(x), \quad x \in Q \subset R_2,$$

$Q = \{|x| < 1\}$  գնդում խառը փիպի է, քանի որ այս դեպքում հավասարումը  $\{|x| < 1, x_2 > 0\}$  կիսաշրջանում էլիպսական փիպի է,  $\{|x| < 1, x_2 < 0\}$  կիսաշրջանում հիպերբոլական փիպի է, իսկ  $\{|x| < 1, x_2 = 0\}$  տրամագծի վրա պարաբոլական փիպի է:

## § 2. Դասակարգման ինվարիանտությունը ողորկ փոխմիարժեք արտապարկերումների նկարմամբ

Դիցուք  $U$ -ն որևէ փրույթ է  $Q$  բազմությունից,  $U \subset Q$ , և դիցուք

$$y = \varphi(x), \quad x \in U, \quad (1.2)$$

կամ ըստ կոորդինատների.

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n),$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ ,  $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ ,  $U$ -ում քրված ձևափոխություն է: Ենթադրենք

ա) (1.2) ձևափոխությունը  $U$  փրույթը փոխմիարժեքորեն արտապարկերում է  $V$  փրույթի վրա ( $y \in V$ ),

բ)  $\varphi(x) \in C^2(U)$ , այսինքն՝  $\varphi_i(x) \in C^2(U)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

գ)  $J(x) = \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\|$  Յակոբիի մատրիցը  $U$  փրույթում չի վերասերվում, այսինքն (1.2) ձևափոխության յակոբյանը՝  $\det J(x) \neq 0$ ,  $x \in U$ :

Նայրնի է, որ ա) - գ) պայմանների դեպքում (1.2) ձևափոխության հակադարձ

$$x = \psi(y), \quad y \in V, \quad (1.2')$$

ձևափոխությունը նույնպես օժրված է նման հարկություններով:

$V$  փրույթում սահմանենք  $v(y)$  ֆունկցիան.

$$v(y) = u(\psi(y)), \quad y \in V : \quad (1.3)$$

Յույց րանք, որ եթե ա) - գ) պայմանները րեղի ունեն, ապա հավասարումը, որին  $V$  փրույթում բավարարում է  $v(y)$  ֆունկցիան,  $y \in V$  կերում կլինի նույն րիպի, ինչպիսին է (1.1) հավասարումը  $y \in V$  կերին համապարասխանող  $x \in U$  կերում (ըստ (1.2) կամ (1.2')): Նենց այս պնդումը կհասկանանք որպես *դասակարգման ինվարիանտություն նշված ձևափոխությունների նկարմամբ*:

Ըստ (1.3)-ի

$$u(x) = v(y) = v(\varphi(x)), \quad x \in U (y \in V) :$$

Բոլոր  $i, j = 1, \dots, n$  համար

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n v_{y_k} \varphi_{kx_i},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n v_{y_k y_s} \varphi_{kx_i} \varphi_{sx_j} + \sum_{k=1}^n v_{y_k} \varphi_{kx_i x_j} :$$

Ներկայացնելով  $v(y)$  ֆունկցիան  $V$  փրոյություն բավարարում է

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left( \sum_{k,s=1}^n v_{y_k y_s} \varphi_{kx_i} \varphi_{sx_j} + \sum_{k=1}^n v_{y_k} \varphi_{kx_i x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i \sum_{k=1}^n v_{y_k} \varphi_{kx_i} + av = f, \quad (1.\tilde{1})$$

հավասարմանը, որի ավագ անդամների գործակիցներն ունեն

$$\tilde{a}_{ks}(y) = \left( \sum_{i,j=1}^n \varphi_{kx_i}(x) a_{ij}(x) \varphi_{sx_j}(x) \right) \Big|_{x=\psi(y)}, \quad k, s = 1, \dots, n$$

տեսքը: Վերջին բանաձևից հետևում է, որ (1.1) հավասարման ավագ գործակիցների  $\|\tilde{A}(y)\|$  մատրիցը  $J(x)$ ,  $A(x)$  և  $J^*(x)$  երեք մատրիցների արտադրյալ է.

$$\|\tilde{A}(y)\| = (J(x)A(x)J^*(x)) \Big|_{x=\psi(y)},$$

$\tilde{A} = JAJ^*$  կամ  $A = J^{-1}\tilde{A}J^{*-1}$ , որպեսզի  $\tilde{A} = \tilde{A}(y)$ ,  $J = J(\psi(y))$ ,  $A = A(\psi(y))$ ,  $y \in V$ :

Դիցուք  $P$ -ն այնպիսի զվերասերվող մատրից է, որ  $\xi = P\eta$  ձևափոխությունը  $A$  մատրիցի  $(A\xi, \xi)$  քառակուսային ձևը բերում է կանոնական տեսքի՝  $(A\xi, \xi) = (\Lambda\eta, \eta)$ , որպեսզի  $\Lambda$ -ն անկյունագծային մատրից է, որի անկյունագիծը  $(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_+}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_0}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_-})$  վեկտորն է: Այդ դեպքում

$$\Lambda = P^*AP, \quad \Lambda = P^*J^{-1}\tilde{A}J^{*-1}P,$$

որպեղից բխում է, որ  $\tilde{A}$  մաքրիցի ( $\tilde{A}\xi, \xi$ ) քառակուսային ձևը  $\xi = (J^{*-1}P)\eta$  ձևափոխության միջոցով բերվում է նույն  $(\Lambda\eta, \eta)$  տեսքի, ինչ տեսքի բերվել էր  $A$  մաքրիցի քառակուսային ձևը: Ներկաբար,  $A(x)$  և  $\tilde{A}(y)$ ,  $y = \varphi(x)$ , մաքրիցների դրական, գրոյական և բացասական սեփական արժեքների քանակները նույնն են: Պնդումն ապացուցված է:

### § 3. Բնութագրիչ մակերևույթներ

Դիցուք  $Q$  փրոյթում ընկած  $(n-1)$ -չափանի  $S$  ողորկ մակերևույթը ( $S \subset Q$ ) փրված է

$$F(x) = 0 \quad (1.4)$$

հավասարումով, որպեղ  $F \in C^1(Q)$  իրական արժեքանի ֆունկցիա է,  $\nabla F|_S \neq 0$ :  $x^0 \in S$  կեպը կոչվում է (1.1) հավասարման համար *բնութագրիչ* կեպ, եթե

$$(\nabla F(x)A(x), \nabla F(x)) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} = 0, \quad (1.5)$$

երբ  $x = x^0$ :

Եթե  $x \in S$  բոլոր կեպերը բնութագրիչ կեպեր են, ապա  $S$  մակերևույթը կոչվում է (1.1) հավասարման համար *բնութագրիչ մակերևույթ* կամ ուղղակի *բնութագրիչ*:

Նշանակենք  $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x)) = \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}$ :  $\nu$  վեկտորն ունի  $\nabla F$  ուղղությունը և միավոր երկարություն,  $|\nu| = \nu_1^2 + \dots + \nu_n^2 = 1$  ( $\nu_i$ -ն հավասար է  $\nu$  վեկտորի և  $x_i$  ուղղության կազմած անկյան  $\cos$ -ին՝  $\nu_i = \cos(\nu, x_i)$ ): Այդ դեպքում (1.5) հավասարությունը համարժեք է

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \nu_i(x) \nu_j(x) = 0 \quad (1.5')$$

հավասարությանը:

Բերենք բնութագրիչ մակերևույթների օրինակներ հասարակոն գործակիցներով որոշ փիլային հավասարումների համար ( $Q = R_n$ ):

**Պուասոնի հավասարում:** Պուասոնի հավասարումը բնութագրիչներ չունի, քանի որ այս դեպքում  $A(x) = E$  և (1.5) հավասարությունը կընդունի  $|\nabla F|^2 = 0$  փեսքը:

**Ջերմահաղորդականության հավասարում:** Ջերմահաղորդականության հավասարման համար (1.5') հավասարությունը ընդունում է հետևյալ փեսքը՝

$$\nu_1^2 + \dots + \nu_{n-1}^2 = 0 :$$

Ներկաբար,  $\nu_n^2 = 1$ ,  $\nu_n = \pm 1$ , և բնութագրիչներ են հանդիսանում այն մակերևույթները, որոնց գրադիենտի և  $x_n$  ուղղության կազմած անկյունը  $0^\circ$  կամ  $180^\circ$  է, այսինքն՝  $x_n = C$  հարթությունները, որտեղ  $C$ -ն կամայական հասարակոն է ( $F = x_n - C$ ):

**Ալիքային հավասարում:** Ալիքային հավասարման համար (1.5') հավասարությունը ընդունում է հետևյալ փեսքը՝

$$\nu_1^2 + \dots + \nu_{n-1}^2 - \nu_n^2 = 0 :$$

Ներկաբար,  $\nu_n^2 = \frac{1}{2}$ ,  $\nu_n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , և բնութագրիչներ են հանդիսանում այն մակերևույթները, որոնց գրադիենտի և  $x_n$  ուղղության կազմած անկյունը  $45^\circ$  կամ  $135^\circ$  է: Նկատենք, որ  $n = 2$  մասնավոր դեպքում ալիքային հավասարման բնութագրիչներ են հանդիսանում *միայն*  $x_1 + x_2 = C$  և  $x_1 - x_2 = C$  ուղիղները, որտեղ  $C$ -ն կամայական հասարակոն է:

Նշենք բնութագրիչների մի կարևոր հատկություն: Նայանի է, որ ողորկ գործակիցներով և աջ մասով  $u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = f(x)$ ,  $a < x < b$ , երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները ևս ողորկ են. օրինակ՝ հասարակոն գործակիցներով համասեռ հավասարումը ( $f(x) \equiv 0$ ) ունի միայն անվերջ դիֆերենցելի լուծումներ: Մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների համար իրավիճակը այլ է:



Դիցուք մեկ փոփոխականից կախված  $f(t)$  և  $g(t)$  ֆունկցիաները պարկանում են  $C^2(R_1)$ -ին և չեն պարկանում  $C^3(R_1)$ -ին, օրինակ.  $f(t) = 0$ , երբ  $t \leq t_1$ ,  $f(t) = (t - t_1)^3$ , երբ  $t \geq t_1$ , իսկ  $g(t) = (t - t_2)^5$ , երբ  $t \leq t_2$ ,  $g(t) = 2(t - t_2)^3$  երբ  $t \geq t_2$ , որպեսզի  $t_1$  և  $t_2$  իրական թվեր են:  $u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$  ֆունկցիան ամբողջ  $R_2$ -ում

$$u_{x_1 x_2} = 0$$

հասարարուն գործակիցներով համասեռ հավասարման լուծում է, ընդ որում  $u$ -ն չի պարկանում  $C^3(R_1)$ -ին: Այդ ֆունկցիայի երրորդ կարգի ածանցյալներն ունեն խզումներ  $x_1 = t_1$  և  $x_2 = t_2$  ուղիղների վրա, որոնք այդ հավասարման բնութագրիչներ են: Այս երևույթը կրում է ընդհանուր բնույթ:

Դիցուք  $n$ -չափանի  $Q$  փրույթը  $(n - 1)$ -չափանի  $L$  ողորկ մակերևույթով բաժանված է երկու  $Q_1$  և  $Q_2$  ենթափրույթների.

$$L = \{x \in Q : \Phi(x) = 0\}, \quad (1.6)$$

որպեսզի  $\Phi \in C^1(Q)$ ,  $\nabla \Phi|_L \neq 0$ ,

$$Q_1 = Q \cap \{x \in Q : \Phi(x) > 0\}, \quad Q_2 = Q \cap \{x \in Q : \Phi(x) < 0\}, \quad Q = Q_1 \cup Q_2 \cup L :$$

Դիարկենք  $Q \setminus L$  բազմության վրա որոշված  $h(x) \in C(Q_1) \cap C(Q_2)$  ֆունկցիան:  $L$  մակերևույթի վրա  $h(x)$  ֆունկցիայի թռիչք կանվանենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$[h](x) = \lim_{\substack{y \in Q_1 \\ y \rightarrow x}} h(y) - \lim_{\substack{y \in Q_2 \\ y \rightarrow x}} h(y), \quad x \in L :$$

$x^0 \in L$  կետում  $h(x)$  ֆունկցիայի անընդհարության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $[h](x^0) = 0$ , ընդ որում՝

$$h(x^0) = \lim_{\substack{y \in Q_1 \\ y \rightarrow x^0}} h(y) :$$

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը, որը կներկայացնենք առանց ապացույցի:

**Թեորեմ 1.1.1** Դիցուք  $Q$  տիրույթում  $u$  ֆունկցիան (1.1) հավասարման լուծում է, ընդ որում՝ որևէ ամբողջ  $k > 0$  համար

$$u \in C^{k+1}(Q) \cap C^{k+2}(Q_1 \cup L) \cap C^{k+2}(Q_2 \cup L),$$

իսկ հավասարման գործակիցները և ազատ անդամը պատկանում են  $C^k(Q)$ -ին: Եթե  $L$  մակերևույթի որևէ կետում լուծման  $(k + 2)$ -րդ կարգի ածանցյալներից գոնե մեկը գոյություն չունի (հիշարակված ածանցյալի թռիչքը գրոյից տարբեր է), ապա այդ կետը բնութագրիչ կետ է:

Մասնավորապես, եթե  $L$  մակերևույթի յուրաքանչյուր կետում գոյություն չունի լուծման  $(k + 2)$ -րդ կարգի ածանցյալներից որևէ մեկը, ապա  $L$  մակերևույթը բնութագրիչ է:

Լուծման հավասարման կարգից ավելի բարձր կարգի ածանցյալների խզումները կոչվում են լուծման թույլ խզումներ:

Թեորեմ 1.1.1-ը կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ կերպ՝ թեորեմում նշված լուծումների թույլ խզումները տեղակայված են բնութագրիչների վրա:

## Գլուխ 2

### Նիպերբուլական տիպի հավասարումներ

Երկրորդ կարգի հիպերբուլական հավասարումները առավել հաճախ հանդիպում են փափանդական պրոցեսների հետ կապված ֆիզիկական խնդիրներում:

#### § 1. Կոշիի խնդիրը և Կոշիի լոկալացված խնդիրը ալիքային հավասարման համար

$u(x, t)$ ,  $x \in R_n$ ,  $t > 0$ , ֆունկցիան կոչվում է

$$u_{tt} - \Delta_x u = f(x, t), \quad x \in R_n, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_n, \quad (2.2)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R_n, \quad (2.3)$$

Կոշիի խնդրի լուծում, եթե  $u$ -ն պարկանում է  $C^2(x \in R_n, t \geq 0)$  բազմությանը և բավարարում է (2.1), (2.2), (2.3) հավասարություններին:

Լուծման սահմանումից ակնհայտորեն հետևում է, որ (2.1), (2.2), (2.3) խնդրի լուծման գոյության համար *անհրաժեշտ* են

$$f \in C(x \in R_n, t \geq 0), \quad \varphi \in C^2(R_n), \quad \psi \in C^1(R_n)$$

պայմանները:

(2.1) – (2.3) խնդրի հետ մեկտեղ կարելի է դիտարկել նաև հետևյալ ավելի ընդհանուր խնդիրը:

Դիցուք  $Q$ -ն  $\{x \in R_n, t = 0\}$  հարթության որևէ  $n$ -չափանի փրույթ է:  $Q$ -ով կնշանակենք նաև  $(n+1)$ -չափանի  $\{x \in R_n, t \in R_1\}$  փարածության բազմությունը, որը կազմված է  $Q$ -ի կետերից:

Վերցնենք  $Q$  բազմության կամայական  $(x^0, 0)$  կետ և կամայական  $t^0 > 0$  թիվ այնպես, որ

$$Q_{x^0, t^0} = \{|x - x^0| \leq t^0, t^0 > 0\}$$

$t^0$  շառավղով  $n$ -չափանի գունդը ընկած լինի  $Q$ -ի մեջ:  $Q_{x^0, t^0}$  հիմքով և  $(x^0, t^0)$  գագաթով  $(n+1)$ -չափանի կոնը նշանակենք  $\Omega_{x^0, t^0}$ .

$$\Omega_{x^0, t^0} = \{|x - x^0| < t^0 - t, 0 < t < t^0\} :$$

$\Omega_{x^0, t^0}$  կոնի  $S_{x^0, t^0} = \{|x - x^0| = t^0 - t, 0 \leq t \leq t^0\}$  կողմնային մակերևույթը (2.1)

հավասարման կոնային բնութագրիչի կտոր է:

(2.1) հավասարման  $Q$  հիմքով *բնութագրիչ կոնոիդ* կամ ուղղակի  $Q$  *հիմքով կոնոիդ* կանվանենք բոլոր  $\Omega_{x^0, t^0}$  կոնների միավորում հանդիսացող  $\Omega_Q$  փրույթը.

$$\Omega_Q = \bigcup_{\substack{(x^0, 0) \in Q, \\ t^0 > 0: Q_{x^0, t^0} \subset Q}} \Omega_{x^0, t^0} : \quad (2.4)$$

$\{x \in R_n, t = 0\}$  հարթության մեջ վերցնենք կամայական  $Q$  փրույթ և դիցուք  $\Omega_Q$  համապարասխան կոնոիդն է:

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_Q, \quad (2.5)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q, \quad (2.6)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in Q, \quad (2.7)$$

խնդիրը, որտեղ  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  համապարասխան բազմությունների վրա տրված ֆունկցիաներ են, կոչվում է *Կոշիի լոկալացված խնդիր*:

(2.5) – (2.7) խնդրի լուծում կոչվում է (2.5), (2.6), (2.7) հավասարություններին բավարարող  $u \in C^2(\Omega_Q \cup Q)$  ֆունկցիան:

Կոշիի լոկալացված խնդիրը Կոշիի (2.1) – (2.3) խնդրի ընդհանրացումն է. (2.1) – (2.3) խնդիրը համընկնում է (2.5) – (2.7) խնդրի հետք  $Q = R_n$  դեպքում:

Մահմանումից հետևում է, որ (2.5), (2.6), (2.7) խնդրի լուծման գոյության համար *անհրաժեշտ է*

$$f \in C(\Omega_Q \cup Q), \quad \varphi \in C^2(Q), \quad \psi \in C^1(Q) :$$

## § 2. Ֆուրյեի ձևափոխության կիրառումը ալիքային հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծումը սրանալու համար

Դիցուք արված է (2.1) – (2.3) խնդիրը: Մեր ուսումնասիրության պլանը հետևյալն է. նախ, Ֆուրյեի ձևափոխության ֆորմալ կիրառմամբ, առանց խիստ հիմնավորումների, մենք «կկռահենք» այն բանաձևը, որով (2.1) – (2.3) խնդրի լուծումը արտահայտվում է  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  և  $f(x, t)$  ֆունկցիաների միջոցով: Այնուհետև (սրացված բանաձևի օգնությամբ) կանդրադառնանք խնդրի խիստ հիմնավորված ուսումնասիրությանը, ինչպես նաև սրացված բանաձևի խիստ հիմնավորմանը:

Պարզության համար դիտարկենք

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0, \quad x \in R_n, \quad t > 0, \quad (2.1^0)$$

համասեռ հավասարումը երեք փարաձական փոփոխականի դեպքում,  $n = 3$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ :

Դիցուք  $u$ -ն (2.1<sup>0</sup>) հավասարման լուծում է: Բազմապարկենք (2.1<sup>0</sup>)-ն  $e^{-i(x, \xi)}$ -ով, որպեսզի  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R_3$ , և ըստ  $x$ -ի ինտեգրենք  $R_3$ -ով:

Կսրանանք

$$\tilde{u}_{tt} + |\xi|^2 \tilde{u}(\xi, t) = 0, \quad t > 0, \quad (\tilde{2}.1^0)$$

որպեսզի  $\tilde{u}(\xi, t) = \int_{R_3} e^{-i(x, \xi)} u(x, t) dx$  հանդիսանում է  $u(x, t)$  լուծման Ֆուրյեի ձևափոխությունը ըստ փարաձական փոփոխականների: (2.2), (2.3) սկզբնական

պայմաններից սրանում ենք

$$\tilde{u}(\xi, t)|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\xi), \quad (2.2)$$

$$\tilde{u}_t(\xi, t)|_{t=0} = \tilde{\psi}(\xi) : \quad (2.3)$$

(2.1<sup>0</sup>), (2.2), (2.3) խնդիրը յուրաքանչյուր ֆիքսած  $\xi \in R_3$ -ի դեպքում հանդիսանում է Կոշիի խնդիր հասարակուն գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար, որի լուծումն ունի

$$\tilde{u}(\xi, t) = \tilde{\varphi}(\xi) \cos |\xi|t + \frac{\tilde{\psi}(\xi)}{|\xi|} \sin |\xi|t$$

դեպքը: Ներկայացնում ենք հավասարումների համակարգի ձևափոխության միջոցով (2.1) – (2.3) խնդիր լուծումը ներկայացվում է

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_3} \tilde{u}(\xi, t) e^{i(x, \xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_3} \tilde{\varphi}(\xi) \cos |\xi|t e^{i(x, \xi)} d\xi + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_3} \tilde{\psi}(\xi) \frac{\sin |\xi|t}{|\xi|} e^{i(x, \xi)} d\xi = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\varphi(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u_\psi(x, t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

դեպքով, որպեսզի

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_3} \tilde{\alpha}(\xi) \frac{\cos |\xi|t}{|\xi|^2} e^{i(x, \xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_3} \left( \int_{R_3} \alpha(y) e^{-i(y, \xi)} dy \right) e^{i(x, \xi)} \frac{\cos |\xi|t}{|\xi|^2} d\xi = \\ &= \int_{R_3} \alpha(y) \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_3} e^{i(x-y, \xi)} \frac{\cos |\xi|t}{|\xi|^2} d\xi \right) dy = \int_{R_3} K(x-y, t) \alpha(y) dy : \end{aligned} \quad (2.9)$$

Այսպես

$$K(z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_3} e^{i(z, \xi)} \frac{\cos |\xi|t}{|\xi|^2} d\xi, \quad z = (z_1, z_2, z_3) \in R_3 : \quad (2.10)$$

Քանի որ (2.10) ինտեգրալը կախված է միայն  $t$ -ից և  $|z|$ -ից, ապա բավարար է այն հաշվել միայն  $z = (0, 0, |z|)$ ,  $|z| \neq 0$ , կերպում

$$\begin{aligned} K(z, t) &= K(0, 0, |z|, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{ir \cos \theta |z|} \frac{\cos rt}{r^2} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{2}{(2\pi)^2 |z|} \int_0^\infty \frac{\cos rt \sin r|z|}{r} dr = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 |z|} \left( \int_0^\infty \frac{\sin r(|z| + t)}{r} dr + \int_0^\infty \frac{\sin r(|z| - t)}{r} dr \right) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 |z|} (\operatorname{sgn}(|z| + t) + \operatorname{sgn}(|z| - t)) \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4\pi |z|} \begin{cases} 1, & |z| > t, \\ 0, & |z| < t : \end{cases} \end{aligned}$$

Տեղադրելով սրացված արտահայտությունը (2.9)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\begin{aligned} u_\alpha(x, t) &= \int_{R_3} K(x - y, t) \alpha(y) dy = \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y|>t} \frac{\alpha(y)}{|x-y|} dy = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_t^\infty \frac{dr}{r} \int_{|x-y|=r} \alpha(y) dS_y : \end{aligned}$$

Ներկարար

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} \alpha(y) dS_y,$$

որպետից, համաձայն (2.8)-ի, ստանում ենք

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} \varphi(y) dS_y \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} \psi(y) dS_y : \quad (2.11)$$

Այսպիսով, մենք սրացանք (2.1<sup>0</sup>), (2.2), (2.3) խնդրի լուծման փեսքը: (2.11) արտահայտությունը կոչվում է *Գիրիսիոֆի բանաձև*:

### § 3. Կոշիի խնդիրը լարի տատանման հավասարման համար:

#### Դալաների բանաձևը

Դիփարկենք հիպերբոլական տիպի համասեռ հավասարման պարզագույն օրինակ՝

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

որտեղ  $a > 0$  հաստատված է: Այս հավասարումը նկարագրում է անվերջ լարի տատանումը, որտեղ  $u(t, x)$  ֆունկցիան  $x$  կոորդինատ ունեցող կետի դիրքն է ժամանակի  $t$  պահին:

Քանի որ գրված հավասարումը  $y = at$  փոփոխականի փոխարինմամբ ընդունում է  $u_{yy} - u_{xx} = 0$  կանոնական տեսքը, ապա, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կհամարենք  $a = 1$ .

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0: \quad (2.12)$$

Կոշիի խնդիրը (2.12) հավասարման համար կայանում է հետևյալում՝ գտնել (2.12) հավասարման այն  $u \in C^2(x \in R_1, t \geq 0)$  լուծումը, որը բավարարում է

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.13)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.14)$$

սկզբնական պայմաններին, որտեղ  $\varphi(x)$  և  $\psi(x)$  հայտնի ֆունկցիաներ են (սկզբնական փվյալներ): (2.13) պայմանը նկարագրում է սկզբնական  $t = 0$  պահին լարի  $x$  կոորդինատ ունեցող կետի դիրքը, իսկ (2.14) պայմանը՝ արագությունը:

Լուծենք (2.12), (2.13), (2.14) Կոշիի խնդիրը: Նախ գտնենք (2.12) հավասարման ընդհանուր լուծումը: (2.12) հավասարման բնութագրիչներ են հանդիսանում  $x \pm t = C$ ,  $C = const$ , ուղիղները:  $(x, t)$  փոփոխականներից անցնենք  $(\xi, \eta)$ ,

$$\xi = x + t, \quad \eta = x - t,$$



փոփոխականներին: Նշանակենք  $u(x, t) = v(\xi, \eta) = v(x+t, x-t)$ : Նոր փոփոխականների համակարգում (2.12) հավասարումը կընդունի

$$v_{\xi\eta} = 0 \quad (2.15)$$

տեսքը: Գտնենք այս հավասարման ընդհանուր լուծումը: Ակնհայտ է, որ (2.15) հավասարման ցանկացած լուծման համար

$$v_{\eta}(\xi, \eta) = f^*(\eta),$$

որտեղ  $f^*(\eta)$  ֆունկցիան կախված է միայն  $\eta$  փոփոխականից: Յուրաքանչյուր  $\xi$ -ի համար ինտեգրելով այս հավասարումը ըստ  $\eta$  փոփոխականի՝ կստանանք

$$v(\xi, \eta) = \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (2.16)$$

որտեղ  $f_1$  և  $f_2$  միայն մեկ փոփոխականից, համապատասխանաբար  $\xi$ -ից և  $\eta$ -ից, կախված ֆունկցիաներ են: Տեղի ունի նաև հակառակը՝ կամայական  $f_1$  և  $f_2$  երկու անգամ անընդհար դիֆերենցելի ֆունկցիաների համար (2.16) բանաձևով որոշված  $v(\xi, \eta)$  ֆունկցիան (2.15) հավասարման լուծում է: Քանի որ (2.15) հավասարման ցանկացած լուծում կարելի է ներկայացնել (2.16) տեսքով՝ համապատասխան  $f_1$  և  $f_2$  ընտրությամբ, ապա (2.16) բանաձևով ստացվում է (2.15) հավասարման ընդհանուր լուծումը: Նեղակաբար,

$$u(x, t) = f_1(x+t) + f_2(x-t) \quad (2.17)$$

ֆունկցիան (2.12) հավասարման ընդհանուր լուծումն է:

Ենթադրենք (2.12) – (2.14) խնդրի լուծումը գոյություն ունի: Այդ դեպքում այն ներկայացվում է (2.17) տեսքով: Գտնենք այնպիսի  $f_1$  և  $f_2$  ֆունկցիաներ, որ բավարարվեն (2.13), (2.14) սկզբնական պայմանները.

$$u|_{t=0} = u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad (2.18)$$

$$u_t|_{t=0} = u_t(x, 0) = f_1'(x) - f_2'(x) = \psi(x) : \quad (2.19)$$

Ինտեգրելով երկրորդ հավասարությունը  $x_0$ -ից  $x$  կստանանք

$$f_1(x) - f_2(x) = \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C,$$

որտեղ  $C = f_1(x_0) - f_2(x_0)$ : Այսպիսով ունենք, որ

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

և

$$f_1(x) - f_2(x) = \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C,$$

որտեղից գտնում ենք

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2} :$$

Այսպիսով,  $\varphi$  և  $\psi$  ֆունկցիաների միջոցով մենք որոշեցինք  $f_1$  և  $f_2$  ֆունկցիաները, որոնք տեղադրելով (2.17)-ի մեջ՝ կստանանք

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-t) + \varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\alpha) d\alpha : \quad (2.20)$$

(2.20) արտահայտությունը կոչվում է *Դալամբերի բանաձև*: Ենթադրելով, որ (2.12) – (2.14) խնդրի լուծումը գոյություն ունի, մենք ստացանք Դալամբերի բանաձևը, ինչն ապացուցում է լուծման միակությունը: Իրոք, եթե գոյություն ունենար (2.12) – (2.14) խնդրի մեկ այլ լուծում, ապա այն կներկայացվեր (2.20) Դալամբերի բանաձևով և կհամընկներ նախորդ լուծման հետ: Դիցուք  $\varphi$  ֆունկցիան երկու անգամ, իսկ  $\psi$  ֆունկցիան մեկ անգամ անընդհատ դիֆերենցելի են: Ակնհայտ է, որ այդ դեպքում (2.20) բանաձևով ներկայացված ֆունկցիան բավարարում է (2.12) հավասարմանը և (2.13), (2.14) սկզբնական պայմաններին

(կարելի է ստուգել անմիջական տեղադրմամբ): Այսպիսով, ապացուցված է (2.12), (2.13), (2.14) Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը:

**Թեորեմ 2.3.1** Դիցուք  $\varphi \in C^2(R_1)$ ,  $\psi \in C^1(R_1)$ : Այդ դեպքում (2.12), (2.13), (2.14) Կոշիի խնդիրը ունի լուծում, որը տրվում է Դալանբերի (2.20) բանաձևով և այդ լուծումը միակն է:

Դալանբերի բանաձևից բխում են Կոշիի խնդրի լուծման որոշ ուշագրավ հատկություններ:

Դիցուք  $M(x_0, t_0)$ -ը որևէ ֆիքսած կետ է, փանենք այդ կետով անցնող  $x - t = x_0 - t_0$  և  $x + t = x_0 + t_0$  բնութագրիչները, որոնք  $x$  առանցքը կհատեն  $N(x_0 - t_0, 0)$  և  $P(x_0 + t_0, 0)$  կետերում:  $MNP$  եռանկյունը ( $NP$  հիմքով կոնոիդը) կոչվում է *բնութագրիչ եռանկյուն*: Ըստ (2.20) բանաձևի՝  $M$  կետում լուծման  $u(x_0, t_0)$  արժեքը որոշվում է  $\varphi$  սկզբնական ֆունկցիայի արժեքներով  $N$  և  $P$  կետերում և  $\psi$  սկզբնական ֆունկցիայի արժեքներով  $NP$  հատվածի վրա.

$$u(M) = \frac{\varphi(N) + \varphi(P)}{2} + \frac{1}{2} \int_{NP} \psi(\alpha) d\alpha : \quad (2.20')$$

Դիտարկենք երկու օրինակ:

**Օրինակ 1:** Դիցուք սկզբնական պահին բոլոր կետերը ունեն գրոյական արագություն.  $\psi(x) \equiv 0$ : Այդ դեպքում (2.20) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - t) + \varphi(x + t)}{2} :$$

Լրացուցիչ ենթադրելով, որ  $\varphi(x) \neq 0$  միայն  $(x_1, x_2)$  միջակայքում ( $\varphi(x) \equiv 0$ , երբ  $x \leq x_1$  կամ  $x \geq x_2$ ), կունենանք

$$u(x_0, t_0) = \frac{\varphi(x_0 - t_0) + \varphi(x_0 + t_0)}{2}, \quad \text{երբ } (x_0 - t_0, x_0 + t_0) \subset (x_1, x_2),$$

$$u(x_0, t_0) = \frac{\varphi(x_0 - t_0)}{2}, \quad \text{երբ } x_0 - t_0 \in (x_1, x_2), x_0 + t_0 \in (x_2, +\infty),$$

$$u(x_0, t_0) = \frac{\varphi(x_0 + t_0)}{2}, \quad \text{երբ } x_0 - t_0 \in (-\infty, x_1), x_0 + t_0 \in (x_1, x_2),$$

$$u(x_0, t_0) = 0, \quad \text{երբ } (x_0 - t_0, x_0 + t_0) \subset (-\infty, x_1)$$

կամ  $(x_0 - t_0, x_0 + t_0) \subset (x_2, +\infty)$  կամ  $x_0 - t_0 \in (-\infty, x_1)$ ,  $x_0 + t_0 \in (x_2, +\infty)$  :

**Օրինակ 2:** Այժմ ենթադրենք, որ սկզբնական շեղումը զրոյական է.  $\varphi(x) \equiv 0$ ,  
և  $\psi$  սկզբնական արագությունը զրոյից փարբեր է միայն  $(x_1, x_2)$  միջակայքում:  
(2.20) բանաձևից կստանանք

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} \psi(\alpha) d\alpha, \quad \text{երբ } (x_0 - t_0, x_0 + t_0) \subset (x_1, x_2),$$

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \int_{x_0 - t_0}^{x_2} \psi(\alpha) d\alpha, \quad \text{երբ } x_0 - t_0 \in (x_1, x_2), x_0 + t_0 \in (x_2, +\infty),$$

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_0 + t_0} \psi(\alpha) d\alpha, \quad \text{երբ } x_0 - t_0 \in (-\infty, x_1), x_0 + t_0 \in (x_1, x_2),$$

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \psi(\alpha) d\alpha, \quad \text{երբ } x_0 - t_0 \in (-\infty, x_1), x_0 + t_0 \in (x_2, +\infty),$$

$u(x_0, t_0) = 0$ , երբ  $(x_0 - t_0, x_0 + t_0) \subset (-\infty, x_1)$  կամ  $(x_0 - t_0, x_0 + t_0) \subset (x_2, +\infty)$  :

Ձևակերպենք երկու պնդում, որոնք անմիջապես ստացվում են Դալամբերի բանաձևից որպես հետևանք:

**Թեորեմ 2.3.2** *Եթե  $\varphi$  և  $\psi$  սկզբնական ֆունկցիաները կենտ են որևէ  $x_0$  կետի նկատմամբ, ապա լուծումը այդ կետում զրո է ցանկացած  $t$ -ի համար՝  $u(x_0, t) \equiv 0$ :*

$x_0$  կետի նկատմամբ  $\varphi$  և  $\psi$  ֆունկցիաների կենտ լինելը նշանակում է

$$\varphi(x_0 - x) = -\varphi(x_0 + x), \quad \psi(x_0 - x) = -\psi(x_0 + x) :$$

Նամաձայն Դալամբերի բանաձևի՝ ունենք

$$u(x_0, t) = \frac{\varphi(x_0 - t) + \varphi(x_0 + t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x_0 - t}^{x_0 + t} \psi(\alpha) d\alpha = 0 :$$

**Թեորեմ 2.3.3** *Եթե  $\varphi$  և  $\psi$  սկզբնական ֆունկցիաները զույգ են որևէ  $x_0$  կետի նկատմամբ, ապա լուծման մասնական ածանցյալը այդ կետում զրո է ցանկացած  $t$ -ի համար՝  $u_x(x_0, t) = 0$ :*

$x_0$  կետի նկատմամբ  $\varphi$  և  $\psi$  ֆունկցիաների գույգ լինելը նշանակում է

$$\varphi(x_0 - x) = \varphi(x_0 + x), \quad \psi(x_0 - x) = \psi(x_0 + x) :$$

Ածանցելով (2.20) բանաձևը ըստ  $x$ -ի և հաշվի առնելով այն փաստը, որ գույգ ֆունկցիայի ածանցյալը կենսա ֆունկցիա է, կստանանք

$$u_x(x_0, t) = \frac{\varphi'(x_0 - t) + \varphi'(x_0 + t)}{2} + \frac{1}{2}(\psi(x_0 + t) - \psi(x_0 - t)) = 0 :$$

**Լուծման կայունությունը:** Ինչպես արդեն ցույց ենք տվել, (2.12) հավասարման լուծումը, որը բավարարում է (2.13) և (2.14) սկզբնական պայմաններին, որոշվում է միարժեքորեն: Այժմ ապացուցենք, որ սկզբնական պայմանների անընդհատ փոփոխվելու դեպքում լուծումը ևս անընդհատ է փոփոխվում: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 2.3.4** *Կամայական  $[0, t_0]$  ժամանակահատվածի համար և կամայական  $\varepsilon$  ճշտության համար գոյություն ունի այնպիսի  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , որ (2.12) հավասարման ցանկացած երկու  $u_1(x, t)$  և  $u_2(x, t)$  լուծումներ  $t_0$  ժամանակահատվածի ընթացքում իրարից կտարբերվեն  $\varepsilon$ -ից փոքր չափով՝*

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq t_0,$$

եթե

$$u_1|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad u_2|_{t=0} = \varphi_2(x),$$

$$u_{1t}|_{t=0} = \psi_1(x), \quad u_{2t}|_{t=0} = \psi_2(x),$$

սկզբնական ֆունկցիաները իրարից տարբերվեն  $\delta$ -ից փոքր չափով՝

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta, \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta :$$

**Ապացույց:** Այս պնդման ապացույցը անմիջապես բխում է Դալանբերի բանաձևից: Ունենք

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{\varphi_1(x+t) - \varphi_2(x+t)}{2} + \frac{\varphi_1(x-t) - \varphi_2(x-t)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)| d\alpha,$$

որպետից սպանում ենք

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\delta 2t \leq \delta(1 + t_0) :$$

Վերցնելով  $\delta = \frac{\varepsilon}{1 + t_0}$ , կունենանք այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել:

Եթե մաթեմատիկական խնդրի լուծումը անընդհար է կախված լրացուցիչ պայմաններից (սկզբնական, եզրային և այլն), ապա ասում են, որ խնդիրը *կայուն* է:

Կասենք, որ մաթեմատիկական խնդիրը դրված է *կոռեկտ*, եթե խնդրի լուծումը գոյություն ունի, խնդիրը ունի միակ լուծում և խնդրի լուծումը անընդհար է կախված նախնական փվյալներից (կայուն է):

Այսպիսով, մենք ցույց փվեցինք, որ Կոշիի խնդիրը լարի փափանման հավասարման համար դրված է կոռեկտ:

Ոչ կոռեկտ դրված խնդրի օրինակ կբերենք պարաբոլական և էլիպսական հավասարումներին նվիրված գլուխներում:

#### § 4. Կոշիի խնդրի լուծման միակությունը ալիքային հավասարման համար

Այս պարագրաֆում կուսումնասիրենք Կոշիի խնդրի լուծման միակությունը:

**Լեմմա 2.4.1** *Դիցուք  $u \in C^2(\overline{\Omega}_{x^0, t^0})$ ,  $x^0 \in R_n$ ,  $t^0 > 0$ , և*

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0, \quad (x, t) \in \Omega_{x^0, t^0}, \quad (2.21)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \in Q_{x^0, t^0}, \quad (2.22)$$

$$u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in Q_{x^0, t^0} : \quad (2.23)$$

Այդ դեպքում  $\overline{\Omega}_{x^0, t^0}$ -ում  $u(x, t) \equiv 0$ :

**Ապացույց:** Դիցուք  $u(x, t)$ -ն (2.21) – (2.23) խնդրի լուծումն է: Վերցնենք կամայական  $(\xi, \tau) \in \Omega_{x^0, t^0}$  կետ: Ցույց փանք, որ

$$u(\xi, \tau) = 0 : \quad (2.24)$$

Դիփարկենք  $\Omega_{x^0, t^0}$  կոնին «գուգահեռ»  $(\xi, \tau)$  գագաթով  $\Omega_{\xi, \tau}$  ենթակոնը.

$$\Omega_{\xi, \tau} = \{|x - \xi| < \tau - t, 0 < t < \tau\} \subset \Omega_{x^0, t^0} :$$

Ակնհայտ է, որ  $u \in C^2(\overline{\Omega}_{\xi, \tau})$ :

Բազմապարկենք (2.21) նույնությոնը  $u_t$ -ով.

$$u_t u_{tt} - u_t \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_{\xi, \tau} :$$

Քանի որ

$$u_t u_{tt} = \frac{1}{2} (u_t^2)_t, \quad u_t u_{x_i x_i} = (u_{x_i} u_t)_{x_i} - \frac{1}{2} (u_{x_i}^2)_t, \quad i = 1, \dots, n,$$

ապա

$$\frac{1}{2} \left( u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right)_t - \sum_{i=1}^n (u_{x_i} u_t)_{x_i} = 0, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_{\xi, \tau} : \quad (2.25)$$

Ներագա շարադրանքի պարզության համար  $t$  փոփոխականը նշանակենք  $x_{n+1}$ -ով,  $t = x_{n+1}$ , և (2.25) հավասարությոնը գրենք

$$\operatorname{div} A = A_{1x_1} + \dots + A_{nx_n} + A_{n+1x_{n+1}} = 0 \quad (2.25')$$

տեսքով, որտեղ  $A = (A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$  վեկտորը ունի հետևյալ կոմպոնենտները՝

$$A_i = -u_{x_i} u_{x_{n+1}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_{x_{n+1}}^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) :$$

Ինտեգրելով (2.25')-ը  $\Omega_{\xi, \tau}$ -ով և կիրառելով Օստրոգրադսկու բանաձևը՝ կստանանք

$$\int_{\partial \Omega_{\xi, \tau}} (A, \nu) dS = 0, \quad (2.26)$$

որպեղ  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n, \nu_{n+1})$  վեկտորը  $\partial\Omega_{\xi, \tau}$ -ին փարված  $\Omega_{\xi, \tau}$ -ի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալն է:  $\partial\Omega_{\xi, \tau}$  մակերևույթը կազմված է երկու կտորներից՝  $\partial\Omega_{\xi, \tau} = \overline{S}_{\xi, \tau} \cup \overline{Q}_{\xi, \tau}$ : Քանի որ  $\nu$  վեկտորը այդ մակերևույթներից յուրաքանչյուրի վրա: Ակնհայտ է, որ  $Q_{\xi, \tau}$ -ի վրա  $\nu = (0, \dots, 0, -1)$ : Քանի որ  $S_{\xi, \tau}$  մակերևույթը փրվում է

$$F(x_1, \dots, x_{n+1}) \equiv \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 - (x_{n+1} - \tau)^2 = 0$$

հավասարումով, ապա նրա արտաքին միավոր նորմալը ունի հետևյալ փեսքը՝

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{(F_{x_1}, \dots, F_{x_{n+1}})}{(F_{x_1}^2 + \dots + F_{x_{n+1}}^2)^{1/2}} = \frac{(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n, \tau - x_{n+1})}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_n - \xi_n)^2 + (\tau - x_{n+1})^2}} = \\ &= \left( \frac{x_1 - \xi_1}{\sqrt{2}(\tau - x_{n+1})}, \dots, \frac{x_n - \xi_n}{\sqrt{2}(\tau - x_{n+1})}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right): \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ըստ (2.22) և (2.23) պայմանների՝  $A|_{x_{n+1}=0} = 0$ , ուստի  $\overline{Q}_{\xi, \tau}$ -ի վրա  $A = 0$  և (2.26)

հավասարությունը կարելի է գրել հետևյալ փեսքով՝

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S_{\xi, \tau}} \left[ - \sum_{i=1}^n u_{x_i} \frac{x_i - \xi_i}{\sqrt{2}(\tau - x_{n+1})} u_{x_{n+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( u_{x_{n+1}}^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) \right] dS = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{S_{\xi, \tau}} \left[ \sum_{i=1}^n \left( u_{x_i} - \frac{x_i - \xi_i}{\tau - x_{n+1}} u_{x_{n+1}} \right)^2 + u_{x_{n+1}}^2 \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \xi_i)^2}{(\tau - x_{n+1})^2} \right) \right] dS = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{S_{\xi, \tau}} \sum_{i=1}^n \left( u_{x_i} - \frac{x_i - \xi_i}{\tau - x_{n+1}} u_{x_{n+1}} \right)^2 dS: \end{aligned} \quad (2.28)$$

Այսպեղ օգտագործեցինք այն փաստը, որ  $S_{\xi, \tau}$ -ի վրա  $\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 = (\tau - x_{n+1})^2$ :

(2.28)-ից անմիջապես հետևում է, որ  $S_{\xi, \tau}$ -ի վրա

$$\begin{aligned} u_{x_1} &= u_{x_{n+1}} \frac{x_1 - \xi_1}{\tau - x_{n+1}}, \\ &\dots \\ u_{x_n} &= u_{x_{n+1}} \frac{x_n - \xi_n}{\tau - x_{n+1}}, \end{aligned}$$

այսինքն՝  $S_{\xi, \tau}$ -ի վրա

$$(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_{n+1}}) = u_{x_{n+1}} \left( \frac{x_1 - \xi_1}{\tau - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n - \xi_n}{\tau - x_{n+1}}, 1 \right),$$



որպետից, համաձայն (2.27)-ի, ստանում ենք, որ  $S_{\xi, \tau}$ -ի վրա

$$(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_{n+1}}) = u_{x_{n+1}} \sqrt{2\nu} :$$

Վերցնենք  $S_{\xi, \tau}$  կոնային մակերևույթի ցանկացած ծնիչ,  $l$ -ով նշանակենք այդ ծնիչի ուղղության  $(n + 1)$ -չափանի միավոր վեկտորը: Նամաձայն վերջին հավասարության՝ այդ ծնիչի երկայնքով

$$\frac{\partial u}{\partial l} = u_{x_{n+1}} \sqrt{2\nu} = 0,$$

ինչը նշանակում է, որ  $u = u(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  ֆունկցիան  $S_{\xi, \tau}$  կոնային մակերևույթի ծնիչի ուղղությամբ չի փոփոխվում: Ուստի, (2.24) հավասարությունը բխում է (2.22) պայմանից: Լեմման ապացուցված է:

Ապացուցված լեմմայից բխում է (2.5) – (2.7) Կոշիի լոկալացված խնդրի լուծման միակությունը, հետևաբար նաև (2.1) – (2.3) Կոշիի խնդրի լուծման միակությունը: Իրոք, դիցուք  $u_1(x, t)$ -ը և  $u_2(x, t)$ -ը (2.5) – (2.7) խնդրի լուծումներ են: Այդ դեպքում  $u = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  փարբերությունը կհանդիսանա

$$u_{tt} - \Delta_x u = 0, \quad (x, t) \in \Omega_Q, \quad (2.5^0)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \in Q, \quad (2.6^0)$$

$$u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in Q : \quad (2.7^0)$$

խնդրի լուծում: Դա նշանակում է, որ  $u(x, t)$  ֆունկցիան  $\Omega_Q$ -ում բավարարում է (2.21), (2.22), (2.23)-ին: Նամաձայն ապացուցված լեմմայի՝ ցանկացած  $(x_0, t_0) \in \Omega_Q$  կետի դեպքում  $u(x, t) \equiv 0$   $\bar{\Omega}_{x_0, t_0}$ -ում, հետևաբար  $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$   $\Omega_Q$ -ում: Այսպիսով, ապացուցված է հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 2.4.1** (2.5)–(2.7) խնդիրը չի կարող ունենալ մեկից ավելի լուծում:

Ինչպես արդեն նշվել է, այս թեորեմից, մասնավորապես, հետևում է (2.1) – (2.3) Կոշիի խնդրի լուծման միակությունը:

**Թեորեմ 2.4.2** (2.1)–(2.3) խնդիրը չի կարող ունենալ մեկից ավելի լուծում:

## § 5. Ալիքային հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը երեք տարածական փոփոխականների դեպքում

Այս պարագրաֆը նվիրված է  $n = 3$  դեպքում (2.1) ալիքային հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությանը:

Նշանակենք

$$A_\varphi(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \varphi(y) dS_y, \quad x \in R_3, t > 0: \quad (2.29)$$

(2.29) հավասարությունը երեք փոփոխականներից կախված յուրաքանչյուր  $\varphi(x)$ ,  $x \in R_3$ , անընդհատ ֆունկցիայի համապատասխանության մեջ է դնում չորս չափանի տարածության  $\{(x, t) : x \in R_3, t > 0\}$  կիսատարածությունում որոշած  $A_\varphi$  ֆունկցիա, ընդ որում  $(x^0, t^0)$  կետում  $A_\varphi$  ֆունկցիայի արժեքը կախված է միայն  $x^0 \in R_3$  կենտրոնով և  $t^0 > 0$  շառավղով սֆերայի վրա  $\varphi$  ֆունկցիայի ընդունած արժեքներից: Դա նշանակում է, որ  $\Omega_{x^0, t^0}$  կոնի  $(x^0, t^0)$  գագաթում, ուստի և  $\Omega_{x^0, t^0}$  կոնի ցանկացած այլ կետում,  $A_\varphi$  ֆունկցիայի արժեքը որոշվում է միայն այդ կոնի  $\overline{Q}_{x^0, t^0}$  հիմքի վրա  $\varphi$  ֆունկցիայի ընդունած արժեքներով: Ներկայումս, եթե  $\varphi(x)$  ֆունկցիան տրված է ոչ թե ամբողջ  $\{x \in R_3, t = 0\}$  հարթության, այլ որևէ  $Q \subset \{x \in R_3, t = 0\}$  փրոյթի վրա, ապա  $A_\varphi$  ֆունկցիան որոշված է  $Q$  հիմքով  $\Omega_Q$  կոնոիդի վրա:

**Թեորեմ 2.5.1**՝ Դիցուք  $\varphi \in C^3(Q)$ ,  $\psi \in C^2(Q)$ : Այդ դեպքում

$$u(x, t) = \frac{\partial A_\varphi(x, t)}{\partial t} + A_\psi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_Q, \quad (2.30)$$

ֆունկցիան

$$u_{tt} - (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_Q, \quad (2.31)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q, \quad (2.32)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in Q, \quad (2.33)$$

Կոշիի լուծարարական խնդրի լուծում է:

(2.30) արտահայտությունը կոչվում է Կիրիսիտովի բանաձև:

Մինչև թեորեմի ապացույցին անցնելը՝ նախ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը:

**Լեմմա 2.5.1:** *Դիցուք  $(x^0, t^0)$  կանայական կետ  $t \{x \in R_3, t > 0\}$*

*կիսասարսաժությունից: Այդ դեպքում*

1. *եթե  $\varphi \in C^k(\overline{Q}_{x^0, t^0})$ ,  $k \geq 0$ , ապա  $A_\varphi(x, t) \in C^k(\overline{\Omega}_{x^0, t^0})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,*
2. *եթե  $\varphi \in C^k(\overline{Q}_{x^0, t^0})$ ,  $k \geq 0$ , ապա  $A_\varphi(x, t)|_{t=0} = 0$ ,  $x \in \overline{Q}_{x^0, t^0}$ ,*
3. *եթե  $\varphi \in C^k(\overline{Q}_{x^0, t^0})$ ,  $k \geq 1$ , ապա  $\frac{\partial A_\varphi(x, t)}{\partial t}|_{t=0} = \varphi(x)$ ,  $x \in \overline{Q}_{x^0, t^0}$ ,*
4. *եթե  $\varphi \in C^k(\overline{Q}_{x^0, t^0})$ ,  $k \geq 2$ , ապա  $\frac{\partial^2 A_\varphi(x, t)}{\partial t^2} - \Delta A_\varphi(x, t) = 0$ ,  $x \in \overline{Q}_{x^0, t^0}$ ,*
5. *եթե  $\varphi \in C^k(\overline{Q}_{x^0, t^0})$ ,  $k \geq 2$ , ապա  $\frac{\partial^2 A_\varphi(x, t)}{\partial t^2}|_{t=0} = 0$ ,  $x \in \overline{Q}_{x^0, t^0}$ :*

**Ապացույց:** (2.29)-ում կադարենք

$$y = x + \eta t$$

փոփոխականի փոխարինում, որպես  $x = (x_1, x_2, x_3)$  ֆիքսած կետ է,  $t$ -ն ֆիքսած դրական թիվ է: Ըստ կոորդինատների՝ այս փոփոխականի փոխարինումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y_1 = x_1 + \eta_1 t,$$

$$y_2 = x_2 + \eta_2 t,$$

$$y_3 = x_3 + \eta_3 t :$$

Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} A_\varphi(x, t) &= \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \varphi(y_1, y_2, y_3) dS_y = \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \varphi(x_1 + \eta_1 t, x_2 + \eta_2 t, x_3 + \eta_3 t) dS_\eta : \end{aligned} \quad (2.34)$$

Լեմմա 2.5.1-ի 1. և 2. պնդումները հետևում են (2.34) ներկայացումից և  $\{(x, t) \in \overline{\Omega}_{x^0, t^0}, |\eta| = 1\}$  փակ բազմության վրա ենթահինդերալային ֆունկցիայի անընդհատությունից:

3. Կնդումը ապացուցելու համար հաշվենք  $A_\varphi(x, t)$  ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալը ըստ  $t$  փոփոխականի.

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\varphi(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \varphi(x + \eta t) dS_\eta + \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=x+\eta t} \eta_i dS_\eta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \varphi(x + \eta t) dS_\eta + \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} (\nabla \varphi(y), \eta) \Big|_{y=x+\eta t} dS_\eta = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \varphi(x + \eta t) dS_\eta + \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \nu} \Big|_{y=x+\eta t} dS_\eta, \end{aligned} \quad (2.35)$$

որտեղ  $\nu = \eta$  սֆերային տարված արտաքին միավոր նորմալն է: 3. Կնդումը անմիջապես հեղուկում է (2.35) ներկայացումից, երբ  $t = 0$ :

Այժմ ձևափոխենք (2.35) հավասարությունը (անցնելով  $y$  փոփոխականի), կստանանք

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\varphi(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|y-x|=t} \varphi(y) dS_y + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \nu} dS_y = \\ &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_{|y-x|=t} \varphi(y) dS_y + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|\leq t} \Delta \varphi(y) dy : \end{aligned}$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք Օստրոգրադսկու բանաձևից.

$$\begin{aligned} \int_{|y-x|=t} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial \nu} dS_y &= \int_{|y-x|=t} (\nabla \varphi(y), \nu) dS_y = \\ &= \int_{|y-x|\leq t} \operatorname{div} \nabla \varphi(y) dy = \int_{|y-x|\leq t} \Delta \varphi(y) dy : \end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{t} A_\varphi + \frac{1}{4\pi t} \int_0^t d\rho \int_{|y-x|=\rho} \Delta \varphi(y) dS_y :$$

Ածանցենք ստացված հավասարությունը ըստ  $t$ -ի.

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{t^2} A_\varphi + \frac{1}{t} \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \frac{1}{4\pi t^2} \int_0^t d\rho \int_{|y-x|=\rho} \Delta \varphi(y) dS_y +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \Delta\varphi(y) dS_y = -\frac{1}{t^2} A_\varphi + \frac{1}{t} \left( \frac{1}{t} A_\varphi + \frac{1}{4\pi t} \int_0^t d\rho \int_{|y-x|=\rho} \Delta\varphi(y) dS_y \right) - \\
& - \frac{1}{4\pi t^2} \int_0^t d\rho \int_{|y-x|=\rho} \Delta\varphi(y) dS_y + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \Delta\varphi(y) dS_y = \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \Delta\varphi(y) dS_y :
\end{aligned}$$

Մյուս կողմից ունենք

$$\Delta_x A_\varphi(x, t) = A_{\Delta\varphi}(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \Delta\varphi(y) dS_y,$$

որպեղից հեքևում է 4. պնդումը:

5. պնդումը հեքևում է 2. և 4. պնդումներից: Եթե  $\varphi \in C^2(\overline{Q}_{x^0, t^0})$ , ապա  $\Delta\varphi \in C(\overline{Q}_{x^0, t^0})$  և  $A_{\Delta\varphi}(x, t)|_{t=0} = 0$ : Լեմման ապացուցված է:

Այժմ ապացուցենք թեորեմը:

Նամաձայն (2.4)-ի՝ բավարար է ապացուցել, որ թեորեմը քեղի ունի, եթե  $Q$  քիրրույթի քիսարեն դիքարկենք  $\overline{Q}_{x^0, t^0} \subset Q$  քակ գունդը, իսկ  $\Omega_Q$  կոնոիդի քիսարեն՝ համաքարսիսան  $\overline{\Omega}_{x^0, t^0}$  քակ կոնը:

Անիրաժեք է ցույց քալ, որ եթե  $\varphi \in C^3(\overline{Q}_{x^0, t^0})$ ,  $\psi \in C^2(\overline{Q}_{x^0, t^0})$ , ապա  $u \in C^2(\overline{\Omega}_{x^0, t^0})$  և

$$u_{tt} - (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_{x^0, t^0}, \quad (2.31')$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q_{x^0, t^0}, \quad (2.32')$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in Q_{x^0, t^0} : \quad (2.33')$$

$u(x, t)$  քունկցիաքի քարքանելուքոնը  $C^2(\overline{\Omega}_{x^0, t^0})$  դասիև հեքևում է Լեմմա 2.5.1-ի պնդում 1.-ից, (2.31') հավասարուքոնը՝ պնդում 4.-ից, (2.32') և (2.33') քայնանները՝ պնդումներ 2., 3., 5.-ից: Թեորեմն ապացուցված է:

**Նեքևանք 2.5.1՝** Եթե  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  և  $|\nabla\varphi(x)|$  քունկցիաները սահմանաքիսակ են  $Q$ -ում, ապա (2.30) Կիրիսիոնքի քանաձևով քրված (2.31) – (2.33) իսդրի լուծումը քավարարում է հեքլքալ սնհավասարուքոնը՝

$$|u(x, t)| \leq \Phi_0 + t(\Phi_1 + \Psi_0), \quad (x, t) \in (\Omega_Q \cup Q),$$

որպես

$$\Phi_0 = \sup_Q |\varphi|, \quad \Phi_1 = \sup_Q |\nabla \varphi|, \quad \Psi_0 = \sup_Q |\Psi| :$$

Իրոք, ցանկացած  $(x^0, t^0) \in Q$  կետի համար (ըստ (2.4)-ի), հաշվի առնելով (2.29), (2.30) և (2.35), ստանում ենք

$$\begin{aligned} |u(x^0, t^0)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \sup_Q |\varphi| dS_\eta + \frac{t^0}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \sup_Q |\nabla \varphi| dS_\eta + \frac{t^0}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \sup_Q |\psi| dS_\eta = \\ &= \Phi_0 + t^0(\Phi_1 + \Psi_0) : \end{aligned}$$

Ձևակերպենք համապարասիան պնդումները  $\Omega = R_3$  մասնավոր դեպքում

$$u_{tt} - (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3, \quad t > 0, \quad (2.36)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_3, \quad (2.37)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R_3, \quad (2.38)$$

Կոշիի խնդրի համար:

**Թեորեմ 2.5.1** Դիցուք  $\varphi \in C^3(R_3)$ ,  $\psi \in C^2(R_3)$ : Այդ դեպքում

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \varphi(y) dS_y \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \psi(y) dS_y \quad (2.39)$$

Կիրիստոֆի բանաձևով արված ֆունկցիան (2.36), (2.37), (2.38) Կոշիի խնդրի լուծում է:

**Նեյմանի 2.5.1** Եթե  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  և  $|\nabla \varphi(x)|$  ֆունկցիաները սահմանափակ են  $R_3$ -ում, ապա (2.39) Կիրիստոֆի բանաձևով արված (2.31) – (2.33) խնդրի լուծումը բավարարում է հետևյալ սահմանափակումները՝

$$|u(x, t)| \leq \Phi_0 + t(\Phi_1 + \Psi_0), \quad x \in R_3, \quad t \geq 0,$$

որպես

$$\Phi_0 = \sup_{R_3} |\varphi|, \quad \Phi_1 = \sup_{R_3} |\nabla \varphi|, \quad \Psi_0 = \sup_{R_3} |\psi| :$$

**Դիֆուզիայի:** Թեորեմ 2.5.1-ում ենթադրվում է  $\varphi \in C^3(R_3)$ ,  $\psi \in C^2(R_3)$ , մինչդեռ լուծման գոյության համար անհրաժեշտ են  $\varphi \in C^2(R_3)$ ,  $\psi \in C^1(R_3)$  պայմանները: Նշենք միայն, որ այս անհրաժեշտ պայմանները բավարար չեն լուծման գոյության համար, այսինքն՝ թեորեմում նշված պայմանները էական են. եթե սկզբնական պահի պայմանները  $C^2$ -ից են, ապա որոշ պահի լուծումը կարող է չպարկանել  $C^2$  դասին:

## § 6. Ալիքային հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը երկու և մեկ փարածական փոփոխականների դեպքում

Նախորդ պարագրաֆում  $n = 3$  դեպքի համար (2.1) – (2.3) խնդրի ուսումնասիրությունը հիմնված էր

$$A_\varphi(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|y-x|=t} \varphi(y) dS_y, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3, \quad t > 0, \quad (2.29)$$

Ֆունկցիայի հատկությունների վրա, որոնք ձևակերպված են Լեմմա 2.5.1-ում: Շարունակելով այս ֆունկցիայի ուսումնասիրությունը,  $n = 2$  և  $n = 1$  դեպքերի համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը կարելի է սրանալ  $n = 3$  դեպքից «վայրէջքի» եղանակով: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Լեմմա 2.6.1** Դիցուք  $\varphi \in C(R_3)$ :

1. Եթե  $\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \varphi(x_1, x_2)$ , այսինքն՝  $\varphi$  ֆունկցիան կախված չէ  $x_3$  փոփոխականից, ապա  $A_\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$  ֆունկցիան նույնպես կախված չէ  $x_3$  փոփոխականից, և այդ դեպքում

$$A_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2 \leq t^2} \frac{\varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{(t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2)^{1/2}} : \quad (2.40)$$

2. Եթե  $\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \varphi(x_1)$ , այսինքն՝  $\varphi$  ֆունկցիան կախված չէ  $x_2$  և  $x_3$  փոփոխականներից, ապա  $A_\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$  ֆունկցիան նույնպես կախված չէ

$x_2$  և  $x_3$  փոփոխականներից, և այդ դեպքում

$$A_\varphi = \frac{1}{2} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi(y_1) dy_1 :$$

**Ապացույց:** (2.29) բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$A_\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi t} \left( \int_{S^+} \varphi(y_1, y_2) dS_y + \int_{S^-} \varphi(y_1, y_2) dS_y \right),$$

որտեղ  $S^+ = \{|y - x| = t\} \cap \{y_3 \geq x_3\}$ -ը  $\{|y - x| = t\}$  սֆերայի վերին կիսասֆերան է, իսկ  $S^- = \{|y - x| = t\} \cap \{y_3 \leq x_3\}$ -ը՝ ստորին կիսասֆերան: Այս երկու կիսասֆերաների պրոյեկցիաները  $\{y_3 = 0\}$  հարթության վրա ներկայացնում են  $K_t(x_1, x_2)$  շրջանը: Ներկայացնենք,

$$A_\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi t} \left( \int_{K_t(x_1, x_2)} \varphi(y_1, y_2) \frac{dy_1 dy_2}{|\nu_3|} + \int_{K_t(x_1, x_2)} \varphi(y_1, y_2) \frac{dy_1 dy_2}{|\nu_3|} \right),$$

որտեղ  $\nu_3$ -ը համապատասխան կիսասֆերայի  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  արտաքին միավոր նորմալի երրորդ կոորդինատն է: Քանի որ  $\{|y - x| = t\}$  սֆերայի արտաքին միավոր նորմալն ունի

$$\nu = \frac{y - x}{t}$$

տեսքը, ապա  $S^+$  և  $S^-$  կիսասֆերաների համար

$$|\nu_3| = \frac{|y_3 - x_3|}{t} = \frac{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}{t}$$

և

$$A_\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{K_t(x_1, x_2)} \frac{\varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} :$$

Լեմմայի առաջին պնդումն ապացուցված է:

Ենթադրենք  $\varphi$  ֆունկցիան կախված չէ նաև  $x_2$  փոփոխականից: Այդ դեպքում (2.40)-ից կստանանք

$$A_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{K_t(x_1, x_2)} \frac{\varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi(y_1) \left( \int_{x_2-\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}}^{x_2+\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}} \frac{dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} \right) dy_1 = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi(y_1) \arcsin \frac{y_2-x_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}} \Big|_{y_2=x_2-\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}}^{y_2=x_2+\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}} dy_1 = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi(y_1) dy_1 :
\end{aligned}$$

Լեմման ամբողջությամբ ապացուցված է:

$n = 3$  դեպքում (2.39) բանաձևը փախի է (2.36)–(2.38) Կոշիի խնդրի լուծումը, երբ  $\varphi \in C^3(R_3)$ ,  $\psi \in C^2(R_3)$ : Մասնավոր դեպքում, երբ  $\varphi$  և  $\psi$  ֆունկցիաները կախված չեն  $x_3$  կամ  $x_3$  և  $x_2$  փոփոխականներից, այդ բանաձևը նորից փախի է (2.36) – (2.38) խնդրի լուծումը: Բայց այդ դեպքում, համաձայն Լեմմա 2.6.1-ի, այդ լուծումները նույնպես կախված չեն համապարասխանաբար  $x_3$  կամ  $x_3$  և  $x_2$  փոփոխականներից, այսինքն՝ (2.1) – (2.3) խնդրի լուծում են ( $f(x, t) \equiv 0$ ), երբ  $n = 2$  և  $n = 1$ :

Այսպիսով,  $n = 2$  դեպքում

$$u_{tt} - (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in R_2, \quad t > 0, \quad (2.41)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_2, \quad (2.42)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R_2, \quad (2.43)$$

Կոշիի խնդրի լուծումը արվում է

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x| \leq t} \frac{\varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} \right) + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{|y-x| \leq t} \frac{\psi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} \quad (2.44)
\end{aligned}$$

բանաձևով: (2.44) արտահայտությունը կոչվում է Պուասոնի բանաձև:

$n = 1$  դեպքում, ինչպես արդեն գիտենք, Կոշիի խնդրի լուծումը ներկայացվում է (2.20) Դալանբերի բանաձևով, ուղղակի այս պարագրաֆում մենք այն սրացանք մեկ այլ «վայրէջքի» եղանակով:

Ուշադրություն դարձնենք մեկ հանգամանքի վրա:  $n = 2$  և  $n = 1$  դեպքերում լուծումները սրացանք՝ օգտվելով  $n = 3$  դեպքում լուծման գոյությունից, երբ ենթադրվում էր  $\varphi \in C^3(R_3)$ ,  $\psi \in C^2(R_3)$ : Ներկայացրեք, սրացված բանաձևերը տեղի ունեն, երբ  $\varphi \in C^3(R_2)$ ,  $\psi \in C^2(R_2)$  և  $\varphi \in C^3(R_1)$ ,  $\psi \in C^2(R_1)$  համապատասխանաբար: Սակայն, ինչպես արդեն ցույց ենք տվել,  $n = 1$  դեպքում ողորկության պայմանը կարելի է թուլացնել, բավարար է ենթադրել  $\varphi \in C^2(R_1)$ ,  $\psi \in C^1(R_1)$ :

Նշենք, որ

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 \Delta_x u &= 0, & x \in R_3, & t > t^0, \\ u|_{t=t^0} &= \varphi(x), & x \in R_3, \\ u_t|_{t=t^0} &= \psi(x), & x \in R_3, \end{aligned}$$

Կոշիի խնդիրը, որտեղ  $a > 0$  հաստատվում է,  $t^0 \in R_1$ ,  $\tau = a(t - t^0)$  փոփոխականի փոխարինմամբ բերվում է վերը ուսումնասիրված խնդրին և

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi a^2(t - t^0)} \int_{|y-x|=a(t-t^0)} \varphi(y) dS_y \right) + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2(t - t^0)} \int_{|y-x|=a(t-t^0)} \psi(y) dS_y \end{aligned} \quad (2.45)$$

ֆունկցիան այս խնդրի լուծում է:

## § 7. Ալիքների դիֆուզիայի մասին

Այս պարագրաֆում կհամոզվենք, որ Կոշիի խնդրի լուծումներն ունեն փարբեր հատկություններ, որոնք կախված են փարածության  $n$  չափողականությունից: Դիտարկենք

$$u_{tt} - a^2 \Delta_x u = 0, \quad x \in R_n, \quad t > 0, \quad (2.46)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \in R_n, \quad (2.47)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R_n, \quad (2.48)$$

Կոշիի խնդիրը, որպեսզ  $\psi(x) \in C^2(R_n)$ ,  $a > 0$  հաստատվում է:

Ենթադրենք գոյություն ունի այնպիսի  $R > 0$ , որ  $\psi(x) > 0$ , երբ  $|x| < R$ ,  $\psi(x) \equiv 0$ , երբ  $|x| \geq R$ : Մենք կդիտարկենք  $n = 3$  և  $n = 2$  դեպքերը:

$n = 3$  դեպքում (2.46) – (2.48) խնդրի լուծումը տրվում է

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \psi(y) dS_y, \quad x \in R_3, \quad t > 0,$$

Կիրիսիոֆի բանաձևով, որից հետևում է, որ ցանկացած ֆիքսած  $x \in R_3$ ,  $|x| > R$ , կերպի համար

$$u(x, t) > 0, \quad \text{երբ} \quad at \in (|x| - R, |x| + R),$$

$$u(x, t) = 0, \quad \text{երբ} \quad at \leq |x| - R \quad \text{կամ} \quad at \geq |x| + R :$$

Այլ կերպ ասած, եթե  $|x| > R$ , ապա

$$at - R < |x| < at + R$$

գնդային շերտում  $u(x, t) > 0$  և  $u(x, t) = 0$  այդ շերտից դուրս: Դա նշանակում է, որ սկզբնական պահին  $\psi(x)$  ֆունկցիայի առաջացրած ազդեցությունը ժամանակի ընթացքում փարածվում է հետևյալ կերպ. առաջանում է գնդային ալիք  $|x| = at + R$  *առաջնային ճակատով* և  $|x| = at - R$  *հետին ճակատով*, որոնք շարժվում են  $\frac{d(at \pm R)}{dt} = a$  արագությամբ: Այդ գնդային ալիքի լայնությունը  $2R$  է: Ցանկացած  $x$ ,  $|x| > R$ , կերպում  $u(x, t) = 0$  (դադարի վիճակ է) քանի դեռ  $at \leq |x| - R$  (մինչև առաջնային ճակատը կհասնի այդ կերպին), այնուհետև  $|x| - R < at < |x| + R$  ժամանակահատվածում  $u(x, t) > 0$  (փափայլող վիճակ է) և հետո կրկին  $u(x, t) = 0$  (դադարի վիճակ է), երբ  $at \geq |x| + R$  (երբ ալիքի հետին ճակատը արդեն անցել է  $x$  կերպով):

Առաջնային ճակատի առկայության հարկությունը բնորոշ է հիպերբոլական հավասարումների համար Կոշիի խնդրին, ինչը պայմանավորված է նման խնդրով

նկարագրվող երևույթներում ազդեցության փարածման վերջավոր արագությամբ: Մակայն հեփին ճակատի առկայությունը, որի անցնելուց հետո կետում վերականգնվում է դադարի վիճակը, եռաչափ խնդրի առանձնահատկություն է:

$n = 2$  դեպքում նման երևույթ չկա: Իրոք,  $n = 2$  դեպքում (2.46)–(2.48) խնդրի լուծումը փրվում է

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{|y-x| \leq at} \frac{\psi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}, \quad x \in R_2, \quad t > 0,$$

Պուասոնի բանաձևով: Ցանկացած  $x \in R_2$ ,  $|x| > R$ , կետի համար

$$u(x, t) = 0, \quad \text{երբ} \quad at \leq |x| - R,$$

$$u(x, t) > 0, \quad \text{երբ} \quad at > |x| - R:$$

Այսպիսով,  $u(x, t) > 0$ , երբ  $|x| < at + R$  և  $u(x, t) = 0$ , երբ  $|x| \geq at + R$ : Դա նշանակում է, որ սկզբնական պահին  $\psi(x)$  ֆունկցիայի առաջացրած ազդեցությունը ժամանակի ընթացքում փարածվում է հետևյալ կերպ.  $x$ ,  $|x| > R$ , կետում  $u(x, t) = 0$  դադարի վիճակը շարունակվում է մինչև  $t = \frac{|x| - R}{a}$  պահը, երբ այդ կետով անցնում է  $a$  արագությամբ շարժվող  $|x| = at + R$  առաջնային ճակատը, ժամանակի բոլոր հաջորդ  $t > \frac{|x| - R}{a}$  պահերին  $u(x, t) > 0$  և  $x$  կետում այլևս դադար չի լինի: Մակայն դժվար չէ նկատել, որ այդ կետում  $u(x, t) \rightarrow 0$ , երբ  $t \rightarrow \infty$ , ինչը նշանակում է, որ կետի շեղումը անվերջ փոքր է, երբ  $t \rightarrow \infty$ : Այդ կապակցությամբ ասում են, որ  $n = 2$  դեպքում փեղի է ունենում ալիքի *հեփին ճակատի դիֆուզիա* (հեփին ճակատը բացակայում է):

**Դյուամելի սկզբունքը:** Այժմ ուսումնասիրենք Կոշիի խնդիրը անհամասեռ ալիքային հավասարման համար: Ակնհայտ է, որ բավարար է դիփարկել համասեռ սկզբնական պայմաններով դեպքը՝

$$u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(x, t), \quad x \in R_n, \quad t > 0, \quad (2.49)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \in R_n, \quad (2.50)$$

$$u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in R_n : \quad (2.51)$$

Այդ նպատակով դիտարկենք

$$v_{tt} - a^2 \Delta_x v = 0, \quad x \in R_n, \quad t > \tau \geq 0, \quad (2.52)$$

$$v|_{t=\tau} = 0, \quad x \in R_n, \quad (2.53)$$

$$v_t|_{t=\tau} = f(x, \tau), \quad x \in R_n, \quad (2.54)$$

խնդիրը, որի լուծումը կախված է  $x$ ,  $t$  փոփոխականներից և  $\tau$  պարամետրից՝  $v = v(x, t, \tau)$ : Տեղի ունի հետևյալ պնդումը, որը կոչվում է *Դյուամենլի* սկզբունք:

**Թեորեմ 2.7.1 (Դյուամենլի սկզբունքը)** *Դիցուք  $v(x, t, \tau)$  ֆունկցիան (2.52), (2.53), (2.54) խնդրի լուծում է: Այդ դեպքում*

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t, \tau) d\tau \quad (2.55)$$

*ֆունկցիան (2.49), (2.50), (2.51) խնդրի լուծում է:*

**Ապացույց:** Ածանցելով (2.55) բանաձևը երկու անգամ ըստ  $t$  փոփոխականի, հաշվի առնելով (2.53), (2.54) պայմանները՝ ստանում ենք

$$u_t = v(t, x, t) + \int_0^t v_t(x, t, \tau) d\tau = \int_0^t v_t(x, t, \tau) d\tau, \quad (2.56)$$

$$u_{tt} = v_t(t, x, t) + \int_0^t v_{tt}(x, t, \tau) d\tau = f(x, t) + \int_0^t v_{tt}(x, t, \tau) d\tau :$$

Քանի որ ըստ  $x_i$  փոփոխականների ածանցման գործողությունը կարելի է փոխել ինտեգրալի նշանի տակ, ապա

$$\Delta_x u = \Delta_x \int_0^t v(x, t, \tau) d\tau = \int_0^t \Delta_x v(x, t, \tau) d\tau :$$

Ներկայացնելով,

$$u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(x, t) + \int_0^t v_{tt}(x, t, \tau) d\tau - a^2 \int_0^t \Delta_x v(x, t, \tau) d\tau =$$

$$= f(x, t) + \int_0^t (v_{tt}(x, t, \tau) - a^2 \Delta_x v(x, t, \tau)) d\tau = f(x, t) :$$

Այսպիսով,  $u$  ֆունկցիան բավարարում է (2.49) հավասարմանը: (2.55) և (2.56) ներկայացումներից անմիջապես հետևում է, որ  $u$  ֆունկցիան բավարարում է (2.50) և (2.51) պայմաններին: Թեորեմն ապացուցված է:

Եվ այսպես, մենք կարող ենք գրել

$$u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f(x, t), \quad x \in R_n, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_n,$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R_n,$$

Կոշիի խնդրի լուծման փեսքը, եթե ունենք համասեռ հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծումը:

Գրենք այդ լուծումների փեսքը մեզ հայրնի դեպքերի համար: Ենթադրվում է, որ  $f(x, \tau)$  ֆունկցիան յուրաքանչյուր  $\tau \geq 0$  համար, որպես  $x$  փոփոխականից կախված ֆունկցիա, պարկանում է համապարասխան դասին ( $n = 1$  դեպքում  $C^1$  դասին,  $n = 2, 3$  դեպքերում  $C^2$  դասին):

$n = 1$  (Դալսմբերի բանաձև).

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi$$

$$\left( \text{կամ, փես (2.20'), } u(M) = \frac{\varphi(N) + \varphi(P)}{2} + \frac{1}{2} \int_{NP} \psi(\alpha) d\alpha + \iint_{MNP} f(x, t) dxdt \right),$$

$n = 2$  (Պուասոնի բանաձև).

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\pi a} \int_{|y-x| \leq at} \frac{\varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{a^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi a} \int_{|y-x| \leq at} \frac{\psi(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{\sqrt{a^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} + \\
& + \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_{|y-x| \leq a(t-\tau)} \frac{f(y_1, y_2, \tau) dy_1 dy_2}{\sqrt{a^2 (t-\tau)^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}},
\end{aligned}$$

$n = 3$  (Կիբրիսիոսի բանաձև).

$$\begin{aligned}
u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \varphi(y) dS_y \right) + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \psi(y) dS_y + \\
+ \int_0^t d\tau \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y, \tau) dS_y :
\end{aligned}$$

## § 8. Խառը խնդիրը հիպերբոլական հավասարման համար

**Կիսաանվերջ լարի տարանունները:** Դիփարկենք հետևյալ խնդիրը. գտնել

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \quad (a > 0)$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$u(0, t) = \mu(t) \quad \left( \text{կամ } u_x(0, t) = \nu(t) \right), \quad t \geq 0,$$

եզրային և

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x < \infty,$$

սկզբնական պայմաններին:

Այս խնդիրը կոչվում է խառը խնդիր լարի տարանունման հավասարման համար:

Պարզության համար կրիփարկենք  $u(0, t) = 0$  համասեռ եզրային պայմանը, ինչը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ լարի ծայրը ամրացված է, ինչպես նաև  $u_x(0, t) = 0$  համասեռ եզրային պայմանը, ինչը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ լարի ծայրը ազատ է:

Նախ դիփարկենք ամրացված ծայրով կիսաանվերջ լարի տարանունները  $u(0, t) = 0$ : Տարածենք խնդիրը ամբողջ առանցքի վրա՝ շարունակելով սկզբնական ֆունկցիաները բացասական կիսաառանցքի վրա կենդ ձևով: Նշանակենք

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0 : \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ անվերջ լարի փափանումը նկարագրող

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{\tilde{\varphi}(x - at) + \tilde{\varphi}(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi$$

Ֆունկցիան  $\{x > 0, t > 0\}$  փիրույթում կիսաանվերջ լարի համար ձևակերպված խնդրի լուծում է այդ ֆունկցիան բավարարում է հավասարմանը, սկզբնական պայմաններին և  $\tilde{u}(0, t) = 0$  եզրային պայմանին (Թեորեմ 2.3.2):

Վերադառնալով նախնական խնդրի  $\varphi(x)$  և  $\psi(x)$  սկզբնական ֆունկցիաներին՝ լուծումը կներկայացվի հետևյալ ձևով.

$x - at > 0$  փիրույթում ( $t < \frac{x}{a}$  և եզրի առկայությունը դեռևս չի դրսևորվում), կունենանք

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi,$$

$x - at < 0$  փիրույթում ( $t > \frac{x}{a}$  և արդեն առկա է եզրի ազդեցությունը), հաշվի առնելով սիմետրիկ սահմաններում կենսա ֆունկցիայի ինտեգրալի գրո լինելը, կունենանք

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) - \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi :$$

Այժմ դիֆարկենք ազատ ծայրով կիսաանվերջ լարի փափանումները՝  $u_x(0, t) = 0$ :

Նույն կերպ, խնդիրը փարածենք ամբողջ առանցքի վրա, բայց այժմ սկզբնական



Ֆունկցիաները զույգ ձևով շարունակելով բացասական կիսաառանցքի վրա:

Նշանակենք

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ \psi(-x), & x < 0 : \end{cases}$$

Այս դեպքում ևս ակնհայտ է, որ անվերջ լարի փափանույնը նկարագրող

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{\tilde{\varphi}(x - at) + \tilde{\varphi}(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi$$

Ֆունկցիան  $\{x > 0, t > 0\}$  արհեստական կիսաանվերջ լարի համար ձևակերպված խնդրի լուծում է, սակայն ի փարբերություն կենք շարունակության դեպքի՝ այս դեպքում բավարարում է  $\tilde{u}_x(0, t) = 0$  եզրային պայմանին (Թեորեմ 2.3.3):

Վերադառնալով նախնական խնդրի  $\varphi(x)$  և  $\psi(x)$  սկզբնական ֆունկցիաներին՝ լուծումը կներկայացվի հետևյալ ձևով.

երբ  $t < \frac{x}{a}$  և եզրի առկայությունը դեռևս չի դրսևորվում, ինչպես նախորդ դեպքում, կունենանք

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi,$$

երբ  $t > \frac{x}{a}$  և արդեն առկա է եզրի ազդեցությունը, հաշվի առնելով սիմետրիկ սահմաններում զույգ ֆունկցիայի ինտեգրալի հարկությունը, կունենանք

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \left( \int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi + \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi \right) :$$

**Վերջավոր լարի փափանույնները:** Դիփարկենք հետևյալ խնդիրը. գտնել

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \quad (a > 0) \quad (2.57)$$

հավասարման լուծումը, որը բավարարում է

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.58)$$

սկզբնական պայմաններին և

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.59)$$

եզրային պայմաններին, ինչը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ լարի ծայրերը ամրացված են:

Ինչպես և նախորդ դեպքերում, խնդիրը փարածենք ամբողջ առանցքի վրա: Սկզբնական ֆունկցիաները շարունակենք՝ շարունակված ֆունկցիաները նշանակելով  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\psi}$ , հետևյալ ձևով. նախ կենսր ձևով շարունակենք  $[0, l]$ -ից  $[-l, l]$ ,

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\tilde{\psi}(x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\tilde{\varphi}(x) = -\varphi(-x), \quad -l \leq x \leq 0,$$

$$\tilde{\psi}(x) = -\psi(-x), \quad -l \leq x \leq 0,$$

այնուհետև շարունակենք  $2l$  պարբերությամբ ամբողջ առանցքի վրա՝

$$\tilde{\varphi}(x \pm 2lk) = \tilde{\varphi}(x), \quad -l \leq x \leq l, \quad k = \pm 1, 2, \dots$$

$$\tilde{\psi}(x \pm 2lk) = \tilde{\psi}(x), \quad -l \leq x \leq l, \quad k = \pm 1, 2, \dots :$$

Ակնհայտ է, որ անվերջ լարի փափանումը նկարագրող

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{\tilde{\varphi}(x - at) + \tilde{\varphi}(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi$$

ֆունկցիան (2.57), (2.58), (2.59) խնդրի լուծում է ((2.59) եզրային պայմանը բավարարված է՝ համաձայն Թեորեմ 2.3.2-ի): Ստացված բանաձևում նախնական

խնդրի  $\varphi(x)$  և  $\psi(x)$  սկզբնական ֆունկցիաներին վերադառնալու համար, ինչպես նախորդ դեպքերում, անհրաժեշտ է  $\{0 < x < l, t > 0\}$  փրոյթում  $\tilde{\varphi}$  և  $\tilde{\psi}$  ֆունկցիաների արժեքները արտահայտել  $\varphi(x)$  և  $\psi(x)$  ֆունկցիաների արժեքների միջոցով, ինչը թողնում ենք ընթերցողին:

## § 9. Փոփոխականների անջատման մեթոդը

**Նամասեն հավասարումներ:** Փոփոխականների անջատման կամ Ֆուրյեի մեթոդը մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման հիմնական մեթոդներից է, որը կշարադրենք նախ (2.57), (2.58), (2.59) ամրացված ծայրերով լարի փափանման խնդրի համար: Քանի որ (2.57) հավասարումը գծային է և համասեն, ուստի երկու մասնավոր լուծումների գումարը ևս այդ հավասարման լուծում է: Փորձենք գտնել (2.57) հավասարման այնպիսի մասնավոր լուծումներ, որոնց գումարը կլինի (2.57), (2.58), (2.59) խնդրի լուծում: Նախ լուծենք հեղուկ օժանդակ խնդիրը. գտնել (2.57) հավասարման այն ոչ փրիվիալ (ոչ նույնաբար զրո) լուծումները, որոնք բավարարում են (2.59) եզրային պայմաններին և ունեն

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.60)$$

փեսքը, որտեղ  $X(x)$  ֆունկցիան կախված է միայն  $x$  փոփոխականից,  $T(t)$  ֆունկցիան կախված է միայն  $t$  փոփոխականից: Տեղադրելով (2.60) փեսքի  $u(x, t)$  ֆունկցիան (2.57) հավասարման մեջ՝ ստանում ենք

$$X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0,$$

որտեղից, հաշվի առնելով  $X(x) \neq 0, T(t) \neq 0$ , ստանում ենք

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} : \quad (2.61)$$

Որպեսզի (2.60) ֆունկցիան լինի (2.57) հավասարման լուծում, անհրաժեշտ է, որ (2.61) հավասարությունը փրեղի ունենա  $\{(x, t) : 0 < x < l, t > 0\}$  փրոյթի

բոլոր կետերի համար: (2.61) հավասարության ձախ մասը կախված է միայն  $x$ -ից, իսկ աջ մասը՝ միայն  $t$ -ից: Ֆիքսելով  $x$  փոփոխականի որևէ արժեք և փոփոխելով  $t$  փոփոխականը (կամ հակառակը)՝ սրանում ենք, որ (2.61) հավասարության աջ և ձախ մասերը նույնաբար հավասար են միևնույն հաստատունին: Այդ հաստատունը նշանակենք  $-\lambda$ -ով.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda :$$

Այսպեսից  $X(x)$  և  $T(t)$  ֆունկցիաների համար սրանում ենք

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad 0 < x < l, \quad (2.62)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0, \quad t > 0, \quad (2.63)$$

սովորական դիֆերենցիալ հավասարումները: (2.59) եզրային պայմաններից ունենք

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l)T(t) = 0,$$

որպեսզից հետևում է, որ

$$X(0) = X(l) = 0 : \quad (2.64)$$

Այսպիսով  $X(x)$  ֆունկցիայի համար սրացանք հետևյալ խնդիրը՝ գտնել  $\lambda$  հաստատունի այն արժեքները, որոնց համար

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad X(0) = X(l) = 0, \quad (2.65)$$

խնդիրն ունի ոչ զրոյական լուծում: Այդպիսի  $\lambda$  հաստատունները կոչվում են (2.65) խնդրի սեփական արժեքներ, իսկ համապատասխան լուծումները՝ սեփական ֆունկցիաներ: Այս խնդիրն անվանում են նաև Շյուրմ-Լիուվիլի խնդիր: Դիտարկենք  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  և  $\lambda > 0$  հնարավոր դեպքերը:

1.  $\lambda < 0$  դեպքում (2.65) խնդիրը չունի ոչ փրիվիալ լուծում: Իրոք, (2.62) հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

փեսքը: (2.64) եզրային պայմաններից ունենք

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0, \end{cases}$$

որպեղից  $C_1 = C_2 = 0$  և  $X(x) \equiv 0$ :

2.  $\lambda = 0$  դեպքում (2.65) խնդիրը կրկին չունի ոչ փրիվիալ լուծում: Իրոք, այս դեպքում (2.62) հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$X(x) = C_1 x + C_2 :$$

(2.64) եզրային պայմաններից ունենք

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 l + C_2 = 0, \end{cases}$$

որպեղից  $C_1 = C_2 = 0$  և  $X(x) \equiv 0$ :

3.  $\lambda > 0$  դեպքում (2.62) հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x :$$

(2.64) եզրային պայմաններից ունենք

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(l) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}l + C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0, \end{cases}$$

որպեղից  $C_1 = 0$  և  $C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0$ : Եթե  $X(x) \neq 0$ , ապա  $C_2 \neq 0$  և  $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$ , այսինքն՝

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

որպեղ  $n = 1, 2, \dots$ : Ներկայացրեք, (2.65) խնդիրը կարող է ունենալ ոչ փրիվիալ լուծումներ միայն

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

արժեքների (սեփական արժեքների) դեպքում: Յուրաքանչյուր  $\lambda_n$ -ին համապատասխանում է

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

լուծումը (սեփական ֆունկցիան), որպեղ  $D_n$ -ը կամայական հաստատուն է:  $\lambda_n$ -ին համապատասխանող (2.63) հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi a n}{l} t + B_n \sin \frac{\pi a n}{l} t$$

դեպքը, որպեղ  $A_n$ -ը և  $B_n$ -ը կամայական հաստատուներ են:

Այսպիսով,

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi a n}{l} t + B_n \sin \frac{\pi a n}{l} t\right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ֆունկցիաները (2.57) հավասարման մասնավոր լուծումներ են, որոնք բավարարում են (2.59) եզրային պայմաններին և ներկայացվում են երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով, որոնցից մեկը կախված է միայն  $x$ -ից, մյուսը՝ միայն  $t$ -ից: Այս լուծումները կարող են բավարարել նախնական խնդրի (2.58) սկզբնական պայմաններին միայն մասնավոր  $\varphi$  և  $\psi$  ֆունկցիաների համար:

Այժմ վերադառնանք (2.57), (2.58), (2.59) ընդհանուր խնդրին: Ենթադրենք  $A_n, B_n$  գործակիցները այնպիսին են, որ

$$u(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi a n}{l} t + B_n \sin \frac{\pi a n}{l} t\right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (2.66)$$

շարքը, ինչպես նաև այն շարքերը, որոնք սրացվում են այս շարքը երկու անգամ անդամ առ անդամ ածանցելիս ըստ  $x$  և  $t$  փոփոխականների, հավասարաչափ զուգամեր են  $\{0 \leq x \leq l, t \geq 0\}$  բազմության վրա:

Պարզ է, որ  $u(x, t)$  ֆունկցիան կբավարարի ինչպես (2.59) եզրային պայմաններին, այնպես էլ (2.57) հավասարմանը: (2.58) սկզբնական պայմաններից գրենք  $A_n, B_n$  գործակիցները: Ունենք

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (2.67)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin \frac{\pi n}{l} x : \quad (2.68)$$

Եթե  $\varphi$  և  $\psi$  ֆունկցիաները կարելի է ներկայացնել Ֆուրյեի շարքով, ապա

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (2.69)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi : \quad (2.70)$$

(2.69), (2.70) շարքերի և (2.67), (2.68) բանաձևերի համեմատությունից երևում է, որ սկզբնական պայմանների բավարարման համար անհրաժեշտ է վերցնել

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{1}{\pi n a} \psi_n, \quad (2.71)$$

և այդ դեպքում (2.66) շարքով ներկայացված  $u(x, t)$  ֆունկցիան կհանդիսանա (2.57), (2.58), (2.59) խնդրի լուծում:

Այսպիսով, մենք լուծումը ներկայացրինք (2.66) շարքի տեսքով: Եթե (2.66) շարքը տարամիտում է կամ այդ շարքով ներկայացված ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ, ապա, իհարկե, այն չի կարող լինել (2.57) դիֆերենցիալ հավասարման լուծում:

Այժմ տեսնենք, թե ինչ պայմանների պետք է բավարարեն  $\varphi$  և  $\psi$  ֆունկցիաները, որպեսզի (2.71) բանաձևով որոշված գործակիցներով (2.66) շարքը և այն շարքերը, որոնք սրացվում են այդ շարքը երկու անգամ անդամ

առ անդամ ածանցելիս ըստ  $x$  և  $t$  փոփոխականների, լինեն հավասարաչափ զուգամեծ  $\{0 \leq x \leq l, t \geq 0\}$ -ում:

Քանի որ

$$|u_n(x, t)| \leq |A_n| + |B_n|,$$

այս

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \quad (2.72)$$

շարքը (2.66) շարքի մաժորանտ է և (2.72) շարքի զուգամիությունից հետևում է (2.66) շարքի հավասարաչափ զուգամիությունը:

$u_t(x, t)$  ֆունկցիայի անընդհատությունը ստանալու նպատակով ուսումնասիրենք

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi a n}{l} \left( -A_n \sin \frac{\pi a n}{l} t + B_n \cos \frac{\pi a n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (2.73)$$

շարքի հավասարաչափ զուգամիությունը: (2.73) շարքի համար մաժորանտ է

$$\frac{\pi a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n (|A_n| + |B_n|) \quad (2.74)$$

շարքը: Եվ վերջապես,  $u_{tt}(x, t)$  և  $u_{xx}(x, t)$  ֆունկցիաների անընդհատությունը ստանալու նպատակով ուսումնասիրենք

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \\ &= - \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left( A_n \cos \frac{\pi a n}{l} t + B_n \sin \frac{\pi a n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \\ &= - \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left( A_n \cos \frac{\pi a n}{l} t + B_n \sin \frac{\pi a n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \end{aligned} \quad (2.76)$$

շարքերի հավասարաչափ զուգամիությունը: Այս շարքերի համար հաստատուն բազմապարկիչի ճշտությամբ մաժորանտ շարք է հանդիսանում



$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|) \quad (2.77)$$

շարքը: Այնուհետև, հաշվի առնելով  $A_n, B_n$  գործակիցների (2.71) ներկայացումը, (2.72), (2.73), (2.77) շարքերի զուգամիպության խնդիրը բերվում է

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n|, \quad k = 0, 1, 2, \quad (2.78)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n|, \quad k = -1, 0, 1, \quad (2.79)$$

շարքերի զուգամիպության խնդիրին:

Նամաձայն Ֆուրյեի շարքերի հայտնի հարկությունների

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n|, \quad k = 0, 1, 2,$$

շարքերի զուգամիպության համար բավարար է ենթադրել, որ  $\varphi \in C^2[0, l]$  ֆունկցիան ունի երրորդ կարգի կտոր առ կտոր անընդհար ածանցյալ և փեղի ունի

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \quad (2.80)$$

պայմանը, իսկ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n|, \quad k = -1, 0, 1,$$

շարքերի զուգամիպության համար բավարար է ենթադրել, որ  $\psi \in C^1[0, l]$  ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի կտոր առ կտոր անընդհար ածանցյալ և փեղի ունի

$$\psi(0) = \psi(l) = 0 \quad (2.81)$$

պայմանը: Այսպիսով, ապացուցվեց հետևյալ թեորեմը:

**Թեորեմ 2.9.1** *Դիցուք  $\varphi \in C^2[0, l]$  ֆունկցիան ունի երրորդ կարգի կտոր առ կտոր ահընդհար ածանցյալ,  $\psi \in C^1[0, l]$  ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի կտոր առ կտոր ահընդհար ածանցյալ և փեղի ունեն (2.80), (2.81) պայմանները: Այդ դեպքում (2.66) շարքով ներկայացված  $u(x, t)$*

Ֆունկցիան, որտեղ  $A_n, B_n$  գործակիցները որոշվում են (2.71) բանաձևով, (2.57), (2.58), (2.59) խնդրի լուծում է:

**Սրացիոնար անհամասեռությամբ հավասարումներ:** Դիֆարկենք հետևյալ խնդիրը. գտնել

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \quad (a > 0) \quad (2.82)$$

անհամասեռ հավասարման լուծումը, որը բավարարում է

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.83)$$

սկզբնական պայմաններին և

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.84)$$

համասեռ եզրային պայմաններին:

Լուծումը փնտրենք

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x) \quad (2.85)$$

երկու ֆունկցիաների գումարի տեսքով, որոնք բավարարում են (2.84) եզրային պայմանին:  $w(x)$  ֆունկցիան կոչվում է լուծման սրացիոնար մաս: Պահանջենք, որ  $v(x, t)$  ֆունկցիան բավարարի

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

համասեռ հավասարմանը: Նամաձայն (2.83) պայմանի

$$v(x, 0) = u(x, 0) - w(x) = \varphi(x) - w(x), \quad (2.86)$$

$$v_t(x, 0) = u_t(x, 0) = \psi(x) :$$

Այսպիսով,  $v(x)$  ֆունկցիայի համար սրացանք խնդիր, որը կարելի է լուծել փոփոխականների անջատման մեթոդով:

Տեղադրելով (2.85) ներկայացումը (2.82) հավասարման մեջ՝  $w(x)$  ֆունկցիայի համար կստանանք

$$a^2 w_{xx} + f(x) = 0,$$

հավասարումը, որը լուծվում է երկու անգամ ինտեգրելով ըստ  $x$  փոփոխականի՝ հաշվի առնելով  $w(0) = w(l) = 0$  եզրային պայմանները: Տեղադրելով  $w(x)$  ֆունկցիան (2.86) սկզբնական պայմանի մեջ կարող ենք գտնել  $v(x)$  ֆունկցիան:

**Ընդհանուր անհամասեռությամբ հավասարումներ:** Դիցուք արված է

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \quad (a > 0) \quad (2.87)$$

անհամասեռ հավասարումը, ինչը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ ազդող արտաքին ուժը փոփոխվում է ժամանակի ընթացքում:

Դիտարկենք (2.87), (2.83), (2.84) խնդիրը: Լուծումը փնտրենք

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (2.88)$$

տեսքով: Ներկայացնենք հավասարման  $f(x, t)$  աջ մասը և (2.83) սկզբնական ֆունկցիաները Ֆուրյեի համապատասխան շարքերով.

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi, \quad (2.89)$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi, \quad (2.90)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi : \quad (2.91)$$

Տեղադրելով (2.88) և (2.89) արտահայտությունները (2.87) հավասարման մեջ՝ ստանում ենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( u_n''(t) + \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 u_n(t) \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

որտեղից

$$u_n''(t) + \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 u_n(t) = f_n(t), \quad n = 1, 2, \dots : \quad (2.92)$$

Այսպիսով,  $u_n(t)$  ֆունկցիան որոշելու համար սրացանք հասարակուն գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարում: (2.83) սկզբնական պայմաններից սրանում ենք

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

որպեսզի

$$u_n(0) = \varphi_n, \quad u'_n(0) = \psi_n : \quad (2.93)$$

Լուծելով (2.92), (2.93) խնդիրը կստանանք  $u_n(t)$  ֆունկցիան:

**Անհամասեռ եզրային պայմաններ:** Դիֆարկենք առաջին խառը խնդիրը լարի փափանման հավասարման համար ընդհանուր դեպքում.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \quad (a > 0)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0 :$$

Այս խնդիրը լուծելու համար ներմուծենք նոր  $v(x, t)$  անհայտ ֆունկցիա.

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t),$$

որպեսզի ենթադրվում է, որ  $U(x, t)$  ֆունկցիան հայտնի է:  $v(x, t)$  ֆունկցիան պետք է լինի

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = \tilde{f}(x, t)$$

հավասարման լուծում, որպեսզի  $\tilde{f}(x, t) = f(x, t) - (U_{tt} - a^2 U_{xx})$ , և բավարարի հետևյալ սկզբնական և եզրային պայմաններին՝

$$v(x, 0) = \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0),$$

$$v_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x) = \psi(x) - U_t(x, 0),$$

$$v(0, t) = \tilde{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t),$$

$$v(l, t) = \tilde{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t) :$$

Ընտրենք  $U(x, t)$  ֆունկցիան այնպես, որ

$$\tilde{\mu}_1(t) = \tilde{\mu}_2(t) = 0 :$$

Այդ նպատակով կարող ենք վերցնել

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) :$$

Այսպիսով,  $u(x, t)$  ֆունկցիայի համար ընդհանուր եզրային պայմաններով խնդիրը բերվեց  $v(x, t)$  ֆունկցիայի համար համասեռ եզրային պայմաններով խնդրին:

### Գլուխ 3

#### Պարաբոլական տիպի հավասարումներ

$u(x, t)$ ,  $x \in R_n$ ,  $t > 0$ , ֆունկցիան կոչվում է

$$Lu \equiv u_t - \Delta_x u = f(x, t), \quad x \in R_n, t > 0, \quad (3.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_n, \quad (3.2)$$

Կոչիի խնդրի լուծում, եթե  $u$ -ն պարկանում է

$$C^2(x \in R_n, t > 0) \cap C(x \in R_n, t \geq 0)$$

բազմությանը,  $\{x \in R_n, t > 0\}$  տիրույթում բավարարում է (3.1) հավասարմանը և  $t = 0$  դեպքում (3.2) պայմանին: (3.2) պայմանը կոչվում է սկզբնական պայման, իսկ  $\varphi(x)$  ֆունկցիան կոչվում է սկզբնական ֆունկցիա:

Լուծման սահմանումից ակնհայտորեն հետևում է, որ (3.1), (3.2) խնդրի լուծման գոյության համար անհրաժեշտ են  $f \in C(x \in R_n, t > 0)$  և  $\varphi \in C(R_n)$  պայմանները:

Ինչպես և ալիքային հավասարման դեպքում, մեր ուսումնասիրության պլանը հետևյալն է. սկզբում Ֆուրյեի ձևափոխության միջոցով (առանց հիմնավորման) «կկռահենք» (3.1), (3.2) խնդրի լուծման բանաձևը, այնուհետև կանդրադառնանք խնդրի մաթեմատիկական խիստ հեթազորմանը:

**§ 1. Ֆուրյեի ձևափոխության կիրառումը  
ջերմահաղորդականության հավասարման համար  
Կոշիի խնդրի լուծումը սրանալու համար**

Պարզության համար դիֆարկենք համասեռ հավասարման դեպքը.

$$u_t - \Delta_x u = 0, \quad x \in R_n, \quad t > 0, \quad (3.1^0)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_n : \quad (3.2)$$

Եվ այսպես, դիցուք  $u(x, t)$  ֆունկցիան (3.1<sup>0</sup>), (3.2) խնդրի լուծում է: Բազմապարկենք (3.1<sup>0</sup>) նույնության աջ և ձախ մասերը  $e^{-i(x, \xi)}$ -ով, որպեսզի  $\xi$ -ն  $R_n$  փարածության կամայական կետ է, և սրացված հավասարությունը ինտեգրենք  $R_n$ -ով: Կսրանանք

$$\tilde{u}_t(\xi, t) + |\xi|^2 \tilde{u}(\xi, t) = 0, \quad x \in R_n, \quad t > 0, \quad (3.1^0)$$

որպեսզի  $\tilde{u}(\xi, t)$ -ն  $t > 0$  պարամետրից կախված  $u(x, t)$  ֆունկցիայի Ֆուրյեի ձևափոխությունն է ըստ  $x \in R_n$  փոփոխականի.

$$\tilde{u}(\xi, t) = \int_{R_n} u(x, t) e^{-i(x, \xi)} dx :$$

Նույն ձևով, (3.2) սկզբնական պայմանից կսրանանք

$$\tilde{u}_t(\xi, t)|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\xi) : \quad (3.2)$$

Յուրաքանչյուր ֆիքսած  $\xi \in R_n$  դեպքում (3.1<sup>0</sup>), (3.2) խնդիրը  $\tilde{u}(\xi, t)$  ֆունկցիայի համար հանդիսանում է Կոշիի խնդիր հաստատուն գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար, որի լուծումն ունի

$$\tilde{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t} \tilde{\varphi}(\xi), \quad t > 0, \quad \xi \in R_n,$$

տեսքը: Ներկայացնելով, Ֆուրյեի հակադարձ ձևափոխության միջոցով, (3.1<sup>0</sup>), (3.2) խնդրի լուծումը ներկայացվում է

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R_n} \tilde{u}(\xi, t) e^{i(x, \xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2 t} \tilde{\varphi}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2 t} e^{i(x,\xi)} \int_{R_n} \varphi(y) e^{-i(y,\xi)} dy d\xi = \\
&= \int_{R_n} \varphi(y) \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R_n} e^{-|\xi|^2 t} e^{i(x-y,\xi)} d\xi \right) dy = \int_{R_n} K(x-y, t) \varphi(y) dy
\end{aligned}$$

տեսքով, որտեղ

$$K(z, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R_n} e^{i(z,\xi)} e^{-|\xi|^2 t} d\xi, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in R_n, \quad t > 0 :$$

$K(z, t)$  ֆունկցիայի համար տեղի ունի

$$K(z, t) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz_j \xi_j} e^{-\xi_j^2 t} d\xi_j = \prod_{j=1}^n k(z_j, t),$$

հավասարությունը, որտեղ

$$k(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha\xi} e^{-\xi^2 t} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} \cos \alpha\xi d\xi, \quad \alpha \in R_1, \quad t > 0 :$$

Նաշվի առնելով, որ

$$\frac{\partial k}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \sin \alpha\xi e^{-\xi^2 t} d\xi = -\frac{\alpha}{4\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha\xi e^{-\xi^2 t} d\xi = -\frac{\alpha}{2t} k(\alpha, t),$$

կստանանք

$$k(\alpha, t) = e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} k(0, t) :$$

Մյուս կողմից ունենք

$$k(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}},$$

հետևաբար

$$k(\alpha, t) = \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}, \quad \alpha \in R_1, \quad t > 0,$$

$$K(z, t) = \prod_{j=1}^n \frac{e^{-\frac{z_j^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{e^{-\frac{|z|^2}{4t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n}, \quad z \in R_n, \quad t > 0,$$



ուսարի և (3.1<sup>0</sup>), (3.2) խնդրի լուծման համար կարող ենք գրել

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{R_n} K(x - y, t) \varphi(y) dy = \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y) dy, \quad x \in R_n, t > 0 : \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.3) արտահայտությունը կոչվում է *Պուասոնի բանաձև*:

## § 2. Ֆունդամենտալ լուծում: Զերմահաղորդականության հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը

Դիպարկենք

$$U(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & x \in R_n, t > 0, \\ 0, & x \in R_n, t \leq 0, \end{cases}$$

Ֆունկցիան:  $\{0\} = \{x = 0, t = 0\}$  կերում  $U(x, t)$  ֆունկցիան խզվում է, իսկ մնացած բոլոր կետերում բավարարում է ջերմահաղորդականության հավասարմանը: Դժվար չէ ստուգել, որ  $U \in C^\infty (R_{n+1} \setminus \{0\})$ :

**Սահմանում:**  $U(x, t)$  ֆունկցիան կոչվում է *ջերմահաղորդականության հավասարման ֆունդամենտալ լուծում*:

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 3.2.1** Դիցուք  $\varphi \in C(R_n)$  ֆունկցիան սահմանափակ է՝

$$\sup_{x \in R_n} |\varphi(x)| = M < \infty :$$

Այդ դեպքում (3.3) բանաձևով արված ֆունկցիան (3.1<sup>0</sup>), (3.2) խնդրի լուծում է: Այդ լուծումը սահմանափակ է՝

$$\sup_{x \in R_n, t \geq 0} |u(x, t)| \leq M, \quad (3.4)$$

ավելին, տեղի ունեն հերևյալ անհավասարությունները՝

$$\inf_{R_n} \varphi \leq u(x, t) \leq \sup_{R_n} \varphi, \quad x \in R_n, t \geq 0 : \quad (3.4')$$

**Ապացույց:** Վերցնենք կամայական  $R > 0$ ,  $0 < \delta < T < \infty$  և  $Q_{R,\delta,T}$ -ով նշանակենք

$$Q_{R,\delta,T} = \{|x| < R, \delta < t < T\}$$

գլանը: Նախ ապացուցենք, որ (3.3) բանաձևով արված  $u(x, t)$  ֆունկցիան պարկանում է  $C^2(\overline{Q_{R,\delta,T}})$  դասին և  $Q_{R,\delta,T}$ -ում բավարարում է (3.1<sup>0</sup>) հավասարմանը: (3.3) ինտեգրալը ներկայացնենք

$$u(x, t) = I_1(x, t) + I_2(x, t) \quad (3.5)$$

երկու ինտեգրալների գումարի արտքով, որտեղ

$$I_1(x, t) = \int_{|y| \leq 2R} K(x - y, t) \varphi(y) dy,$$

$$I_2(x, t) = \int_{|y| > 2R} K(x - y, t) \varphi(y) dy :$$

Քանի որ  $I_1(x, t)$  ինտեգրալի ենթաինտեգրալային ֆունկցիան և նրա ցանկացած կարգի աճանցյալները ըստ  $x$  և  $t$  փոփոխականների անընդհար են  $\{(x, t) \in \overline{Q_{R,\delta,T}}, |y| \leq 2R\}$  փակ և սահմանափակ բազմության վրա, ապա աճանցման գործողությունը կարելի է արեղափոխել ինտեգրալի նշանի արակ: Ներևար,  $I_1 \in C^\infty(\overline{Q_{R,\delta,T}})$  և  $I_1(x, t)$  ֆունկցիան  $\overline{Q_{R,\delta,T}}$ -ում բավարարում է (3.1<sup>0</sup>) հավասարմանը:

$I_2(x, t)$  ինտեգրալի ենթաինտեգրալային ֆունկցիան և նրա ցանկացած կարգի աճանցյալները ըստ  $x$  և  $t$  փոփոխականների անընդհար են  $\{(x, t) \in \overline{Q_{R,\delta,T}}, |y| > 2R\}$  բազմության վրա: Սակայն  $I_2$ -ում ինտեգրումը կարարվում է  $\{|y| > 2R\}$  անսահմանափակ բազմությունով:  $I_2(x, t)$  ֆունկցիայի համար  $I_1(x, t)$  ֆունկցիայի համապարասխան հարկությունները ապացուցելու

համար բավարար է ցույց տալ, որ  $I_2(x, t)$  ֆունկցիան և նրա ցանկացած կարգի ածանցյալները ըստ  $x$  և  $t$  փոփոխականների  $\{|y| > 2R\}$  բազմության վրա ունեն ինտեգրելի մաժորանտներ, որոնք կախված չեն  $(x, t)$ -ից,  $(x, t) \in \overline{Q}_{R, \delta, T}$ :

Քանի որ  $\{(x, t) \in \overline{Q}_{R, \delta, T}, |y| > 2R\}$  կետերի համար

$$|x - y| \geq |y| - |x| \geq |y| - R,$$

ապա

$$|K(x - y, t)\varphi(y)| \leq \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n} |\varphi(y)| \leq \frac{e^{-\frac{(|y|-R)^2}{4T}}}{(2\sqrt{\pi \delta})^n} M :$$

Աջ մասում գրված ֆունկցիան որոնելի մաժորանտն է.

$$|I_2(x, t)| \leq \int_{|y|>2R} |K(x - y, t)\varphi(y)| dy \leq \frac{M}{(2\sqrt{\pi \delta})^n} \int_{|y|>2R} e^{-\frac{(|y|-R)^2}{4T}} dy < \infty :$$

Նման ձևով կարելի է գտնել մաժորանտներ ածանցյալների համար: Օրինակ, գտնենք մաժորանտ առաջին կարգի ածանցյալների (ըստ  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , և  $t$  փոփոխականների) համար .

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (K(x - y, t)\varphi(y)) \right| &= \left| \frac{-2(x_i - y_i)}{(2\sqrt{\pi t})^n 4t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y) \right| \leq \\ &\leq \frac{|x| + |y|}{(2\sqrt{\pi t})^n 2t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |\varphi(y)| \leq \frac{R + |y|}{(2\sqrt{\pi \delta})^n 2\delta} e^{-\frac{(|y|-R)^2}{4T}} M, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (K(x - y, t)\varphi(y)) \right| \leq \frac{(R + |y|)^2}{(2\sqrt{\pi \delta})^n 4\delta^2} e^{-\frac{(|y|-R)^2}{4T}} M :$$

Այսպիսով,  $I_1(x, t)$  և  $I_2(x, t)$  ֆունկցիաները անվերջ դիֆերենցելի են  $\overline{Q}_{R, \delta, T}$ -ում,  $I_1, I_2 \in C^\infty(\overline{Q}_{R, \delta, T})$ , և  $\overline{Q}_{R, \delta, T}$ -ում բավարարում են (3.1<sup>0</sup>) հավասարմանը: Ներկայացրեք,  $u(x, t)$  ֆունկցիան (ըստ (3.5)) ևս օժտված է նույն հատկություններով: Քանի որ  $R > 0$ ,  $T > 0$ ,  $\delta > 0$  կամայական են, ապա  $u(x, t)$  ֆունկցիան բավարարում է (3.1<sup>0</sup>) հավասարմանը  $\{x \in R_n, t > 0\}$  տիրույթում և  $u \in C^\infty(x \in R_n, t > 0)$ :

Դիցուք  $x \in R_n$  կամայական կետ է,  $\sigma > 0$  կամայական թիվ է: Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} \int_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{\sigma}} dy &= \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_j-y_j)^2}{\sigma}} dy_j = \\ &= \prod_{j=1}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta_j^2} d\eta_j \right) \sqrt{\sigma} = \prod_{j=1}^n (\sqrt{\pi\sigma}) = (\sqrt{\pi\sigma})^n : \end{aligned}$$

Ներկարար, ցանկացած  $x \in R_n$ ,  $t > 0$ ,  $\sigma > 0$  դեպքում

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t\sigma}} dy = \sigma^{n/2} : \quad (3.6)$$

Մասնավորապես, երբ  $\sigma = 1$ ,

$$\int_{R_n} K(x-y, t) dy = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \equiv 1, \quad x \in R_n, t > 0 : \quad (3.7)$$

Այժմ ապացուցենք, որ  $u \in C(x \in R_n, t \geq 0)$  և փեղի ունի (3.2) պայմանը: Դրա համար բավարար է ցույց փակ, որ կամայական  $x^0 \in R_n$  համար

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ (t>0)}} u(x, t) = \varphi(x^0) : \quad (3.8)$$

Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$ : Քանի որ  $\varphi(x)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $x^0$  կետում, ապա գոյություն ունի այնպիսի  $\delta > 0$ , որ

$$|\varphi(y) - \varphi(x^0)| \leq \varepsilon \quad \text{երբ} \quad |y - x^0| \leq \delta :$$

Ունենք

$$\begin{aligned} u(x, t) - \varphi(x^0) &= \int_{R_n} K(x-y, t) (\varphi(y) - \varphi(x^0)) dy = \\ &= \int_{|y-x^0| \leq \delta} K(x-y, t) (\varphi(y) - \varphi(x^0)) dy + \\ &+ \int_{|y-x^0| > \delta} K(x-y, t) (\varphi(y) - \varphi(x^0)) dy = I_{1,\delta} + I_{2,\delta} : \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ըստ (3.7) հավասարության

$$\begin{aligned} |I_{1,\delta}| &\leq \int_{|y-x^0|\leq\delta} K(x-y,t)|\varphi(y)-\varphi(x^0)| dy \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{|y-x^0|\leq\delta} K(x-y,t) dy \leq \varepsilon \int_{R_n} K(x-y,t) dy = \varepsilon \end{aligned} \quad (3.10)$$

Գնահատենք (3.9) ներկայացման երկրորդ գումարելին.

$$\begin{aligned} |I_{2,\delta}| &\leq \int_{|y-x^0|>\delta} K(x-y,t)|\varphi(y)-\varphi(x^0)| dy \leq \\ &\leq \int_{|y-x^0|>\delta} K(x-y,t)(|\varphi(y)|+|\varphi(x^0)|) dy \leq 2M \int_{|y-x^0|>\delta} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}} dy : \end{aligned}$$

Վերցնենք այնպիսի  $x$ , որ

$$|x-x^0| < \frac{\delta}{2} :$$

Այդ դեպքում, երբ  $|y-x^0| > \delta$ ,

$$|x-y| = |(y-x^0) - (x-x^0)| \geq |y-x^0| - |x-x^0| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} :$$

Ըստ (3.6)-ի ունենք

$$\begin{aligned} |I_{2,\delta}| &\leq 2M \int_{|y-x^0|>\delta} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\delta^2}{32t}} dy \leq \\ &\leq 2M e^{-\frac{\delta^2}{32t}} \int_{R_n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n} dy = 2M e^{-\delta^2/32t} 2^{n/2} \rightarrow 0, \quad \text{երբ } t \rightarrow +0 : \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.9), (3.10), (3.11) առնչություններից անմիջապես հետևում է (3.8)

հավասարությունը:

$\{x \in R_n, t > 0\}$  փիրություն  $u(x, t)$  լուծման սահմանափակությունը անմիջապես սրացվում է (3.3) ներկայացումից՝

$$|u(x, t)| \leq \int_{R_n} K(x-y, t) |\varphi(y)| dy \leq M \int_{R_n} K(x-y, t) dy = M,$$

իսկ  $t = 0$  դեպքում փեղի ունի (3.2)-ը, որպեղից հեփևում է (3.4) գնահափականը:

Նման ձևով ափացուցվում են (3.4') անհավասարությունները:

Երբ  $x \in R_n, t > 0$  փեղի ունի

$$\inf_{R_n} \varphi = \int_{R_n} K(x-y, t) \inf_{R_n} \varphi \, dy \leq u(x, t) \leq \int_{R_n} K(x-y, t) \sup_{R_n} \varphi \, dy = \sup_{R_n} \varphi,$$

իսկ  $t = 0$  դեպքում փեղի ունի (3.2)-ը, որպեղից հեփևում է (3.4') գնահափականը:

Թեորեմն ափացուցված է:

### § 3. Լուծման միակությունը: Մաքսիմումի սկզբունքը: Լուծման անընդհափ կախվածությունը սկզբնական ֆունկցիայից

Նշանակենք  $B = B(x \in R_n, t \geq 0)$  բոլոր  $g(x, t)$  ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք որոշված են  $\{x \in R_n, t \geq 0\}$ -ում և սահմանափակ են կամայական  $\{x \in R_n, 0 \leq t \leq T\}$  շերտում՝

ցանկացած  $T > 0$  համար գոյություն ունի այնպիսի  $C(T) > 0$  թիվ, որ

$$|g(x, t)| \leq C(T), \quad \text{երբ } x \in R_n, 0 \leq t \leq T :$$

Տեղի ունի հեփևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 3.3.1**  $B$  բազմությանը պատկանող

$$Lu \equiv u_t - \Delta_x u = f(x, t), \quad x \in R_n, t > 0, \quad (3.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_n, \quad (3.2)$$

խնդրի լուծումը միակն է:

Մինչ թեորեմի ափացույցին անցնելը՝ նշենք միայն, որ (3.1), (3.2) խնդրի լուծման միակությունը կարելի է ափացուցել նաև  $B$  դասից ավելի լայն դասում: Նշանակենք  $B_\alpha$ -ով, որպեղ  $\alpha \geq 0$  ոչբացասական թիվ է, բոլոր  $g(x, t)$  ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք որոշված են  $\{x \in R_n, t \geq 0\}$ -ում և բավարարում են հեփևյալ պայմանին՝

կամայական  $T > 0$  համար գոյություն ունի այնպիսի  $C(T) > 0$ , որ

$$|g(x, t)| \leq C(T)e^{\alpha|x|^2}, \quad \text{երբ } x \in R_n, 0 \leq t \leq T :$$

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը, որը ներկայացնում ենք առանց ապացույցի:

**Թեորեմ 3.3.1'** (3.1), (3.2) խնդրի լուծումը միակն է  $B_\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$ , դասում:

Ակնհայտ է, որ  $B = B_0 \subset B_\alpha$ : Նշենք նաև, որ սահմանափակության պայմանի բացակայության դեպքում (առանց որևէ այլ պայմանի) (3.1), (3.2) խնդրի լուծումը միակը չէ:

**Թեորեմ 3.3.1-ի ապացույց:** Դիցուք  $u_1(x, t)$  և  $u_2(x, t)$  ֆունկցիաները (3.1), (3.2) խնդրի լուծումներ են և պարկանում են  $B$  դասին: Այդ դեպքում  $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  ֆունկցիան

$$Lu \equiv u_t - \Delta_x u = 0, \quad x \in R_n, t > 0, \quad (3.1^0)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \in R_n, \quad (3.2^0)$$

խնդրի լուծում է և պարկանում է  $B$  դասին: Դա նշանակում է, որ ցանկացած  $T > 0$  համար գոյություն ունի այնպիսի  $C(T) > 0$  թիվ, որ

$$|u(x, t)| \leq C(T), \quad x \in R_n, 0 \leq t \leq T : \quad (3.12)$$

Ցույց փանք, որ

$$u(x, t) \equiv 0, \quad x \in R_n, t > 0 : \quad (3.13)$$

(3.13)-ը ապացուցելու համար ֆիքսենք կամայական  $(x^0, t^0) \in \{x \in R_n, t > 0\}$  կետ և ցույց փանք, որ

$$u(x^0, t^0) = 0 : \quad (3.14)$$

Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  և դիփարկենք

$$w_\pm(x, t) = \varepsilon(|x|^2 + (2n + 1)t) \pm u(x, t), \quad x \in R_n, t \geq 0,$$

ֆունկցիաները, որտեղ  $w_+$ -ը համապարասխանում է հավասարության աջ մասում  $+$  նշանին,  $w_-$ -ը համապարասխանում է  $-$  նշանին:  $w_+$  և  $w_-$

Ֆունկցիաները պարկանում են  $C^2(x \in R_n, t > 0) \cap C(x \in R_n, t \geq 0)$  դասին  
և բավարարում են

$$Lw_{\pm} = \varepsilon, \quad x \in R_n, \quad t > 0, \quad (3.15)$$

հավասարմանը:  $w_{\pm}$  Ֆունկցիաները բավարարում են

$$w_{\pm}|_{t=0} = \varepsilon|x|^2, \quad x \in R_n, \quad (3.16)$$

սկզբնական պայմանին: Նամաձայն (3.12)-ի՝ գոյություն ունի այնքան մեծ  $R$ , որ  
 $\{|x| = R, 0 \leq t \leq t^0\}$  գլանային մակերևույթի վրա

$$\begin{aligned} w_{\pm} \Big|_{\substack{|x|=R \\ 0 \leq t \leq t^0}} &= \varepsilon R^2 + (2n+1)t\varepsilon \pm u \Big|_{\substack{|x|=R \\ 0 \leq t \leq t^0}} \geq \\ &\geq \varepsilon R^2 - |u| \Big|_{\substack{|x|=R \\ 0 \leq t \leq t^0}} \geq \varepsilon R^2 - C(t^0) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

(քանի որ  $\varepsilon R^2 - C(t^0) \rightarrow +\infty$ , երբ  $R \rightarrow \infty$ ): Ընդ որում, կարող ենք  
ենթադրել  $R$ -ը այնքան մեծ է, որ  $R > |x^0|$  և  $(x^0, t^0)$  կետը ընկած է  
 $\Omega_{R, t^0} = \{|x| < R, 0 < t < t^0\}$  գլանի վերին հիմքի ներսում: Օգտվենք  
հետևյալ պնդումից, որը հետո կապացուցենք:

**Լեմմա 3.3.1** *Դիցուք  $z(x, t)$  Ֆունկցիան պարկանում է  $C^2(\Omega_R) \cap C(\overline{\Omega}_R)$   
դասին, որտեղ  $\Omega_R = \{|x| < R, 0 < t < \infty\}$ ,  $R > 0$ , և օժտված է հետևյալ  
հատկություններով՝*

1.  $Lz \geq 0$   $\Omega_R$ -ում,
2.  $z|_{t=0} \geq 0$ ,
3.  $z \Big|_{\substack{|x|=R \\ 0 \leq t \leq t^0}} \geq 0$ , որտեղ  $t^0$ -ն որևէ դրական թիվ է:

*Այդ դեպքում*

$$z(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \overline{\Omega}_{R, t^0} = \{|x| \leq R, 0 \leq t \leq t^0\} :$$

Նաշվի առնելով (3.15), (3.16), (3.17) և  $w_{\pm}(x, t)$  Ֆունկցիաների համար  
կիրառելով Լեմմա 3.3.1-ը՝ ստանում ենք, որ  $\overline{\Omega}_{R, t^0}$ -ում  $w_{\pm}(x, t) \geq 0$ , մասնավորա-  
պես  $w_{\pm}(x^0, t^0) \geq 0$ : Ներկարար



$$-\varepsilon (|x^0|^2 + (2n + 1)t^0) \leq u(x^0, t^0) \leq \varepsilon (|x^0|^2 + (2n + 1)t^0),$$

որպեսզի

$$|u(x^0, t^0)| \leq \varepsilon (|x^0|^2 + (2n + 1)t^0) :$$

Քանի որ  $\varepsilon > 0$  կամայական է, ստանում ենք (3.14) հավասարությունը: Թեորեմն ապացուցված է:

**Լեմմա 3.3.1-ի ապացույց:** Կարարենք հակասող ենթադրություն: Ենթադրենք գոյություն ունի այնպիսի  $(x^1, t^1) \in \bar{\Omega}_{R, t^0}$  կետ, որ  $z(x^1, t^1) < 0$ : Դիտարկենք  $v(x, t) = e^{-t}z(x, t)$  ֆունկցիան: Պարզ է, որ

$$v(x^1, t^1) < 0 : \tag{3.18}$$

$v(x, t)$  անընդհատ ֆունկցիան  $\bar{\Omega}_{R, t^0}$  փակ գլանում ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը. գոյություն ունի այնպիսի  $(x^2, t^2) \in \bar{\Omega}_{R, t^0}$  կետ, որ

$$v(x^2, t^2) = \min_{(x,t) \in \bar{\Omega}_{R, t^0}} v(x, t) :$$

Նամաձայն (3.18)-ի՝

$$v(x^2, t^2) < 0 : \tag{3.19}$$

Լեմմայի 2. և 3. պայմանների համաձայն

$$v|_{t=0} = (e^{-t}z)|_{t=0} \geq 0, \quad v|_{\substack{|x|=R \\ 0 \leq t \leq t^0}} = (e^{-t}z)|_{\substack{|x|=R \\ 0 \leq t \leq t^0}} \geq 0,$$

ուստի  $(x^2, t^2)$  կետը չի կարող պարկանել ոչ գլանի  $\{|x| \leq R, t = 0\}$  ստորին հիմքին, ոչ էլ գլանի  $\{|x| = R, 0 \leq t \leq t^0\}$  կողմնային մակերևույթին: Ներկայացրեք  $(x^2, t^2)$  կետը կամ  $\Omega_{R, t^0}$  գլանի ներքին կետ է կամ պարկանում է գլանի վերին հիմքին՝  $|x^2| < R, t^2 = t^0$ : Առաջին դեպքում, երբ  $(x^2, t^2)$ -ը միներնումի կետ է,

$$v(x^2, t^2) < 0, \quad v_t(x^2, t^2) = 0, \quad v_{x_i x_i}(x^2, t^2) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

երկրորդ դեպքում

$$v(x^2, t^2) < 0, \quad v_t(x^2, t^2) \leq 0, \quad v_{x_i x_i}(x^2, t^2) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n :$$

Երկու դեպքում էլ

$$Lz(x^2, t^2) = L(e^t v)(x^2, t^2) = e^t (v + v_t - \Delta_x v) \Big|_{\substack{x=x^2 \\ t=t^2}} < 0,$$

ինչը հակասում է լեմմայի 1. պայմանին: Լեմման ապացուցված է:

Դիցուք  $u(x, t)$  ֆունկցիան պարկանում է  $B$  բազմությանը և  $(3.1^0)$ ,  $(3.2)$  խնդրի լուծում է: Միակության թեորեմից հետևում է, որ այդ լուծումը պետք է հանընկնի  $(3.3)$  Պուասոնի ինտեգրալով փրված լուծման հետ: Ներկայացրեք այն սահմանափակ է ամբողջ  $\{x \in R_n, t > 0\}$  կիսապարածությունում և բավարարում է  $(3.4')$  անհավասարություններին: Այսպիսով, փեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 3.3.2 (Մաքսիմումի սկզբունքը)**  $B$  բազմությանը պարկանող  $(3.1^0)$ ,  $(3.2)$  խնդրի լուծումը բավարարում է  $(3.4')$  անհավասարություններին:

Թեորեմ 3.3.1-ի ապացույցից բխում է, որ ջերմահաղորդականության հավասարման համար Կոչիի խնդրի սահմանափակ լուծումը օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1. Ժամանակի սկզբնական  $t = 0$  պահին լինելով միայն անընդհատ, լուծումը անմիջապես դառնում է անվերջ դիֆերենցելի բոլոր  $t > 0$  համար:

2. Եթե ժամանակի սկզբնական  $t = 0$  պահին լուծումը հավասար է զրոյի ամենուրեք, բացառությամբ որևէ կետի ինչքան ասես փոքր շրջակայքի, որտեղ այն դրական է, ապա ցանկացած  $t > 0$  համար լուծումը դառնում է դրական բոլոր կետերում: Դա նշանակում է, որ  $(3.1)$ ,  $(3.2)$  խնդրով նկարագրվող ջերմության փարածման արագությունը անվերջ է, ինչը, իհարկե, ցույց է տալիս խնդրի ոչ լիարժեք համապարասխանությունը բնության երևույթին: Ջերմության փարածման երևույթների առավել ճշգրիտ նկարագրության համար անհրաժեշտ է դիֆարկել Կոչիի ավելի բարդ խնդիր ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման համար:

**Թեորեմ 3.3.3 (Սկզբնական ֆունկցիայից լուծման անընդհար կախվածության մասին)** Դիցուք  $u_1(x, t)$  և  $u_2(x, t)$  ֆունկցիաները պարկանում են  $B$  բազմությանը և

$$\begin{cases} u_{1t} - \Delta_x u_1 = f(x, t), & x \in R_n, t > 0, \\ u_1|_{t=0} = \varphi_1(x), & x \in R_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2t} - \Delta_x u_2 = f(x, t), & x \in R_n, t > 0, \\ u_2|_{t=0} = \varphi_2(x), & x \in R_n, \end{cases}$$

խնդիրների լուծումներ են: Այդ դեպքում, եթե որևէ  $\varepsilon > 0$  համար

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in R_n,$$

ապա

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon, \quad x \in R_n, t \geq 0: \quad (3.20)$$

**Ապացույց:** Դիտարկենք  $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  փարբերությունը:  $u(x, t)$  ֆունկցիան պարկանում է  $B$  բազմությանը և

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0, & x \in R_n, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in R_n, \end{cases}$$

Կոշիի խնդրի լուծում է, որտեղ  $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ ,  $|\varphi(x)| \leq \varepsilon$ : Վերը շարադրվածից հետևում է, որ  $u(x, t)$  ֆունկցիան սահմանափակ է  $\{x \in R_n, t > 0\}$  կիսաբարածությունում և համաձայն մաքսիմումի սկզբունքի՝ բավարարում է

$$-\varepsilon \leq \inf_{R_n}(\varphi_1 - \varphi_2) = \inf_{R_n} \varphi \leq u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq$$

$$\leq \sup_{R_n} \varphi = \sup_{R_n}(\varphi_1 - \varphi_2) \leq \varepsilon, \quad x \in R_n, t \geq 0,$$

անհավասարություններին, որտեղից հետևում է (3.20) անհավասարությունը: Թեորեմն ապացուցված է:

**Սկզբնական ֆունկցիայից լուծման անընդհատ կախվածության բացակայության օրինակ:** Դիփարկենք Կոշիի հետևյալ խնդիրները («հակադարձ» ջերմահաղորդականության հավասարման համար)

$$(K_0) \quad \begin{cases} u_{0t} + u_{0xx} = 0, & x \in R_1, t > 0, \\ u_0|_{t=0} = 0, & x \in R_1, \end{cases}$$

$$(K_n) \quad \begin{cases} u_{nt} + u_{nxx} = 0, & x \in R_1, t > 0, \\ u_n|_{t=0} = e^{-n} \cos nx, & x \in R_1 : \end{cases}$$

$u_0(x, t) \equiv 0$  և  $u_n(x, t) = e^{-n} e^{n^2 t} \cos nx$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $x \in R_1$ ,  $t \geq 0$ , ֆունկցիաները համապատասխանաբար  $(K_0)$  և  $(K_n)$  խնդիրների լուծումներ են և պարկանում են  $B$  բազմությանը:  $(K_n)$  խնդրում սկզբնական ֆունկցիան (բոլոր ածանցյալների հետ միասին) հավասարաչափ ըստ  $x \in R_1$  ձգվում է գրոյի, երբ  $n \rightarrow \infty$ , այսինքն՝  $(K_0)$  խնդրի սկզբնական ֆունկցիային: Սակայն, օրինակ, երբ  $x = 0$ ,  $u_n(x, t) - u_0(x, t)$  լուծումների փարբերությունը ցանկացած  $t > 0$  համար ձգվում է անվերջի, երբ  $n \rightarrow \infty$ : Իրոք.

$$|u_n(0, t) - u_0(0, t)| = u_n(0, t) = e^{-n} e^{n^2 t} \rightarrow \infty, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty :$$

**Դյուամելի սկզբունքը:** Այժմ ուսումնասիրենք Կոշիի խնդիրը անհամասեռ ջերմահաղորդականության հավասարման համար: Ակնհայտ է, որ բավարար է դիփարկել համասեռ սկզբնական պայմանով դեպքը.

$$u_t - a^2 \Delta_x u = f(x, t), \quad x \in R_n, t > 0, \quad (3.21)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \in R_n : \quad (3.22)$$

Դիփարկենք

$$v_t - a^2 \Delta_x v = 0, \quad x \in R_n, t > \tau \geq 0, \quad (3.23)$$

$$v|_{t=\tau} = f(x, \tau), \quad x \in R_n, \quad (3.24)$$

խնդիրը, որի լուծումը կախված է  $x$ ,  $t$  փոփոխականներից և  $\tau$  պարամետրից.  
 $v = v(x, t, \tau)$ :

Նշենք միայն, որ (3.21), (3.22) խնդիրը, ինչպես և ալիքային հավասարման դեպքում, փոփոխականի համապատասխան փոխարինումով բերվում է  $a = 1$  դեպքին:

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը, որը կոչվում է Դյուամելի սկզբունք:

**Թեորեմ 3.3.4 (Դյուամելի սկզբունքը)** Դիցուք  $v(x, t, \tau)$  ֆունկցիան (3.23),

(3.24) խնդրի լուծում է: Այդ դեպքում

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t, \tau) d\tau \quad (3.25)$$

ֆունկցիան (3.21), (3.22) խնդրի լուծում է:

**Ապացույց:** Ածանցելով  $u(x, t)$  ֆունկցիան ըստ  $t$  փոփոխականի, հաշվի առնելով (3.23) պայմանը՝ ստանում ենք

$$u_t = v(t, x, t) + \int_0^t v_t(x, t, \tau) d\tau = f(x, t) + \int_0^t v_t(x, t, \tau) d\tau : \quad (3.26)$$

Քանի որ ըստ  $x_i$  փոփոխականների ածանցման գործողությունը կարելի է տեղափոխել ինտեգրալի նշանի տակ, ապա

$$\Delta_x u = \Delta_x \int_0^t v(x, t, \tau) d\tau = \int_0^t \Delta_x v(x, t, \tau) d\tau :$$

Ներկայացնելով

$$\begin{aligned} u_t - a^2 \Delta_x u &= f(x, t) + \int_0^t v_t(x, t, \tau) d\tau - a^2 \int_0^t \Delta_x v(x, t, \tau) d\tau = \\ &= f(x, t) + \int_0^t (v_t(x, t, \tau) - a^2 \Delta_x v(x, t, \tau)) d\tau = f(x, t) : \end{aligned}$$

Այսպիսով,  $u$  ֆունկցիան բավարարում է (3.21) հավասարմանը: (3.25) ներկայացումից անմիջապես հետևում է, որ  $u$  ֆունկցիան բավարարում է (3.22) պայմանին: Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով, եթե ունենք համասեռ հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծումը, մենք կարող ենք գրել նաև

$$u_t - a^2 \Delta_x u = f(x, t), \quad x \in R_n, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_n,$$

Կոշիի խնդրի լուծումը: Ենթադրենք  $f(x, \tau)$  ֆունկցիան անընդհատ է և պարկանում է  $B$  բազմությանը, իսկ  $\varphi$  ֆունկցիան անընդհատ է և սահմանափակ: Այդ դեպքում լուծումն ունի

$$u(x, t) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi a^2 t}\right)^n} \int_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y) dy + \\ + \int_0^t d\tau \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}\right)^n} \int_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 (t-\tau)}} f(y, \tau) dy, \quad x \in R_n, \quad t > 0,$$

տեսքը, ընդ որում  $u \in B$ :

#### § 4. Խառը խնդիրը պարաբոլական հավասարման համար

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. գտնել

$$Lu \equiv u_t - u_{xx} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T,$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

եզրային պայմաններին և

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

սկզբնական պայմանին:

Այս խնդիրը կոչվում է առաջին խառը խնդիր ջերմահաղորդականության հավասարման համար: Նշանակենք

$$Q_T = \{0 < x < l, 0 < t < T\}, \quad \Gamma_0 = \{0 < x < l, t = 0\},$$

$$\Gamma_{1,T} = \{x = 0, 0 < t < T\}, \quad \Gamma_{2,T} = \{x = l, 0 < t < T\},$$

$$\Gamma_T = \bar{\Gamma}_T = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_{1,T} \cup \bar{\Gamma}_{2,T} :$$

$\Gamma_T$ -ն կոչվում է  $Q_T$  ուղղանկյան պարաբոլական եզր: Առաջին խառը խնդրի  $u(x, t)$  լուծումը պահպանում է  $C^2(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$  բազմությանը.  $u \in C^2(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ :

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 3.4.1**

$$Lu = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3.26)$$

$$u|_{\Gamma_T} = \varphi, \quad (3.27)$$

առաջին խառը խնդրի լուծումը միակն է:

**Ապացույց:** Դիցուք  $u_1(x, t)$  և  $u_2(x, t)$  ֆունկցիաները միևնույն խառը խնդրի լուծումներ են.

$$\begin{cases} Lu_1 = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u_1|_{\Gamma_T} = \varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lu_2 = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u_2|_{\Gamma_T} = \varphi : \end{cases}$$

Այդ դեպքում  $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  ֆունկցիան

$$\begin{cases} Lv = 0, & (x, t) \in Q_T, \\ v|_{\Gamma_T} = 0, \end{cases}$$

խնդրի լուծում է: Լեմմա 3.3.1-ից հետևում է, որ

$$v(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T : \quad (3.28)$$

Կարարելով նույն դափողությունները  $-v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$  ֆունկցիայի համար՝ կստանանք

$$-v(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T : \quad (3.29)$$

(3.28), (3.29)-ից հետևում է, որ

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիփարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (3.30)$$

$$u|_{\Gamma_T} = \varphi : \quad (3.31)$$

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 3.4.2 (Մաքսիմումի սկզբունքը)** Դիցուք  $u(x, t)$  ֆունկցիան (3.30), (3.31) խնդրի լուծում է: Այդ դեպքում

$$\min_{\Gamma_T} \varphi \leq u(x, t) \leq \max_{\Gamma_T} \varphi, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T : \quad (3.32)$$

**Ապացույց:** Նշանակենք

$$m = \min_{\Gamma_T} \varphi, \quad M = \max_{\Gamma_T} \varphi :$$

Դիփարկենք  $z(x, t) = u(x, t) - m$  ֆունկցիան: Ակնհայտ է, որ  $z(x, t)$  ֆունկցիան բավարարում է (3.30) հավասարմանը և

$$z|_{\Gamma_T} \geq 0 :$$



Ըստ Լեմմա 3.3.1-ի,

$$z(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T,$$

այսինքն՝

$$u(x, t) \geq m, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T :$$

Կարարելով նույն դարձությունները  $M - u(x, t)$  ֆունկցիայի համար՝ կարանանք

$$u(x, t) \leq M, \quad (x, t) \in \overline{Q}_T :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

(3.32) անհավասարություններից բխում է հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 3.4.3 (Մոդուլի մաքսիմումի սկզբունքը)** *Դիցուք  $u(x, t)$  ֆունկցիան (3.30), (3.31) ինդրի լուծում է: Այդ դեպքում*

$$\max_{(x,t) \in \overline{Q}_T} |u(x, t)| \leq \max_{\Gamma_T} |\varphi| : \quad (3.33)$$

Թեորեմ 3.4.3-ից հետևում է (3.30), (3.31) ինդրի լուծման անընդհար կախվածությունը եզրային ֆունկցիայից:

**Թեորեմ 3.4.4 (Եզրային ֆունկցիայից լուծման անընդհար կախվածության մասին)** *Դիցուք  $u_1(x, t)$  և  $u_2(x, t)$  ֆունկցիաները*

$$\begin{cases} u_{1t} - u_{1xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u_1|_{\Gamma_T} = \varphi_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2t} - u_{2xx} = f(x, t), & (x, t) \in Q_T, \\ u_2|_{\Gamma_T} = \varphi_2, \end{cases}$$

*ինդիրների լուծումներ են: Այդ դեպքում, եթե որևէ  $\varepsilon > 0$  համար*

$$|\varphi_1 - \varphi_2|_{\Gamma_T} \leq \varepsilon,$$

ապա

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon, \quad (x, t) \in \overline{Q_T} :$$

**Ապացույց:** Դիֆարկենք  $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$  փարբերությունը:  $u(x, t)$  ֆունկցիան

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x, t) \in Q_T, \\ u|_{\Gamma_T} = \varphi, \end{cases}$$

խնդրի լուծում է, որպեսզ  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ : Նամաձայն Թեորեմ 3.4.3-ի՝ ունենք

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &= |u(x, t)| \leq \max_{(x,t) \in \overline{Q_T}} |u(x, t)| \leq \max_{\Gamma_T} |\varphi| = \\ &= \max_{\Gamma_T} |\varphi_1 - \varphi_2| \leq \varepsilon, \quad (x, t) \in \overline{Q_T} : \end{aligned}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

## § 5. Փոփոխականների անջատման մեթոդը

Ինչպես արդեն նշել ենք նախորդ գլխում, փոփոխականների անջատման կամ Ֆուրյեի մեթոդը մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման հիմնական մեթոդներից է: Այս պարագրաֆում կախարելով նման դարձություններ, ինչպես լարի փարանման հավասարման դեպքում, մենք կշարադրենք Ֆուրյեի մեթոդը ջերմահաղորդականության հավասարման առաջին խառը խնդրի համար  $Q_T = \{0 < x < l, 0 < t < T\}$  փիրույթում:

**Նամասեռ հավասարումներ:** Դիֆարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, 0 < t < T, \quad (3.34)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.35)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l : \quad (3.36)$$

Քանի որ (3.34) հավասարումը գձային է և համասեռ, ապա երկու մասնավոր լուծումների գումարը ևս այդ հավասարման լուծում է: Փորձենք գրնել

(3.34) հավասարման այնպիսի մասնավոր լուծումներ, որոնց գումարը կլինի (3.34), (3.35), (3.36) խնդրի լուծում: Նախ լուծենք հեփելյալ օժանդակ խնդիրը՝

գտնել (3.34) հավասարման այն ոչ փրիվիալ (ոչ նույնաբար զրո) լուծումները, որոնք բավարարում են (3.35) եզրային պայմաններին և ունեն

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (3.37)$$

փեսքը, որպեսզի  $X(x)$  ֆունկցիան կախված է միայն  $x$  փոփոխականից,  $T(t)$  ֆունկցիան կախված է միայն  $t$  փոփոխականից:

Տեղադրելով (3.37) փեսքի  $u(x, t)$  ֆունկցիան (3.34) հավասարման մեջ սպանում ենք

$$X(x)T'(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0,$$

որպեսզի, հաշվի առնելով  $X(x) \neq 0$ ,  $T(t) \neq 0$ , սպանում ենք

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} : \quad (3.38)$$

Քանի որ (3.38) հավասարության ձախ մասը կախված է միայն  $x$ -ից, իսկ աջ մասը՝ միայն  $t$ -ից, ապա (3.38) հավասարության աջ և ձախ մասերը նույնաբար հավասար են միևնույն հաստատունին: Այդ հաստատունը նշանակենք  $-\lambda$ -ով.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda :$$

Այսպեսզի  $X(x)$  և  $T(t)$  ֆունկցիաների համար սպանում ենք

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad 0 < x < l, \quad (3.39)$$

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0, \quad t > 0, \quad (3.40)$$

սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ: (3.35) եզրային պայմաններից ունենք

$$X(0) = X(l) = 0 : \quad (3.41)$$

Այսպիսով,  $X(x)$  ֆունկցիայի համար սպացանք

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad X(0) = X(l) = 0, \quad (3.42)$$

Շարունակ-Լիուվիլի խնդիրը, որն ուսումնասիրել ենք լարի տարանջան հավասարումը լուծելիս և ցույց ենք փակել, որ միայն

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

արժեքների դեպքում (3.42) խնդիրն ունի

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

ոչ զրոյական լուծում, որտեղ  $D_n$ -ը կամայական հաստատուն է:

$\lambda_n$ -ին համապատասխանող (3.40) հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t},$$

որտեղ  $A_n$ -ը կամայական հաստատուն է:

Այսպիսով.

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ֆունկցիաները (3.34) հավասարման մասնավոր լուծումներ են, որոնք բավարարում են (3.35) եզրային պայմաններին և ներկայացվում են երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով: Այդ ֆունկցիաներից մեկը կախված է միայն  $x$  փոփոխականից, մյուսը՝ միայն  $t$  փոփոխականից: Այս լուծումները կարող են բավարարել նախնական խնդրի (3.36) սկզբնական պայմանին միայն մասնավոր  $\varphi$  ֆունկցիաների համար:

Այժմ վերադառնանք (3.34), (3.35), (3.36) ընդհանուր խնդրին: Ենթադրենք  $A_n$  գործակիցները այնպիսին են, որ

$$u(x, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (3.43)$$

շարքը, ինչպես նաև այն շարքերը, որոնք ստացվում են այս շարքը երկու անգամ ըստ  $x$ -ի և մեկ անգամ ըստ  $t$ -ի անդամ առ անդամ ածանցելիս, հավասարաչափ զուգամեր են համապատասխան բազմությունների վրա:

Պարզ է, որ  $u(x, t)$  ֆունկցիան կրավարարի ինչպես (3.35) եզրային պայմաններին, այնպես էլ (3.34) հավասարմանը: (3.36) սկզբնական պայմանից գործնական  $A_n$  գործակիցները: Քանի որ

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.44)$$

ապա  $A_n$  գործակիցները  $\varphi$  ֆունկցիայի ըստ սինուսների շարքի վերլուծության Ֆուրյեի գործակիցներն են (ենթադրվում է, որ  $\varphi$  ֆունկցիան այնպիսին է, որ այն կարելի է վերլուծել ըստ սինուսների Ֆուրյեի շարքի):

$$A_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi : \quad (3.45)$$

Այսպիսով, մենք լուծումը ներկայացրինք (3.43) շարքի տեսքով: Եթե այդ շարքը տարամիպում է, կամ այդ շարքով ներկայացված ֆունկցիան դիֆերենցիալի չէ, ապա, իհարկե, այն չի կարող լինել (3.34) դիֆերենցիալ հավասարման լուծում:

Քանի որ

$$|u_n(x, t)| \leq |A_n|,$$

ապա

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \quad (3.46)$$

թվային շարքը (3.43) ֆունկցիոնալ շարքի համար մաժորանտ է, և (3.46) շարքի զուգամիությունից հետևում է (3.43) շարքի հավասարաչափ զուգամիությունը  $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  բազմության վրա: Նամաձայն Ֆուրյեի շարքերի հայրնի հատկությունների՝ (3.46) շարքի զուգամիության համար բավարար է ենթադրել, որ  $\varphi \in C[0, l]$ , ունի կտրոր առ կտրոր անընդհատ ածանցյալ և տեղի ունի

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0 \quad (3.47)$$

պայմանը:

Ուսումնասիրենք  $u_t(x, t)$  և  $u_{xx}(x, t)$  ֆունկցիաների անընդհատությունը:

Դիփարկենք

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = - \left( \frac{\pi a}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n e^{- \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.48)$$

$$u_{xx}(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = - \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n e^{- \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (3.49)$$

շարքերը: Դիցուք  $|\varphi| \leq M$ : Այդ դեպքում

$$|A_n| = \frac{2}{l} \left| \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \right| \leq 2M,$$

որպետից հեպևում է, որ

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| \leq 2M \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 e^{- \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 t},$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| \leq 2M \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{- \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 t} :$$

Ակնհայտ է, որ ցանկացած  $t_0$ -ի համար, որպետ  $0 < t_0 \leq T$ ,

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| \leq 2M \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 e^{- \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 t_0}, \quad t \geq t_0,$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| \leq 2M \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 e^{- \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 t_0}, \quad t \geq t_0 :$$

Ներևաբար, (3.48), (3.49) շարքերը հավասարաչափ զուգամիպում են  $\{0 \leq x \leq l, t_0 \leq t \leq T\}$  բազմության վրա: Ավելին.

$$\left| \frac{\partial^{k+m} u_n}{\partial x^k \partial t^m} \right| \leq 2M \left( \frac{\pi}{l} \right)^{2m+k} n^{2m+k} a^{2m} e^{- \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 t_0}, \quad t \geq t_0,$$

և (3.43) շարքը կարելի է ցանկացած անգամ աժանցել ըստ  $x$ -ի և ըստ  $t$ -ի և սրացված շարքերը կլինեն հավասարաչափ զուգամետ  $\{0 \leq x \leq l, t_0 \leq t \leq T\}$  բազմության վրա: Քանի որ  $t_0$ -ն կամայական է, ապա  $\{0 < x < l, 0 < t < T\}$

տիրույթում (3.43) շարքը (3.34) հավասարման լուծում է և անվերջ դիֆերենցիալ է: Մենք ապացուցեցինք հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 3.5.1** *Դիցուք  $\varphi$  ֆունկցիան անընդհատ է՝  $\varphi \in C[0, l]$ , ունի կրորդ և երկրորդ անընդհատ ածանցյալ և տեղի ունի (3.47) պայմանը: Այդ դեպքում (3.43) շարքով ներկայացված  $u(x, t)$  ֆունկցիան, որտեղ  $A_n$  գործակիցները որոշվում են (3.45) բանաձևով, (3.34), (3.35), (3.36) խնդրի լուծում է:*

**Անամատեռ հավասարումներ:** Դիֆարկենք

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (3.50)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.51)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l: \quad (3.52)$$

խնդիրը: Ինչպես լարի տատանման հավասարման դեպքում, լուծումը փնտրենք

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (3.53)$$

տեսքով՝  $t$  փոփոխականը դիֆարկելով որպես պարամետր: Նավասարման  $f(x, t)$  աջ մասը ներկայացնենք Ֆուրյեի շարքով.

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi: \quad (3.54)$$

Տեղադրելով (3.53) և (3.54) արտահայտությունները (3.50) հավասարման մեջ՝ ստանում ենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( u_n'(t) + \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 u_n(t) \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

որտեղից

$$u_n'(t) + \left( \frac{\pi a n}{l} \right)^2 u_n(t) = f_n(t), \quad n = 1, 2, \dots: \quad (3.55)$$

$u_n(t)$  ֆունկցիան որոշելու համար ստացանք հասարակագրործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարում: Ըստ (3.52) սկզբնական պայմանի՝

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0,$$

հետևաբար

$$u_n(0) = 0 : \quad (3.56)$$

Լուծելով (3.55) սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը (3.56) գրոյական սկզբնական պայմանով՝ կստանանք

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau : \quad (3.57)$$

Տեղադրելով (3.57) արտահայտությունը (3.53)-ի մեջ՝ ստանում ենք (3.50), (3.51), (3.52) խնդրի լուծումը՝

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi an}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right) \sin \frac{\pi n}{l} x :$$

**Անհամասեռ եզրային պայմաններ:** Դիտարկենք առաջին խառը խնդիրը ջերմահաղորդականության հավասարման համար ընդհանուր դեպքում.

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (a > 0)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0 :$$

Այս խնդիրը լուծելու համար ներմուծենք նոր  $v(x, t)$  անհայտ ֆունկցիա.

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t),$$

որպեսզի ենթադրվում է, որ  $U(x, t)$  ֆունկցիան հայտնի է: Այդ  $v(x, t)$  ֆունկցիան պետք է լինի

$$v_t - a^2 v_{xx} = \tilde{f}(x, t)$$

հավասարման լուծում, որպեսզի  $\tilde{f}(x, t) = f(x, t) - (U_t - a^2 U_{xx})$ , և բավարարի հետևյալ սկզբնական և եզրային պայմաններին՝

$$v(x, 0) = \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0),$$



$$v(0, t) = \tilde{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t),$$

$$v(l, t) = \tilde{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t) :$$

Ընտրենք  $U(x, t)$  ֆունկցիան այնպես, որ

$$\tilde{\mu}_1(t) = \tilde{\mu}_2(t) = 0 :$$

Այդ նպատակով կարող ենք վերցնել (ինչպես լարի տարանման հավասարման դեպքում)

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) :$$

Եվ այսպես,  $u(x, t)$  ֆունկցիայի համար ընդհանուր եզրային պայմաններով խնդիրը բերվեց  $v(x, t)$  ֆունկցիայի համար համասեռ եզրային պայմաններով խնդրին:

## Գլուխ 4

### Էլիպսական փիպի հավասարումներ

#### § 1. Նարմոնիկ ֆունկցիաներ: Լապլասի հավասարման ֆունդամենտալ լուծումը: Գրինի բանաձևերը

Դիցուք  $Q \subset R_n$ ,  $n \geq 1$ , փիրույթ է: Կասենք, որ  $u(x)$ ,  $x \in Q$ , ֆունկցիան հարմոնիկ է  $Q$  փիրույթում, եթե  $u \in C^2(Q)$  և բավարարում է

$$\Delta u \equiv u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} = 0 \quad (4.1)$$

Լապլասի հավասարմանը:

Նշենք, որ գոյություն ունի ֆունկցիա, որը յուրաքանչյուր կետում բավարարում է Լապլասի հավասարմանը, սակայն հարմոնիկ չէ, քանի որ անընդհապ չէ:  $n = 2$  դեպքում այդպիսի ֆունկցիայի օրինակ է

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} \operatorname{Re} \exp\left(-\frac{1}{(x_1 + ix_2)^4}\right), & x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0, & x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases}$$

ֆունկցիան, որը խզվում է  $(0, 0)$  կետում:

$n = 1$  դեպքում  $(a, b) \subset R_1$  միջակայքի վրա որոշված հարմոնիկ ֆունկցիաները  $\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$  հավասարման լուծումներ են և ունեն  $u(x) = c_1 x + c_2$  տեսքը, որտեղ  $c_1$ -ը և  $c_2$ -ը կամայական հաստատվածներ են:

Մեզ հետաքրքրելու է  $n > 1$  դեպքը: Այս դեպքում հարմոնիկ ֆունկցիաների բազմությունը էապես հարուստ է:

Նարմոնիկ ֆունկցիաների փեսության մեջ կարևոր դեր ունեն հարուկ փեսքի հարմոնիկ ֆունկցիաները:

Դիցուք  $\xi$ -ն  $R_n$ ,  $n \geq 2$ , փարածության կամայական կետ է:  $x \in R_n$  կետի հեռավորությունը  $\xi$  կետից նշանակենք  $\rho$ -ով.  $\rho = \rho(x) = |x - \xi|$ : Գտնենք բոլոր  $u(x)$  հարմոնիկ ֆունկցիաները, որոնք կախված են միայն  $\rho(x)$ -ից: Եթե  $u = u(\rho)$ , ապա

$$u_{x_i} = u_{\rho} \rho_{x_i} = u_{\rho} \frac{(x_i - \xi_i)}{\rho},$$

$$u_{x_i x_i} = u_{\rho\rho} \frac{(x_i - \xi_i)^2}{\rho^2} + u_{\rho} \frac{1}{\rho} - u_{\rho} \frac{(x_i - \xi_i)^2}{\rho^3}, \quad i = 1, \dots, n,$$

և

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + (n-1) \frac{u_{\rho}}{\rho} :$$

Ներկայացնելով  $u$ -ը  $u(\rho)$  կախումով հարմոնիկ ֆունկցիաները

$$u''_{\rho\rho} + (n-1) \frac{u'_{\rho}}{\rho} = 0, \quad \rho > 0,$$

սովորական դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներ են:  $n = 2$  դեպքում այդ հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$u(\rho) = c_1 \ln \rho + c_2,$$

իսկ  $n > 2$  դեպքում՝

$$u(\rho) = \frac{c_1}{\rho^{n-2}} + c_2,$$

որտեղ  $c_1$  և  $c_2$  կամայական հաստատվածներ են:

Այսպիսով,  $n = 2$  դեպքում  $c_1 \ln |x - \xi|$  ֆունկցիաները, իսկ  $n > 2$  դեպքում  $\frac{c_1}{|x - \xi|^{n-2}}$  ֆունկցիաները  $R_n \setminus \{\xi\}$  փրոյեկտում հարմոնիկ են:

*Լասպլասի հավասարման ֆունդամենտալ լուծում  $\xi$  կետում եզակիությամբ* կոչվում է

$$U(x - \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x - \xi|, & x \in R_2 \setminus \{\xi\}, \\ \frac{-1}{(n-2)\sigma_n |x - \xi|^{n-2}}, & x \in R_n \setminus \{\xi\}, n > 2, \end{cases}$$

Ֆունկցիան, որպես  $\sigma_n$  միավոր սֆերայի մակերևույթի մակերեսն է  $R_n$ -ում:  
Մասնավորապես,  $n = 3$  դեպքում ֆունկցիաները լուծումն ունի

$$U(x - \xi) = \frac{-1}{4\pi|x - \xi|}, \quad x \in R_3 \setminus \{\xi\},$$

տեսքը:

Օգտվելով Օսթրոգրադսկու բանաձևից՝ դուրս բերենք բանաձևեր, որոնք մենք կօգտագործենք հետագայում:

Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  փարածության սահմանափակ փիրույթ է,  $\partial Q \in C^1$ , և  $u \in C^2(\overline{Q})$ ,  $v \in C^1(\overline{Q})$ : Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} \int_Q v \Delta u \, dx &= \int_Q v \operatorname{div}(\nabla u) \, dx = \int_Q \operatorname{div}(v \nabla u) \, dx - \int_Q \nabla u \nabla v \, dx = \\ &= \int_{\partial Q} (v \nabla u, \nu) \, dS - \int_Q \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\partial Q} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \int_Q \nabla u \nabla v \, dx, \end{aligned}$$

որպես  $\nu$ -ն  $\partial Q$ -ին փարված  $Q$ -ի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալ վեկտորն է: Այսպիսով, մենք սրացանք *Գրինի առաջին բանաձևը*.

$$\int_Q v \Delta u \, dx = \int_{\partial Q} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \int_Q \nabla u \nabla v \, dx : \quad (4.2)$$

Այժմ ենթադրենք  $u, v \in C^2(\overline{Q})$ : (4.2) հավասարության մեջ փոխելով  $u$  և  $v$  ֆունկցիաների դերերը՝ կստանանք

$$\int_Q u \Delta v \, dx = \int_{\partial Q} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS - \int_Q \nabla v \nabla u \, dx :$$

(4.2) հավասարությունից անդամ առ անդամ հանելով սրացված հավասարությունը՝ կստանանք *Գրինի երկրորդ բանաձևը*.

$$\int_Q (v \Delta u - u \Delta v) \, dx = \int_{\partial Q} \left( v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \, dS : \quad (4.3)$$

Սրացված բանաձևերից բխում է հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 4.1.1** Դիցուք  $Q$ -ն սահմանափակ տիրույթ է,  $\partial Q \in C^1$ ,  $u(x)$  ֆունկցիան հարմունիկ է  $Q$ -ում և  $u \in C^2(\overline{Q})$ : Այդ դեպքում

$$\int_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0 :$$

**Ապացույց:** Ապացույցը հետևում է, օրինակ, (4.2) բանաձևից, վերցնելով  $v \equiv 1$ :

## § 2. Պոպենցիալներ: Ողորկ ֆունկցիայի ներկայացումը պոպենցիալների գումարի տեսքով

Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  փարածության սահմանափակ տիրույթ է,  $\partial Q \in C^1$ , և  $u(x)$  ֆունկցիան պարկանում է  $C^2(\overline{Q})$  բազմությանը,  $u \in C^2(\overline{Q})$ :

Պարզության համար ենթադրենք  $n = 3$ :

Վերցնենք կամայական  $\xi \in Q$  և դիփարկենք  $Q_\varepsilon = Q \setminus \{|x - \xi| \leq \varepsilon\}$  տիրույթը, որտեղ  $\varepsilon > 0$  կամայական թիվ է, որը փոքր է  $\xi$  կետի  $\partial Q$  եզրից ունեցած հեռավորությունից.

$$0 < \varepsilon < r(\xi) = \min_{y \in \partial Q} |\xi - y| :$$

Կիրառենք (4.3) բանաձևը  $u(x)$  և  $v(x) = \frac{1}{|x - \xi|}$  ֆունկցիաների համար (ընդհանուր դեպքում որպես  $v(x)$  ֆունկցիա պետք է վերցնել  $\frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}$  ֆունկցիան, երբ  $n \neq 2$ , և  $\ln|x - \xi|$  ֆունկցիան, երբ  $n = 2$ ): Քանի որ  $v(x)$  ֆունկցիան  $Q_\varepsilon$  տիրույթում հարմունիկ է, կստանանք

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varepsilon} \frac{\Delta u}{|x - \xi|} dx &= \int_{\partial Q_\varepsilon} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{|x - \xi|} - u \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x - \xi|} \right) \right) dS_x = \\ &= \int_{|x - \xi| = \varepsilon} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{|x - \xi|} - u \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x - \xi|} \right) \right) dS_x + \\ &+ \int_{\partial Q} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{|x - \xi|} - u \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x - \xi|} \right) \right) dS_x : \end{aligned} \quad (4.4)$$

Նշանակենք  $M = \max_{x \in Q} |\Delta u(x)|$ : Քանի որ

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x-\xi| \leq \varepsilon} \frac{\Delta u}{|x-\xi|} dx \right| &\leq M \int_{|x-\xi| \leq \varepsilon} \frac{dx}{|x-\xi|} = \\ &= M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\varepsilon} r dr = 2M\pi\varepsilon^2, \end{aligned}$$

այսպես

$$\int_{Q_\varepsilon} \frac{\Delta u}{|x-\xi|} dx \rightarrow \int_Q \frac{\Delta u}{|x-\xi|} dx, \quad \text{երբ } \varepsilon \rightarrow 0: \quad (4.5)$$

Նշանակենք  $M_1 = \max_{x \in Q} |\nabla u(x)|$ : Քանի որ

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{dS_x}{|x-\xi|} \right| &\leq \int_{|x-\xi|=\varepsilon} |(\nabla u, \nu)| \frac{dS_x}{|x-\xi|} \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{|x-\xi|=\varepsilon} |\nabla u| dS_x \leq \frac{M_1}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi M_1 \varepsilon, \end{aligned}$$

այսպես

$$\int_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{dS_x}{|x-\xi|} \rightarrow 0 \quad \text{երբ } \varepsilon \rightarrow 0: \quad (4.6)$$

Քանի որ  $\{|x-\xi|=\varepsilon\}$  սֆերայի  $x$  կետում փարված  $Q_\varepsilon$ -ի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալը  $\frac{\xi-x}{\varepsilon}$  վեկտորն է, այսպես այդ սֆերայի վրա

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x-\xi|} \right) = \left( \nabla_x \frac{1}{|x-\xi|}, \frac{\xi-x}{\varepsilon} \right) = - \left( \frac{x-\xi}{|x-\xi|^3}, \frac{\xi-x}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

և

$$\int_{|x-\xi|=\varepsilon} u(x) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x-\xi|} \right) dS_x = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x-\xi|=\varepsilon} u(x) dS_x = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 u(\theta) = 4\pi u(\theta),$$

որտեղ  $\theta \in \{|x-\xi|=\varepsilon\}$ : Ուստի

$$\int_{|x-\xi|=\varepsilon} u(x) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x-\xi|} \right) dS_x \rightarrow 4\pi u(\xi), \quad \text{երբ } \varepsilon \rightarrow 0: \quad (4.7)$$

Անցնելով սահմանի (4.4) հավասարության մեջ, երբ  $\varepsilon \rightarrow 0$ , հաշվի առնելով (4.5), (4.6), (4.7), կստանանք

$$u(\xi) = -\frac{1}{4\pi} \int_Q \frac{\Delta u}{|x - \xi|} dx + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial Q} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{|x - \xi|} - u \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left( \frac{1}{|x - \xi|} \right) \right) dS_x :$$

Հաշվի առնելով, որ  $n = 3$  դեպքում  $\frac{-1}{4\pi|x - \xi|} = U(x - \xi)$ , որպես  $U$ -ն Լապլասի հավասարման ֆունդամենտալ լուծումն է, ստացված հավասարությունը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով.

$$u(\xi) = \int_Q U(x - \xi) \Delta u(x) dx + \int_{\partial Q} \left( u(x) \frac{\partial}{\partial \nu_x} U(x - \xi) - \frac{\partial u}{\partial \nu} U(x - \xi) \right) dS_x :$$

Վերջապես,  $\xi$ -ն փոխարինելով  $x$ -ով,  $x$ -ը փոխարինելով  $y$ -ով՝ ստացված հավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$u(x) = \int_Q U(x - y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial Q} \left( u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} U(x - y) - \frac{\partial u}{\partial \nu} U(x - y) \right) dS_y, \quad x \in Q : \quad (4.8)$$

(4.8) բանաձևը տեղի ունի ցանկացած  $n \geq 2$  չափողականության դեպքում:

$$u_0(x) = \int_Q U(x - y) \rho_0(y) dy, \quad x \in Q, \quad (4.9)$$

ֆունկցիան, որպես  $\rho_0 \in C(\overline{Q})$ , կոչվում է *ծավալային պոտենցիալ*  $\rho_0$  խտություն:

$$u_1(x) = \int_{\partial Q} U(x - y) \rho_1(y) dS_y, \quad x \in Q, \quad (4.10)$$

ֆունկցիան, որպես  $\rho_1 \in C(\partial Q)$ , կոչվում է *պարզ շերտի պոտենցիալ*  $\rho_1$  խտություն:

$$u_2(x) = \int_{\partial Q} \frac{\partial U(x - y)}{\partial \nu_y} \rho_2(y) dS_y, \quad x \in Q, \quad (4.11)$$

Ֆունկցիան, որտեղ  $\rho_2 \in C(\partial Q)$ , կոչվում է *կրկնակի շերտի պոտենցիալ*  $\rho_2$  խտությամբ:

Դժվար չէ նկատել, որ պարզ շերտի և կրկնակի շերտի պոտենցիալները  $Q$  փրոյթում անվերջ դիֆերենցելի և հարմոնիկ ֆունկցիաներ են:

Մենք ապացուցեցինք ( $n = 3$  դեպքում) հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 4.2.1** *Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  տարածության սահմանափակ փրոյթ է,  $\partial Q \in C^1$ : Այդ դեպքում ցանկացած  $u \in C^2(\bar{Q})$  ֆունկցիա ներկայացվում է ծավալային պոտենցիալի ( $\Delta u$  խտությամբ), պարզ շերտի պոտենցիալի ( $-\frac{\partial u}{\partial \nu}$  խտությամբ) և կրկնակի շերտի պոտենցիալի ( $u$  խտությամբ) գումարի տեսքով:*

**Նկատանք:** Եթե թեորեմում հիշատակված  $u(x)$  ֆունկցիան հարմոնիկ է  $Q$  փրոյթում, ապա  $Q$ -ում այն կարող է ներկայացվել պարզ և կրկնակի շերտերի պոտենցիալների գումարի տեսքով:

### § 3. Միջինի մասին թեորեմը

**Թեորեմ 4.3.1 (Մակերևութային միջինի մասին)** *Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  տարածության կամայական փրոյթ է,  $u(x)$  ֆունկցիան հարմոնիկ է  $Q$  փրոյթում,  $x_0 \in Q$  կամայական կետ է: Այդ դեպքում ցանկացած  $R$ -ի համար,  $0 < R < r(x_0)$ , որտեղ  $r(x_0)$ -ն  $x_0$  կետի հեռավորությունն է  $\partial Q$  եզրից, տեղի ունի*

$$u(x_0) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int_{|x_0-y|=R} u(y) dS_y$$

հավասարությունը, որտեղ  $\sigma_n$  միավոր սֆերայի մակերևութի մակերեսն է  $R_n$ -ում:

Այլ խոսքով,  $x_0 \in Q$  կետում հարմոնիկ ֆունկցիայի արժեքը հավասար է  $x_0$  կենտրոնով և  $R$  շառավղով սֆերայի վրա այդ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների միջին թվաբանականին:



**Ապացույց:** Թեորեմի ապացույցը շարադրենք  $n = 3$  դեպքի համար: Քանի որ  $B_R(x^0) = \{|y - x^0| < R\}$  գունդը էապես ընկած է  $Q$  տիրույթի մեջ՝  $B_R(x^0) = \{|y - x^0| < R\} \subseteq Q$ , ապա  $u(x) \in C^2(\overline{B}_R(x^0))$  և կարող ենք կիրառել (4.8) բանաձևը  $u(x)$  ֆունկցիայի համար  $B_R(x^0)$  գնդում.

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|x^0-y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|x-y|} dS_y - \frac{1}{4\pi} \int_{|x^0-y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y, \quad x \in B_R(x^0) :$$

Մասնավորապես, երբ  $x = x^0$ , կստանանք

$$\begin{aligned} u(x^0) &= \frac{1}{4\pi R} \int_{|x^0-y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} dS_y - \frac{1}{4\pi} \int_{|x^0-y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{1}{|x^0-y|} \right) dS_y = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{|x^0-y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{1}{|x^0-y|} \right) dS_y. \end{aligned}$$

քանի որ ըստ Թեորեմ 4.1.1-ի ունենք  $\int_{|x^0-y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} dS_y = 0: \{|x^0-y|=R\}$

սֆերայի  $y$  կետում քարված  $B_R(x^0)$  գնդի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալը  $\frac{y-x^0}{R}$  վեկտորն է: Ներկայացնելով, այդ սֆերայի վրա

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{1}{|x^0-y|} \right) = -\frac{(y-x^0, y-x^0)}{R|x^0-y|^3} = -\frac{1}{R^2}$$

և

$$u(x^0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|x^0-y|=R} u(y) dS_y :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 4.3.1 - ից բխում է հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 4.3.2 (Ծավալային միջինի մասին)** *Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  տարածության կամայական տիրույթ է,  $u(x)$  ֆունկցիան հարմունիկ է  $Q$  տիրույթում,  $x_0 \in Q$  կամայական կետ է: Այդ դեպքում ցանկացած  $R$ -ի համար,  $0 < R < r(x^0)$ ,*

փեղի ունի

$$u(x^0) = \frac{n}{\sigma_n R^n} \int_{|x^0 - y| \leq R} u(y) dy$$

հավասարությունը, որտեղ  $\frac{\sigma_n}{n}$  միավոր գնդի ծավալն է  $R_n$ -ում:

Այլ խոսքով,  $x_0 \in Q$  կետում հարմոնիկ ֆունկցիայի արժեքը հավասար է  $x_0$  կենտրոնով և  $R$  շառավղով գնդում այդ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների միջին թվաքանականին:

**Ապացույց:** Ղիցուք  $n = 3$ : Ըստ Թեորեմ 4.3.1-ի, կամայական  $\rho$ -ի համար,  $0 < \rho < r(x^0)$ ,

$$4\pi\rho^2 u(x^0) = \int_{|x^0 - y| = \rho} u(y) dS_y :$$

Ինտեգրելով այս հավասարությունը ըստ  $\rho$ -ի 0-ից  $R$ , ստանում ենք

$$\frac{4\pi}{3} R^3 u(x^0) = \int_0^R d\rho \int_{|x^0 - y| = \rho} u(y) dS_y = \int_{|x^0 - y| \leq R} u(y) dy :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

#### § 4. Մաքսիմումի սկզբունքը

Կասենք, որ  $Q \subset R_n$  փրոյթում  $u(x)$  անընդհար ֆունկցիան օժտված է միջինի հարկությամբ, եթե ցանկացած  $x_0 \in Q$  կետի համար և ցանկացած  $R > 0$  համար,  $0 < R < r(x^0)$ , փեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$u(x^0) = \frac{n}{\sigma_n R^n} \int_{|x^0 - y| \leq R} u(y) dy : \quad (4.12)$$

Թեորեմ 4.3.2-ից հետևում է, որ հարմոնիկ ֆունկցիաները օժտված են միջինի հարկությամբ: Իրականում այդ հարկությամբ բնութագրվում են բոլոր հարմոնիկ ֆունկցիաները. հետագայում մենք կապացուցենք, որ փեղի ունի նաև միջինի վերաբերյալ հակադարձ թեորեմը:

Միջինի հատկությամբ օժտված ֆունկցիաների համար արդի ունի հետևյալ պնդումը:

**Լեմմա 4.4.1** *Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  տարածության սահմանափակ տիրույթ է,  $u(x)$  ֆունկցիան պատկանում է  $C(\overline{Q})$ -ին և օժտված է միջինի հատկությամբ: Այդ դեպքում կամ*

$$u(x) \equiv \text{const}, \quad x \in Q,$$

կամ

$$\min_{\overline{Q}} u < u(x) < \max_{\overline{Q}} u, \quad x \in Q: \quad (4.13)$$

**Ապացույց:** Նշանակենք  $M = \max_{\overline{Q}} u$ : Ցույց փանք, որ եթե գոյություն ունի այնպիսի  $x^0 \in Q$  կետ, որ  $u(x^0) = M$ , ապա  $u(x) = M, x \in Q$ :

Վերցնենք կամայական  $y \in Q$  կետ և ցույց փանք, որ  $u(y) = M$ : Միացնենք  $y$  և  $x^0$  կետերը  $L = \overline{L}$  վերջավոր բեկյալով, որն ամբողջությամբ ընկած է  $Q$  տիրույթի մեջ:  $L$  բեկյալի և  $\partial Q$  եզրի հեռավորությունը նշանակենք  $d = \min_{\substack{x \in L \\ y \in \partial Q}} |x - y| > 0$  և  $L$  բեկյալը ծածկենք  $B_i = \{|x - x^i| < \frac{d}{2}\}, i = 0, 1, \dots, N$ , վերջավոր քանակի գնդերով, որտեղ  $x^i \in L \cap \partial B_{i-1}, i = 1, \dots, N$ , ընդ որում  $y \in \overline{B}_N$ :

Դիցուք  $n = 3$ : Ըստ (4.12)-ի ունենք

$$u(x^0) = \frac{3}{4\pi(d/2)^3} \int_{B_0} u(x) dx,$$

որը կարելի է արտահայտել

$$\int_{B_0} (u(x^0) - u(x)) dx = 0$$

արտաքով: Քանի որ  $u(x^0) - u(x)$  ենթաինտեգրալային ֆունկցիան անընդհար է  $\overline{B}_0$ -ում և ոչբացասական է, ապա  $\overline{B}_0$ -ում  $u(x^0) - u(x) \equiv 0$ , այսինքն՝  $\overline{B}_0$ -ում  $u(x) \equiv u(x^0) = M$  և, մասնավորապես,  $u(x^1) = M$ :  $x^1$  կետի և  $B_1$  գնդի համար կրկնելով նույն դատողությունները՝ կստանանք, որ  $\overline{B}_1$ -ում  $u(x) \equiv M$ ,

մասնավորապես՝  $u(x^2) = M$ : Կրկին կատարելով նույն դափողությունները՝ արդյունքում կստանանք, որ  $\overline{B}_N$ -ում  $u(x) \equiv M$ , մասնավորապես՝  $u(y) = M$ :

Եվ այսպես, ապացուցեցինք, որ կամ  $Q$ -ում  $u(x) \equiv const$  կամ  $Q$ -ում փեղի ունի (4.13) անհավասարության աջ մասը: Կիրառելով ապացուցված պնդումը  $-u(x)$  ֆունկցիայի նկատմամբ՝ կստանանք, որ կամ  $Q$ -ում  $u(x) \equiv const$  կամ  $Q$ -ում փեղի ունի (4.13) անհավասարության ձախ մասը: Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 4.4.1-ից հետևում է, որ լեմմայի պայմաններին բավարարող և հասարակունից փարբեր  $u(x)$  ֆունկցիան  $Q$  փիրույթի ներսում չի կարող ընդունել այնպիսի արժեքներ, որոնք հավասար են  $\overline{Q}$ -ում այդ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքներին: Ներկաբար, այդպիսի ֆունկցիան իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները ընդունում է  $\partial Q$  եզրի վրա: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Լեմմա 4.4.2** *Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  փարսածության սահմանափակ փիրույթ է,  $u(x)$  ֆունկցիան պատկանում է  $C(\overline{Q})$ -ին և օժտված է միջինի հատկությամբ: Այդ դեպքում կամ*

$$u(x) \equiv const, \quad x \in Q,$$

*կամ*

$$\min_{\partial Q} u < u(x) < \max_{\partial Q} u, \quad x \in Q :$$

Իհարկե, փեղի ունի նաև հետևյալ ավելի թույլ պնդումը:

**Լեմմա 4.4.3** *Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  փարսածության սահմանափակ փիրույթ է,  $u(x)$  ֆունկցիան պատկանում է  $C(\overline{Q})$  և օժտված է միջինի հատկությամբ: Այդ դեպքում*

$$\min_{\partial Q} u \leq u(x) \leq \max_{\partial Q} u, \quad x \in \overline{Q} :$$

Քանի որ  $Q$  փիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիան օժտված է միջինի հատկությամբ, ապա Լեմմա 4.4.2-ից և Լեմմա 4.4.3-ից անմիջապես հետևում են հետևյալ պնդումները:

**Թեորեմ 4.4.1 (Մեծագույն արժեքի սկզբունքը)** Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  տարածության սահմանափակ տիրույթ է,  $u(x)$  ֆունկցիան պարկանում է  $C(\overline{Q})$ -ին և հարմունիկ է: Այդ դեպքում կամ

$$u(x) \equiv \text{const}, \quad x \in Q,$$

կամ

$$\min_{\partial Q} u < u(x) < \max_{\partial Q} u, \quad x \in Q :$$

**Թեորեմ 4.4.2 (Մեծագույն արժեքի թույլ սկզբունքը)** Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  տարածության սահմանափակ տիրույթ է,  $u(x)$  ֆունկցիան պարկանում է  $C(\overline{Q})$  բազմությանը և հարմունիկ է: Այդ դեպքում

$$\min_{\partial Q} u \leq u(x) \leq \max_{\partial Q} u, \quad x \in \overline{Q} :$$

## § 5. Դիրիխլեի խնդիր: Լուծման միակությունը և անընդհար կախվածությունը եզրային ֆունկցիայից

Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  տարածության սահմանափակ տիրույթ է:  $C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$  բազմությանը պարկանող  $u(x)$  ֆունկցիան կոչվում է

$$\Delta u = f(x), \quad x \in Q, \tag{4.14}$$

$$u|_{\partial Q} = \varphi(x), \tag{4.15}$$

Դիրիխլեի խնդրի լուծում ( $f(x)$  և  $\varphi(x)$  արված ֆունկցիաներ են), եթե այն  $Q$  տիրույթում բավարարում է (4.14) հավասարմանը, իսկ  $\partial Q$  եզրի վրա (4.15) եզրային պայմանին: Լուծման սահմանումից ակնհայտորեն հետևում է, որ (4.14), (4.15) խնդրի լուծելիության համար *անհրաժեշտ* է, որ հավասարման աջ մասը և եզրային ֆունկցիան լինեն անընդհար.  $f \in C(Q)$ ,  $\varphi \in C(\partial Q)$ :

Թեորեմ 4.4.2 - ից բխում են հետևյալ երկու պնդումները:

**Թեորեմ 4.5.1 (Միակության թեորեմ)** (4.14), (4.15) *խնդիրը չի կարող ունենալ մեկից ավելի լուծում:*

**Ապացույց:** Ենթադրենք հակառակը: Դիցուք  $u_1(x)$  և  $u_2(x)$  ֆունկցիաները (4.14), (4.15) խնդրի լուծումներ են: Այդ դեպքում  $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$  ֆունկցիան

$$\Delta u = 0, \quad x \in Q,$$

$$u|_{\partial Q} = 0,$$

համասեռ խնդրի լուծում է: Քանի որ  $u \in C(\overline{Q})$  ֆունկցիան հարմոնիկ է  $Q$ -ում և  $\max_{\partial Q} u = \min_{\partial Q} u = 0$ , ապա ըստ Թեորեմ 4.4.2-ի՝  $u(x) \equiv 0, x \in \overline{Q}$ : Թեորեմն ապացուցված է:

**Թեորեմ 4.5.2 (Եզրային ֆունկցիայից լուծման անընդհատ կախվածության մասին)** *Դիցուք  $u_1(x)$  և  $u_2(x)$  ֆունկցիաները*

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f(x), & x \in Q, \\ u_1|_{\partial Q} = \varphi_1(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u_2 = f(x), & x \in Q, \\ u_2|_{\partial Q} = \varphi_2(x), \end{cases}$$

*խնդիրների լուծումներ են: Այդ դեպքում, եթե որևէ  $\varepsilon > 0$  համար*

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in \partial Q, \quad (4.16)$$

*ապա*

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in \overline{Q}: \quad (4.17)$$

**Ապացույց:** Դիտարկենք  $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$  փարբերությունը:  $u(x)$  ֆունկցիան

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in Q, \\ u|_{\partial Q} = \varphi(x), \end{cases}$$

խնդրի լուծում է, որպեսզի  $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ : Ըստ Թեորեմ 4.4.2-ի և (4.16) անհավասարության՝

$$-\varepsilon \leq \min_{\partial Q} \varphi \leq u(x) \leq \max_{\partial Q} \varphi \leq \varepsilon, \quad x \in \overline{Q},$$

որպեսզից հետևում է (4.17): Թեորեմն ապացուցված է:

Մինչև Դիրիխլեի խնդրի լուծման գոյության հարցի ուսումնասիրությանն անցնելը՝ ներկայացնենք Ադամարի օրինակը, որը ցույց է տալիս, որ Կոշիի խնդիրը Լապլասի հավասարման համար դրված է ոչ կոռեկտ, որովհետև բացակայում է լուծման անընդհատ կախվածությունը սկզբնական ֆունկցիաներից:

**Ադամարի օրինակ:** Դիտարկենք Կոշիի հետևյալ խնդիրները Լապլասի հավասարման համար՝

$$(K_0) \begin{cases} u_{0tt} + u_{0xx} = 0, & x \in R_1, t > 0, \\ u_0|_{t=0} = 0, & x \in R_1, \\ u_{0t}|_{t=0} = 0, & x \in R_1, \end{cases}$$

$$(K_n) \begin{cases} u_{ntt} + u_{nxx} = 0, & x \in R_1, t > 0, \\ u_n|_{t=0} = 0, & x \in R_1, \\ u_{nt}|_{t=0} = \frac{1}{n} \sin nx, & x \in R_1: \end{cases}$$

$u_0(x, t) \equiv 0$  և  $u_n(x, t) = \frac{\text{sh } nt}{n^2} \sin nx$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $x \in R_1$ ,  $t \geq 0$ , ֆունկցիաները համապատասխանաբար  $(K_0)$  և  $(K_n)$  խնդիրների լուծումներ են:  $(K_n)$  խնդրում սկզբնական ֆունկցիան հավասարաչափ ըստ  $x \in R_1$  ձգվում է զրոյի, երբ  $n \rightarrow \infty$ , այսինքն՝  $(K_0)$  խնդրի սկզբնական ֆունկցիային: Սակայն, երբ  $x \neq \pi j$ ,  $j = 0, \pm 1, \dots$ ,  $u_n(x, t) - u_0(x, t)$  փարբերությունը չի ձգվում զրոյի, երբ  $n \rightarrow \infty$ :

## § 6. Ողորկ ֆունկցիայի ներկայացումը գնդում:

### Գրինի ֆունկցիան գնդի համար

Դիտարկենք  $n = 3$  դեպքը: Դիցուք  $u \in C^2(|x| \leq R)$ : Այդ դեպքում, ըստ (4.8) ներկայացման, ցանկացած  $x$ ,  $|x| < R$ , կերպի համար փեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|y| \leq R} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy + \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|x-y|} dS_y - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y : \quad (4.18)$$

Վերցնենք կամայական  $\xi$  կերպ, որը չի պատկանում  $\{|x| \leq R\}$  փակ գնդին.  $|\xi| > R$ : Այդ դեպքում փեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{|y| \leq R} \frac{\Delta u(y)}{|\xi-y|} dy + \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|\xi-y|} dS_y - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{1}{|\xi-y|} \right) dS_y : \quad (4.19)$$

Իրոք, (4.19) հավասարությունը սրանալու նպատակով  $\{|y| \leq R\}$  գնդում կիրառենք Գրինի (4.3) երկրորդ բանաձևը  $u(y)$  և  $\frac{-1}{4\pi|\xi-y|}$  ֆունկցիաների համար.

$$\int_{|y| \leq R} \left( u(y) \Delta_y \left( \frac{-1}{4\pi|\xi-y|} \right) + \frac{1}{4\pi|\xi-y|} \Delta u(y) \right) dy = \\ = \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|\xi-y|} dS_y - \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{1}{|\xi-y|} \right) dS_y,$$

և հաշվի առնենք, որ  $\frac{1}{4\pi|\xi-y|}$  ֆունկցիան հարմունիկ է  $\{|y| < R\}$  գնդում:

Բազմապարկենք (4.19) հավասարությունը կամայական  $d(\xi)$  ( $|\xi| > R$ ) անընդհատ ֆունկցիայով և սրացված հավասարությունը անդամ առ անդամ հանենք (4.18) հավասարությունից: Կստանանք, որ ցանկացած  $x$ ,  $|x| < R$ , կերպի



համար փեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{|y| \leq R} \left( \frac{d(\xi)}{|\xi - y|} - \frac{1}{|x - y|} \right) \Delta u(y) dy + \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \left( \frac{1}{|x - y|} - \frac{d(\xi)}{|\xi - y|} \right) dS_y + \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{d(\xi)}{|\xi - y|} - \frac{1}{|x - y|} \right) dS_y : \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Մեր նպատակն է յուրաքանչյուր  $x$ ,  $|x| < R$ , կերի համար գտնել այնպիսի  $\xi$ ,  $|\xi| > R$ , կեր ( $\xi = \xi(x)$ ) և  $d(\xi) = d(\xi(x))$  ֆունկցիա, որ  $\{|y| = R\}$  սֆերայի վրա փեղի ունենա

$$\frac{1}{|x - y|} \equiv \frac{d(\xi)}{|\xi - y|}, \quad |y| = R, \quad (4.21)$$

նույնությունը: Այդ դեպքում (4.20) հավասարության աջ մասի երկրորդ գումարելին հավասար կլինի զրոյի:

Փնտրենք  $\xi = \xi(x)$  կերը

$$\xi = a(x) x$$

փեսքով: Գտնենք  $a(x)$  ֆունկցիան: Ըստ (4.21)-ի ունենք

$$|ax - y|^2 \equiv d^2|x - y|^2, \quad |y| = R,$$

որպեղից

$$(a^2 - d^2)|x|^2 + R^2(1 - d^2) \equiv 2(x, y)(a - d^2), \quad |y| = R :$$

Վերցնելով  $a = d^2$ , կունենանք

$$d^2(d^2 - 1)|x|^2 + R^2(1 - d^2) \equiv 0, \quad |y| = R,$$

$$(d^2 - 1)(d^2|x|^2 - R^2) \equiv 0, \quad |y| = R,$$

որպեղից հետևում է, որ

$$d = \frac{R}{|x|}$$

(համաձայն (4.21) պայմանի  $d > 0$ ): Նկատենք, որ  $d^2 \equiv 1$  դեպքը մեր պահանջներին չի բավարարում, քանի որ այդ դեպքում սրացվում է  $a \equiv 1$ ,  $\xi(x) = x$ , հեղուկարար  $|\xi| = |x| < R$ , ինչը հակասում է մեր այն ենթադրությանը, որ  $|\xi| > R$ : Եվ այսպես, եթե վերցնենք

$$d(\xi(x)) = d(x) = \frac{R}{|x|}, \quad \xi = \frac{R^2}{|x|^2}x$$

(նկատենք, որ այս դեպքում  $|\xi| = \frac{R^2}{|x|^2}|x| = \frac{R^2}{|x|} > R$ ), ապա (4.21) նույնությունը փեղի ունի: Նեղուկարար, ըստ (4.20)-ի, փեղի ունի

$$u(x) = \int_{|y| \leq R} G(x, y) \Delta u(y) dy + \int_{|y|=R} P(x, y) u(y) dS_y \quad (4.22)$$

հավասարությունը, որը

$$\Delta u = f(x), \quad |x| < R, \quad (4.23)$$

$$u|_{|x|=R} = \varphi, \quad (4.24)$$

Գիրիխլեի խնդրի լուծման համար կընդունի հեղուկարար փեղը (այսփեղ ենթադրվում է, որ  $u \in C^2(|x| \leq R)$ )

$$u(x) = \int_{|y| \leq R} G(x, y) f(y) dy + \int_{|y|=R} P(x, y) \varphi(y) dS_y, \quad (4.25)$$

որպեղ

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{1}{|x-y|} + R \left( |x| \left| \frac{R^2}{|x|^2}x - y \right| \right)^{-1} \right], \quad |y| \leq R, \quad |x| < R,$$

$$P(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y), \quad |y| = R, \quad |x| < R : \quad (4.26)$$

$G(x, y)$  ֆունկցիան կոչվում է (4.23), (4.24) խնդրի *Գրիխլե ֆունկցիա*, իսկ  $P(x, y)$  ֆունկցիան կոչվում է (4.23), (4.24) խնդրի *Պուասոնի միջուկ*: Պուասոնի միջուկի համար կարելի է սրանալ, որոշ իմաստով, ավելի պարզ փեղը: Նամաձայն (4.26)-ի և (4.21)-ի,

$$P(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x, y) = \left( \nabla_y G(x, y), \frac{y}{R} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \left( -\nabla_y \frac{1}{|x-y|} + \nabla_y \frac{d}{|\xi-y|}, \frac{y}{R} \right) = \\
&= \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{x-y}{|x-y|^3} + \frac{d(\xi-y)}{|\xi-y|^3}, \frac{y}{R} \right) = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{x-y}{|x-y|^3} + \frac{\xi-y}{d^2|x-y|^3}, \frac{y}{R} \right) = \\
&= \frac{1}{4\pi|x-y|^3} \left( -x+y + \frac{R^2}{|x|^2} \frac{x-y}{R^2} |x|^2, \frac{y}{R} \right) = \\
&= \frac{1}{4\pi|x-y|^3} \left( y \left( 1 - \frac{|x|^2}{R^2} \right), \frac{y}{R} \right) = \\
&= \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R|x-y|^3}, \quad |y| = R, |x| < R : \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Կամայական  $n \geq 2$  դեպքում (4.23), (4.24) խնդրի Գրինի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_n} \left( -\frac{1}{|x-y|^{n-2}} + \frac{\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}}{\left|\frac{R^2}{|x|^2}x-y\right|^{n-2}} \right), & |y| \leq R, |x| < R, \text{ երբ } n > 2, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|x| \left| y - \frac{R^2}{|x|^2}x \right|}{R|x-y|}, & |y| \leq R, |x| < R, \text{ երբ } n = 2, \end{cases}$$

իսկ Պուասոնի միջուկը՝

$$P(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R|x-y|^n}, \quad |y| = R, |x| < R,$$

որտեղ  $\sigma_n$  միավոր սֆերայի մակերևույթի մակերեսն է  $R_n$ -ում:

Մենք ցույց փվեցինք, որ եթե (4.23), (4.24) խնդրի լուծումը գոյություն ունի և պարկանում է  $C^2(|x| \leq R)$  բազմությանը, ապա այդ լուծումն ունի (4.25) տեսքը: Նիշաբակված խնդրի լուծման գոյության վերաբերյալ նշենք միայն, որ

էթե  $f(x)$  և  $\varphi(x)$  ֆունկցիաները բավարարում են որոշակի պայմանների, ապա (4.25) բանաձևով արված  $u(x)$  ֆունկցիան այդ խնդրի լուծում է: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը, որը ներկայացնում ենք առանց ապացույցի:

**Թեորեմ 4.6.1** *Եթե  $f \in C(|x| \leq R) \cap C^1(|x| < R)$ ,  $\varphi \in C(|x| = R)$ , ապա (4.23), (4.24) Գիրիխիլեի խնդրի լուծումը գոյություն ունի և արվում է (4.25) բանաձևով:*

## § 7. Լապլասի հավասարման համար Գիրիխիլեի խնդրի լուծման գոյությունը գնդում

Այս պարագրաֆում կապացուցենք Թեորեմ 4.6.1-ը  $f(x) \equiv 0$  մասնավոր դեպքում: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 4.7.1** *Եթե  $\varphi \in C(|x| = R)$ , ապա*

$$\Delta u = 0, \quad |x| < R, \quad (4.28)$$

$$u|_{|x|=R} = \varphi, \quad (4.29)$$

*Գիրիխիլեի խնդրի լուծումը գոյություն ունի և արվում է*

$$u(x) = \int_{|y|=R} P(x, y) \varphi(y) dS_y, \quad |x| < R, \quad (4.30)$$

*բանաձևով:*

**Ապացույց:** Ապացույցը կարարենք  $n = 3$  դեպքի համար: Նախ ցույց փանք, որ  $u(x)$  ֆունկցիան պարկանում է  $C^2(|x| < R)$  բազմությանը և հարմոնիկ է: (4.27) Պուասոնի միջուկը ներկայացնենք հետևյալ փեսքով՝

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{R^2 - |(x - y) + y|^2}{4\pi R|x - y|^3} = \frac{R^2 - |x - y|^2 - |y|^2 - 2(x - y, y)}{4\pi R|x - y|^3} = \\ &= -\frac{1}{4\pi R|x - y|} - \frac{(x - y, y)}{2\pi R|x - y|^3}, \quad |y| = R, |x| < R : \end{aligned}$$

Քանի որ, երբ  $|y| = R$ ,  $|x| < R$ , փեղի ունի

$$\frac{(x-y, y)}{|x-y|^3} = R \left( \nabla_y \frac{1}{|x-y|}, \frac{y}{R} \right) = R \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right)$$

հավասարությունը (նկատենք, որ  $\nu_y = \frac{y}{R}$ ), ապա

$$P(x, y) = -\frac{1}{4\pi R|x-y|} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right), \quad |y| = R, |x| < R,$$

և (4.30) բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ փեսքով՝

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|} dS_y - \frac{1}{2\pi} \int_{|y|=R} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left( \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y, \quad |x| < R:$$

Սրացված բանաձևը ցույց է փալիս, որ  $u(x)$  ֆունկցիան պարզ շերտի և կրկնակի շերտի պոտենցիալների գումար է: Ներկայումս,  $u$ -ն պարկանում է  $C^\infty(|x| < R)$  բազմությանը և հարմոնիկ է  $\{|x| < R\}$  գնդում:

Այժմ ցույց փանք, որ  $u(x)$  ֆունկցիան պարկանում է  $C(|x| \leq R)$  բազմությանը և բավարարում է (4.29) եզրային պայմանին: Վերցնենք կամայական  $x^0$  կետ,  $|x^0| = R$ , և ցույց փանք, որ

$$u(x) \rightarrow \varphi(x^0), \quad \text{երբ } x \rightarrow x^0, |x| < R: \quad (4.31)$$

Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$ : Քանի որ  $\varphi(x)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $x^0$  կետում, ապա գոյություն ունի այնպիսի  $\delta > 0$ , որ

$$|\varphi(y) - \varphi(x^0)| \leq \varepsilon, \quad \text{երբ } |y - x^0| \leq \delta, |y| = R: \quad (4.32)$$

(4.22) բանաձևից անմիջապես բխում է (կիրառելով այն  $u(x) \equiv 1$ ,  $|x| \leq R$ , ֆունկցիայի համար), որ

$$\int_{|y|=R} P(x, y) dS_y = 1:$$

Ներկայումս,  $u(x) - \varphi(x^0)$  փարբերությունը ( $|x| < R$ ) կարող ենք ներկայացնել հետևյալ փեսքով՝

$$u(x) - \varphi(x^0) = \int_{|y|=R} P(x, y) \varphi(y) dS_y - \int_{|y|=R} P(x, y) \varphi(x^0) dS_y =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{|y|=R} P(x, y) (\varphi(y) - \varphi(x^0)) dS_y = \\
&= \int_{S_1(\delta)} P(x, y) (\varphi(y) - \varphi(x^0)) dS_y + \int_{S_2(\delta)} P(x, y) (\varphi(y) - \varphi(x^0)) dS_y = \\
&= I_1(x) + I_2(x),
\end{aligned}$$

որպեսզ  $S_1(\delta) = \{|y| = R\} \cap \{|y - x^0| \leq \delta\}$ ,  $S_2(\delta) = \{|y| = R\} \cap \{|y - x^0| > \delta\}$ :

Գնահատենք  $I_1(x)$  և  $I_2(x)$  ինտեգրալները: Ըստ (4.32)-ի ունենք

$$\begin{aligned}
|I_1(x)| &\leq \int_{S_1(\delta)} P(x, y) |\varphi(y) - \varphi(x^0)| dS_y \leq \varepsilon \int_{S_1(\delta)} P(x, y) dS_y \leq \\
&\leq \varepsilon \int_{|y|=R} P(x, y) dS_y = \varepsilon, \quad |x| < R
\end{aligned} \tag{4.33}$$

(օգտվեցինք նաև այն փաստից, որ Պուասոնի միջուկը ոչբացասական է):

Նշանակենք  $M = \max_{|x|=R} |\varphi(x)|$ :

$$\begin{aligned}
|I_2(x)| &\leq \int_{S_2(\delta)} P(x, y) |\varphi(y) - \varphi(x^0)| dS_y \leq \\
&\leq 2M \int_{S_2(\delta)} P(x, y) dS_y, \quad |x| < R:
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Վերցնենք  $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$ ,  $|x| < R$ : Եթե  $y \in S_2(\delta)$ , ապա

$$|x - y| = |(y - x^0) - (x - x^0)| \geq |y - x^0| - |x - x^0| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}:$$

(4.34) գնահատականից ստանում ենք

$$\begin{aligned}
|I_2(x)| &\leq 2M \int_{S_2(\delta)} P(x, y) dS_y = 2M \int_{S_2(\delta)} \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R|x - y|^3} dS_y \leq \\
&\leq \frac{M}{2\pi R} \int_{S_2(\delta)} \frac{R^2 - |x|^2}{(\delta/2)^3} dS_y \leq \frac{M(R^2 - |x|^2)}{2\pi R(\delta/2)^3} 4\pi R^2, \quad |x - x^0| < \frac{\delta}{2}, \quad |x| < R:
\end{aligned}$$

Վերցնելով  $x^0$ -ին բավականաչափ մոտ  $x$ ,  $|x| < R$ , կստանանք

$$|I_2(x)| \leq \varepsilon : \quad (4.35)$$

(4.33) և (4.35) գնահատականներից ստանում ենք, որ  $x^0$ -ին բավականաչափ մոտ  $x$ -երի համար ( $|x| < R$ )

$$|u(x) - \varphi(x^0)| \leq |I_1(x)| + |I_2(x)| \leq 2\varepsilon,$$

որպետից հետևում է (4.31)-ը: Թեորեմն ապացուցված է:

Նաջորդ պարագրաֆները նվիրված են ապացուցված թեորեմի որոշ կարևոր կիրառություններին:

## § 8. Միջինի մասին հակադարձ թեորեմը

**Թեորեմ 4.8.1 (Միջինի մասին հակադարձ թեորեմ)** *Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  տարածության կամայական տիրույթ է,  $u(x)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $Q$ -ում և օժտված է միջինի հատկությամբ: Այդ դեպքում  $u(x)$  ֆունկցիան հարմոնիկ է  $Q$ -ում:*

**Ապացույց:** Վերցնենք կամայական  $x^0 \in Q$  կետ և թող  $R > 0$  այնպիսին է, որ  $x^0$  կենտրոնով և  $R$  շառավղով փակ գունդը ընկած է  $Q$  տիրույթում.  $B_R(x^0) = \{|x - x^0| < R\} \Subset Q$ : Քանի որ  $x^0 \in Q$  կետը կամայական է, ապա թեորեմն ապացուցելու համար բավարար է ապացուցել, որ  $u(x)$  ֆունկցիան հարմոնիկ է  $B_R(x^0)$ -ում:  $v(x)$ -ով նշանակենք  $B_R(x^0)$  գնդում

$$\Delta v = 0, \quad x \in B_R(x^0),$$

$$v|_{\partial B_R(x^0)} = u|_{\partial B_R(x^0)},$$

Դիրիխլեի խնդրի լուծումը: Քանի որ  $u|_{\partial B_R(x^0)} \in C(\partial B_R(x^0))$ , ապա ըստ Թեորեմ 4.7.1-ի՝  $v(x)$  լուծումը գոյություն ունի: Դիտարկենք  $u(x) - v(x)$ ,  $x \in \overline{B}_R(x^0)$ , ֆունկցիան: Այս ֆունկցիան պարկանում է  $C(\overline{B}_R(x^0))$  բազմությանը և  $B_R(x^0)$

գնդում օժտված է միջինի հատկությամբ, քանի որ  $u(x)$  ֆունկցիան օժտված է միջինի հատկությամբ՝ ըստ թեորեմի պայմանի, նաև  $v(x)$  ֆունկցիան է օժտված միջինի հատկությամբ, քանի որ հարմոնիկ է: Ըստ Լեմմա 4.4.3-ի՝ փեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները.

$$\min_{\partial B_R(x^0)} (u - v) \leq u(x) - v(x) \leq \max_{\partial B_R(x^0)} (u - v), \quad x \in \overline{B}_R(x^0) :$$

Մյուս կողմից  $(u - v)|_{\partial B_R(x^0)} = 0$ , հետևաբար  $\overline{B}_R(x^0)$ -ում  $u(x) \equiv v(x)$ , այսինքն՝  $u(x)$  ֆունկցիան հարմոնիկ է  $B_R(x^0)$  գնդում: Թեորեմն ապացուցված է:

**Դիփոդություն:** Նկատենք, որ թեորեմի ապացույցի ընթացքում չպահանջվեց Դիրիխլեի խնդրի լուծման բացահայտ փեսքը, այլ պահանջվեց միայն Դիրիխլեի խնդրի լուծման գոյությունը:

**Դիփարկում:** Դիփարկենք Լապլասի օպերատորի (դիցուք  $n = 2$ ) պարզագույն փարբերական մոփարկումը: Բավականաչափ փոքր  $h$ -ի դեպքում

$$\begin{aligned} \Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} &\approx \frac{1}{h^2} [u(x_1 - h, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 + h, x_2)] + \\ &+ \frac{1}{h^2} [u(x_1, x_2 - h) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 + h)] : \end{aligned}$$

Դա նշանակում է, որ  $\Delta u = 0$  Լապլասի հավասարումը փոխարինվում է

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4} [u(x_1 - h, x_2) + u(x_1 + h, x_2) + u(x_1, x_2 - h) + u(x_1, x_2 + h)]$$

հավասարությամբ, որը ոչ այլ ինչ է, քան միջինի հատկության արտահայտություն, որովհետև  $u(x)$  ֆունկցիայի արժեքը  $(x_1, x_2)$  կենտրոնական կետում հավասար է այդ կետի  $(x_1 - h, x_2)$ ,  $(x_1 + h, x_2)$ ,  $(x_1, x_2 - h)$ ,  $(x_1, x_2 + h)$  հարևան չորս կետերում ֆունկցիայի արժեքների միջին թվաբանականին:

## § 9. Վերացնելի եզակիության մասին թեորեմը

**Թեորեմ 4.9.1 (Վերացնելի եզակիության մասին)** Դիցուք  $Q$ -ն  $R_n$  փարածուրյան փիրույթ է,  $x^0 \in Q$  որևէ կետ է, իսկ  $u(x)$  ֆունկցիան հարմոնիկ



է  $Q \setminus \{x^0\}$ -ում: Եթե

$$u(x) = o(U(x - x^0)), \quad \text{երբ } x \rightarrow x^0, \quad (4.36)$$

որպես  $U$ -ն Լապլասի հավասարման ֆունկցիաների լուծումն է, ապա  $u(x)$  ֆունկցիան  $x^0$  կետում կարելի է որոշել այնպես, որ սրացված ֆունկցիան լինի հարմունիկ անբողջ  $Q$  տիրույթում:

$n = 3$  դեպքում (4.36) պայմանն ունի հետևյալ տեսքը,

$$u(x) = o\left(\frac{1}{|x - x^0|}\right), \quad \text{երբ } x \rightarrow x^0, \quad (4.37)$$

իսկ  $n = 2$  դեպքում

$$u(x) = o(\ln|x - x^0|), \quad \text{երբ } x \rightarrow x^0 :$$

**Ապացույց:** Ապացույցը կատարենք  $n = 3$  դեպքի համար: Վերցնենք այնպիսի  $R > 0$ , որ  $x^0$  կենտրոնով և  $R$  շառավղով փակ գունդը ընկած լինի  $Q$  տիրույթում.  $B_R(x^0) = \{|x - x^0| < R\} \Subset Q$ , և դիտարկենք  $u(x)$  ֆունկցիան  $B_R(x^0) \setminus \{x^0\}$ -ում:  $v(x)$ -ով նշանակենք  $B_R(x^0)$  գնդում

$$\Delta v = 0, \quad x \in B_R(x^0),$$

$$v|_{\partial B_R(x^0)} = u|_{\partial B_R(x^0)}, \quad (4.38)$$

Դիրիխլեի խնդրի լուծումը:  $v(x)$  ֆունկցիան գոյություն ունի և պարկանում է  $C(\overline{B_R(x^0)})$ -ին:

Թեորեմն ապացուցելու համար բավարար է ցույց տալ, որ  $u(x)$  և  $v(x)$  ֆունկցիաները համընկնում են իրենց որոշման տիրույթների ընդհանուր մասում՝  $\overline{B_R(x^0)} \setminus \{x^0\}$ -ում, այսինքն՝ կամայական  $x^1 \in B_R(x^0) \setminus \{x^0\}$  կետի համար

$$u(x^1) = v(x^1) : \quad (4.39)$$

Եվ այսպես, դիցուք  $x^1 \in B_R(x^0) \setminus \{x^0\}$  կամայական կետ է: Վերցնենք ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թիվ և  $\{\rho < |x - x^0| < R\}$  տիրույթում, որպես  $0 < \rho < |x^1 - x^0|$ ,

դիտարկենք հետևյալ

$$w_{\pm}(x) = \pm (u(x) - v(x)) + \varepsilon \frac{|x^1 - x^0|}{|x - x^0|}$$

երկու ֆունկցիաները, որտեղ  $w_+$ -ը համապատասխանում է հավասարության աջ մասում  $+$  նշանին,  $w_-$ -ը համապատասխանում է  $-$  նշանին: Անկհայտ է, որ  $w_+(x)$ ,  $w_-(x)$  ֆունկցիաները հարմոնիկ են  $\{\rho < |x - x^0| < R\}$  փրոյոյթում և  $w_{\pm} \in C(\rho \leq |x - x^0| \leq R)$ :

$\{\rho < |x - x^0| < R\}$  փրոյոյթի  $\{|x - x^0| = R\}$  արտաքին եզրի վրա, ըստ (4.38)-ի,

$$w_{\pm}(x)|_{|x-x^0|=R} = \varepsilon \frac{|x^1 - x^0|}{|x - x^0|} > 0 :$$

$\{\rho < |x - x^0| < R\}$  փրոյոյթի  $\{|x - x^0| = \rho\}$  ներքին եզրի վրա, ըստ (4.37)-ի,

$$\begin{aligned} w_{\pm}(x)|_{|x-x^0|=\rho} &= \pm (u(x) - v(x))|_{|x-x^0|=\rho} + \varepsilon \frac{|x^1 - x^0|}{\rho} = \\ &= \varepsilon \frac{|x^1 - x^0|}{\rho} + o\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \text{երբ } \rho \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(քանի որ  $v \in C(\overline{B}_R(x^0))$ , ապա  $v(x) = o\left(\frac{1}{|x - x^0|}\right)$ , երբ  $x \rightarrow x^0$ ):  
Ընտրենք  $\rho$  թիվը ( $\rho < |x^1 - x^0|$ ) այնքան փոքր, որ

$$w_{\pm}(x)|_{\partial\{\rho < |x-x^0| < R\}} > 0 :$$

Այդ դեպքում, համաձայն մեծագույն արժեքի սկզբունքի՝

$$w_{\pm}(x) > 0, \quad \rho \leq |x - x^0| \leq R,$$

մասնավորապես,

$$w_{\pm}(x^1) > 0,$$

որտեղից հետևում է, որ

$$|u(x^1) - v(x^1)| < \varepsilon :$$

Քանի որ  $\varepsilon > 0$  կամայական է, ապա տեղի ունի (4.39) հավասարությունը:

Թեորեմն ապացուցված է:

## § 10. Լիովիլի թեորեմը

Կասենք, որ ամբողջ փարածության մեջ որոշված  $u(x)$  ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից (ներքևից), եթե գոյություն ունի այնպիսի  $M$  հաստատուն, որ

$$u(x) \leq M \quad (u(x) \geq M), \quad x \in R_n :$$

**Թեորեմ 4.10.1 (Լիովիլի թեորեմը)** Ամբողջ  $R_n$  փարածության մեջ որոշված վերևից կամ ներքևից սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիան հաստատուն է:

**Ապացույց:** Դիցուք  $u(x)$  հարմոնիկ ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից (ներքևից): Այդ դեպքում  $M - u(x)$  ֆունկցիան ( $u(x) - M$  ֆունկցիան) հարմոնիկ է և ոչբացասական: Ուստի, Լիովիլի թեորեմը բավարար է ապացուցել միայն մասնավոր դեպքի համար, երբ  $u(x) \geq 0$ : Յույց փանք, որ  $R_n$ -ում ոչբացասական հարմոնիկ ֆունկցիան հաստատուն է:

Դիցուք  $R_n$ -ում հարմոնիկ  $u(x)$  ֆունկցիան ոչբացասական է՝  $u(x) \geq 0$ : Վերցնենք կամայական  $x^0 \in R_n$ ,  $|x^0| \neq 0$ , կերև և ցույց փանք, որ

$$u(x^0) = u(0) : \tag{4.40}$$

Դիցուք  $R > |x^0|$ : Ըստ Թեորեմ 4.7.1-ի ունենք

$$u(x) = \int_{|y|=R} P(x, y) u(y) dS_y, \quad |x| < R,$$

մասնավորապես,

$$u(x^0) = \int_{|y|=R} P(x^0, y) u(y) dS_y :$$

Պարզության համար ենթադրենք  $n = 3$ :

Քանի որ  $\{|y| = R\}$  սֆերայի  $y$  կետերի համար

$$R - |x^0| \leq |x^0 - y| \leq R + |x^0|,$$

ապա

$$\frac{R^2 - |x^0|^2}{4\pi R(R + |x^0|)^3} \leq P(x^0, y) \leq \frac{R^2 - |x^0|^2}{4\pi R(R - |x^0|)^3} :$$

Մրացված անհավասարությունները բազմապարկելով  $u(y)$ -ով ( $u(y) \geq 0$ ) և ինտեգրելով  $\{|y| = R\}$  սֆերայով կստանանք

$$\frac{R^2 - |x^0|^2}{4\pi R(R + |x^0|)^3} \int_{|y|=R} u(y) dS_y \leq u(x^0) \leq \frac{R^2 - |x^0|^2}{4\pi R(R - |x^0|)^3} \int_{|y|=R} u(y) dS_y,$$

որպետից

$$\frac{R(R^2 - |x^0|^2)}{(R + |x^0|)^3} u(0) \leq u(x^0) \leq \frac{R(R^2 - |x^0|^2)}{(R - |x^0|)^3} u(0) :$$

Մրացված անհավասարությունները փոփոխելով  $R > |x^0|$  համար: Անցնելով սահմանի, երբ  $R \rightarrow \infty$ , կստանանք (4.40) հավասարությունը: Թեորեմն ապացուցված է:

## § 11. Նեյմանի խնդիրը Լապլասի հավասարման համար գնդում

Այս պարագրաֆում կդիտարկենք Լապլասի հավասարման համար ևս մեկ եզրային խնդիր՝ Նեյմանի խնդիրը (կամ երկրորդ եզրային խնդիրը): Մենք այն կուսումնասիրենք միայն այն դեպքում, երբ փորույթը գունդ է: Այդ խնդիրը հեքսյան է.

$$\Delta u = 0, \quad |x| < R, \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{|x|=R} = f, \quad (4.42)$$

որպետ  $\nu$ -ն  $\{|x| = R\}$  սֆերային փարված  $\{|x| < R\}$  գնդի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալն է: Քանի որ կամայական  $0 < \rho \leq R$  համար  $\{|x| = \rho\}$  սֆերայի վրա  $\nu = \frac{x}{\rho}$ , ապա

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{|x|=\rho} = \frac{1}{\rho} (\nabla u, x) \Big|_{|x|=\rho} = u_r \Big|_{|x|=\rho},$$

մասնավորապես,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{|x|=R} = \frac{1}{R} (\nabla u, x) \Big|_{|x|=R} = u_r \Big|_{|x|=R} : \quad (4.43)$$

Կատենք, որ  $u(x)$  ֆունկցիան (4.41), (4.42) Նեյմանի խնդրի լուծում է, եթե

$$u \in C^2(|x| < R) \cap C(|x| \leq R) \cap \{(\nabla u, x) \in C(|x| \leq R)\}, \quad (4.44)$$

բավարարում է (4.41) հավասարմանը և (4.42) եզրային պայմանին:

Ակնհայտ է, որ լուծման գոյության համար *անհրաժեշտ* է, որ

$$f \in C(|x| = R) : \quad (4.45)$$

Բացի այդ, ըստ Թեորեմ 4.1.1-ի, ցանկացած  $\rho < R$  համար փեղի ունի

$$\int_{|x|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \int_{|x|=\rho} \frac{1}{\rho} (\nabla u, x) dS = 0$$

հավասարությունը: Քանի որ  $(\nabla u, x)$ -ը անընդհատ է  $\{|x| \leq R\}$  գնդում և փեղի ունի (4.42) եզրային պայմանը, ապա վերջին հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ  $\rho \rightarrow R$ , կստանանք լուծման գոյության համար ևս մեկ անհրաժեշտ պայման՝

$$\int_{|x|=R} f dS = 0 : \quad (4.46)$$

Ներագայում ցույց կտանք, որ (4.45) և (4.46) պայմանները Նեյմանի խնդրի լուծման գոյության համար ոչ միայն անհրաժեշտ են, այլ նաև բավարար են:

Նախ անդրադառնանք Նեյմանի խնդրի լուծման միակության հարցին: Ակնհայտ է, որ Նեյմանի խնդրի լուծումը միակը չէ, քանի որ եթե  $u(x)$ -ը լուծում է, ապա  $u(x) + C$  ֆունկցիան ևս նույն խնդրի լուծում է, որտեղ  $C$ -ն ցանկացած հաստատուն է: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 4.11.1 (Լուծման ընդհանուր փեքի մասին)** *Եթե  $u_1(x)$  և  $u_2(x)$  ֆունկցիաները միևնույն Նեյմանի խնդրի լուծումներ են, ապա գոյություն ունի այնպիսի  $C$  հաստատուն, որ*

$$u_1(x) = u_2(x) + C, \quad |x| < R,$$

*այլ խոսքով, Նեյմանի խնդրի լուծումը միակն է հաստատուն գումարելիի ձգտությամբ:*

**Ապացույց:** Եթե  $u_1(x)$  և  $u_2(x)$  ֆունկցիաները միևնույն Նեյմանի խնդրի լուծումներ են, ապա  $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$  ֆունկցիան

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad |x| < R, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{|x|=R} &= 0, \end{aligned} \quad (4.47)$$

համասեռ պայմաններով Նեյմանի խնդրի լուծում է: Ցույց փանք, որ

$$u(x) \equiv C, \quad |x| < R: \quad (4.48)$$

Քանի որ ցանկացած  $\rho < R$  դեպքում  $u \in C^2(|x| \leq \rho)$ , ապա ըստ Գրինի առաջին բանաձևի

$$\int_{|x| \leq \rho} u \Delta u \, dx = \int_{|x|=\rho} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \int_{|x| \leq \rho} \nabla u \nabla u \, dx,$$

որպեղից սպանում ենք

$$\frac{1}{\rho} \int_{|x|=\rho} u(x)(\nabla u, x) \, dS = \int_{|x| \leq \rho} |\nabla u|^2 \, dx, \quad \rho < R:$$

Քանի որ  $u(x)$  և  $(\nabla u, x)$  ֆունկցիաները պարկանում են  $C(|x| \leq R)$  բազմությամբ, ապա ըստ (4.47) պայմանի

$$\lim_{\rho \rightarrow R} \frac{1}{\rho} \int_{|x|=\rho} u(x)(\nabla u, x) \, dS = \frac{1}{R} \int_{|x|=R} u(x)(\nabla u, x) \, dS = 0,$$

որպեղից հեքևում է

$$\lim_{\rho \rightarrow R} \int_{|x| \leq \rho} |\nabla u|^2 \, dx = 0: \quad (4.49)$$

(4.49) հավասարությունը կարող է փեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ

$$\int_{|x| \leq \rho} |\nabla u|^2 \, dx = 0 \quad \text{ցանկացած } \rho < R \text{ համար:} \quad (4.50)$$

(4.50)-ից հեքևում է, որ  $|\nabla u(x)| \equiv 0, |x| < R$ , և փեղի ունի (4.48)-ը: Թեորեմն ապացուցված է:

Այժմ անդրադառնանք (4.41), (4.42) Նեյմանի խնդրի լուծման գոյությանը:  
Նշանակենք  $v(x)$ -ով

$$\Delta v = 0, \quad |x| < R, \quad (4.51)$$

$$v \Big|_{|x|=R} = f, \quad (4.52)$$

Դիրիխլեի խնդրի լուծումը: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

**Թեորեմ 4.11.2 (Գոյության մասին)** Դիցուք  $v$ -ը  $n$ -ը (4.45) և (4.46) պայմանները: Այդ դեպքում (4.41), (4.42) Նեյմանի խնդրի լուծումը գոյություն ունի և տրվում է

$$u(x) = R \int_0^1 \frac{v(x \cdot t)}{t} dt + const, \quad |x| < R, \quad (4.53)$$

բանաձևով, որտեղ  $v(x)$  ֆունկցիան (4.51), (4.52) Դիրիխլեի խնդրի լուծումն է:

**Ապացույց:** (4.45) պայմանից հետևում է, որ (4.51), (4.52) Դիրիխլեի խնդրի  $v(x)$  լուծումը գոյություն ունի: (4.46) պայմանից հետևում է, որ

$$v(0) = 0 :$$

Իրոք (ենթադրենք  $n = 3$ ), ըստ մակերևութային միջինի մասին թեորեմի, ցանկացած  $\rho < R$  դեպքում

$$v(0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{|x|=\rho} v(x) dS = \lim_{\rho \rightarrow R} \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{|x|=\rho} v(x) dS = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|x|=R} f dS = 0 :$$

$v(x)$  ֆունկցիան պարկանում է  $C^2(|x| < R)$ -ին և ըստ Թեյլորի բանաձևի

$$v(x) = v(0) + (\nabla v(0), x) + o(|x|^2) = \sum_{i=1}^n C_i x_i + o(|x|^2),$$

որտեղ  $C_i = \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

Ներկայացնենք

$$\frac{v(x \cdot t)}{t} = \sum_{i=1}^n C_i x_i + o(|x|^2 t)$$

և  $t = 0$  դեպքում (4.53) ենթաինքնագրալային արտահայտությունը եզակիություն չունի: Նկատենք, որ եթե  $\{|x| \leq \rho\}$  գնդի  $x$  կետերի համար դիֆարկենք  $y = xt$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , կետերը, ապա  $y$  կետերը կփոխվեն նույն  $\{|y| \leq \rho\}$  գնդում.  $|y| = |x \cdot t| = |x|t \leq \rho t \leq \rho$ : Որպես (4.51), (4.52) Դիրիխլեի խնդրի լուծում՝  $v(x)$  ֆունկցիան պարկանում է  $C(|x| \leq R)$ -ին, հետևաբար (4.53) բանաձևով ստացված  $u(x)$  ֆունկցիան ևս պարկանում է  $C(|x| \leq R)$ -ին: Բացի այդ, ցանկացած  $\rho < R$  համար  $v \in C^2(|x| \leq \rho)$  և

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{v(xt)}{t} \right) = \frac{1}{t} \frac{\partial v(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=xt} \cdot t = \frac{\partial v(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=xt},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{v(xt)}{t} \right) = \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_i \partial y_j} \Big|_{y=xt} \cdot t, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

հետևաբար, (4.53) բանաձևով ստացված  $u(x)$  ֆունկցիան ևս պարկանում է  $C^2(|x| \leq \rho)$ -ին և

$$\Delta u(x) = R \int_0^1 \Delta_y v(y) \Big|_{y=xt} \cdot t \, dt \equiv 0, \quad |x| \leq \rho :$$

Այսպիսով,  $u(x)$  ֆունկցիան պարկանում է  $C^2(|x| < R) \cap C(|x| \leq R)$  բազմությունը և հարմունիկ է  $\{|x| < R\}$  գնդում:

Այժմ ցույց տանք, որ  $(\nabla u, x)$  ֆունկցիան պարկանում է  $C(|x| \leq R)$ -ին և փեղի ունի (4.42) եզրային պայմանը: (4.53) բանաձևը գրենք սֆերիկ կոորդինատական համակարգում: Եթե  $x = (x_1, x_2, x_3) = (r, \varphi, \theta)$ , ապա  $y = xt$  կետի սֆերիկ կոորդինատները կլինի  $(rt, \varphi, \theta)$ : Ուստի, սֆերիկ կոորդինատական համակարգում (4.53) բանաձևը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$u(r, \varphi, \theta) = R \int_0^1 \frac{v(rt, \varphi, \theta)}{t} \, dt + const = R \int_0^r \frac{v(\rho, \varphi, \theta)}{\rho} \, d\rho + const : \quad (4.54)$$

Քանի որ  $v \in C(|x| \leq R)$ , ապա, համաձայն (4.54) բանաձևի,  $ru_r(\rho, \varphi, \theta)$  ֆունկցիան պարկանում է  $C(|x| \leq R)$ -ին,  $ru_r(\rho, \varphi, \theta) \in C(|x| \leq R)$ : Ներկայացնելով,  $(\nabla u, x) \in C(|x| \leq R)$  ( $ru_r(\rho, \varphi, \theta) = (\nabla u, x)$ ) և փեղի ունի (4.42) եզրային պայ-



մանր.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{|x|=R} = u_r \Big|_{|x|=R} = \frac{Rv}{\rho} \Big|_{\rho=R} = v \Big|_{|x|=R} = f :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

## Չրախնդրում

1. **В . П . М и х а й л о в**, *Лекции по уравнениям математической физики*, Учеб. пособие для вузов, М.: Издательство физико-математической литературы, 2001
2. **В . П . М и х а й л о в**, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, М.: Наука, 1983
3. **А . Н . Т и х о н о в**, **А . А . С а м а р с к и й**, *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 1977
4. **И . Г . П е т р о в с к и й**, *Лекции об уравнениях с частными производными*, М.: Наука, 1970
5. **В . С . В л а д и м и р о в**, *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 1988
6. **В . П . М и х а й л о в**, **А . К . Г у щ и н**, *Дополнительные главы курса "Уравнения математической физики"*, Лекционные курсы НОЦ, Вып. 7, М.: МИАН, 2007
7. **Л . Д . К у д р я в ц е в**, *Основы математического анализа*, Т. 1-3, М.: Высшая школа, 1988
8. **Г . М . Ф и х т е н г о л ь ц**, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Т. 1-3, М.: Наука, 1970
9. **А . М . М а л ь ц е в**, *Основы линейной алгебры*, М.: Наука, 1975
10. **Л . С . П о н т р я г и н**, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, М.: Наука, 1982
11. **Բ . Գ . Մ ր ա ր ք յ ա ն**, **Ա . Ն . Ն ր զ Ի ա ն Ի ս Կ ա ն**, **Ռ . Լ . Շ ա Ի - ր ա ղ յ ա ն**, *Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հիմնարկներ*, ԵՊՏ, 1988

Վահրամ Ժորայի Դումանյան

Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ

Ստորագրված է 17.02.2017, Տպագրության եղանակը՝

մամուլ հրատ.մամուլ՝

Տպաքանակ՝ 250

Տպարանի հասցե