ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վ. Ժ. ԴՈՒՄԱՆՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ

ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

2017

ԵՐԵՎԱՆ

Բովանդակություն

Ներածություն

Դիֆերենցիալ հավասարումներ կոչվում են այն հավասարումները, որոնցում անհայտները մեկ կամ մի քանի փոփոխականներից կախված ֆունկցիաներ են, ընդ որում հավասարումների մեջ մասնակցում են ինչպես անհայտ ֆունկցիաները, այնպես էլ նրանց ածանցյալները: Եթե անհայտ ֆունկցիաները կախված են մեկ փոփոխականից, ապա հավասարումները կոչվում են սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ, իսկ եթե անհայտ ֆունկցիաները կախված են մի քանի (երկու կամ ավելի) փոփոխականներից, ապա հավասարումները կոչվում են մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումներ: Հավասարման մեջ մասնակցող որոնելի ֆունկցիայի ածանցյալի մաքսիմալ կարգը կոչվում է հավասարման կարգ:

Դասագրքում ուսումնասիրվում են միայն երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումները:

Ներմուծենք որոշ նշանակումներ: R_n-ով նշանակենք n-չափանի Էվկլիդեսյան տարածությունը, $x = (x_1, ..., x_n)$-ով նշանակենք R_n տարածության կետը, $|x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$: R_n տարածության տիրույթ կամ n-չափանի տիրույթ ասելով կհասկանանք R_n տարածության կետերի բաց և կապակցված բազմություն (ոչ դատարկ):

Դիցուք Q-ն n-չափանի տիրույթ է: $E \subset Q$ բազմությունը կոչվում է Q-ի համար *խիստ ներքին*, եթե $\overline{E} \subset Q$, որտեղ $\overline{E}$-ով նշանակված է E բազմության փակումը R_n տարածության մետրիկայով:

$C^k(Q)$-ով նշանակենք Q տիրույթում մինչև k-րդ կարգը ներառյալ անընդհատ մասնական ածանցյալներ ունեցող բոլոր ֆունկցիաների բազմությունը, որտեղ k-ն ոչբացասական ամբողջ թիվ է:

$C^k(\overline{Q})$-ով նշանակենք $C^k(Q)$ բազմության ենթաբազմությունը, որը բաղկացած է բոլոր այն ֆունկցիաներից, որոնց մինչև k-րդ կարգը ներառյալ մասնական ածանցյալները անընդհատ են $\overline{Q}$-ում:

$C^0(Q)$ և $C^0(\overline{Q})$ բազմությունների համար, որոնք համապատասխանաբար Q-ում և $\overline{Q}$-ում անընդհատ ֆունկցիաների բազմություններն են, կօգտագործենք նաև $C(Q)$ և $C(\overline{Q})$ նշանակումները:

$C^\infty(Q)$-ով նշանակենք այն ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք պատկանում են բոլոր $C^k(Q)$, $k = 0, 1, ...$, բազմություններին՝ $C^\infty(Q) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(Q)$:

$C^\infty(\overline{Q})$-ով նշանակենք այն ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք պատկանում են բոլոր $C^k(\overline{Q})$, $k = 0, 1, ...$, բազմություններին՝ $C^\infty(\overline{Q}) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{Q})$:

$f(x)$ ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալների համար կօգտագործենք նաև f_{x_i}, $f_{x_i x_j}$ նշանակումները.

$$f_{x_i} \equiv \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad f_{x_i x_j} \equiv \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} :$$

$f \in C^1(Q)$ ֆունկցիայի $(f_{x_1}, ..., f_{x_n})$ գրադիենտը կնշանակենք ∇f:

$(n-1)$-չափանի S փակ մակերևույթ ասելով՝ կհասկանանք C^k, $k \geq 1$, դասի առանց եզրի $(n-1)$-չափանի սահմանափակ փակ մակերևույթ, այսինքն՝ R_n-ում ընկած կապակցված սահմանափակ փակ մակերևույթ ($S = \overline{S}$), որն օժտված է հետևյալ հատկությամբ.

ցանկացած $x^0 \in S$ կետի համար գոյություն ունի այդ կետի U_{x^0} շրջակայք (n-չափանի) և $C^k(U_{x^0})$-ին պատկանող այնպիսի $F_{x^0}(x)$ ֆունկցիա, ընդ որում $\nabla F_{x^0}(x^0) \neq 0$, որ $S \cap U_{x^0}$ բազմությունը նկարագրվում է $F_{x^0}(x) = 0$ հավասարումով ($S \cap U_{x^0}$ բազմության բոլոր կետերը բավարարում են $F_{x^0}(x) = 0$ հավասարմանը, և U_{x^0}-ին պատկանող ցանկացած կետ, որը բավարարում է $F_{x^0}(x) = 0$ հավասարմանը, պատկանում է S-ին):

Q տիրույթի եզրը կնշանակենք ∂Q-ով: Այսուհետ կենթադրենք, եթե հակառակը հատուկ չնշվի, որ դիտարկվող տիրույթների եզրերը բաղկացած են վերջավոր թվով իրար հետ չհատվող $(n-1)$-չափանի C^1 դասի փակ մակերևույթներից: Նկատենք, որ եթե S փակ մակերևույթը պատկանում է C^k դասին, ապա այդ մակերևույթի ցանկացած $x^0 \in S$ կետի համար գոյություն ունի այդ կետի այնքան փոքր U'_{x^0} շրջակայք, որ $S \cap U'_{x^0}$ հատումը միարժեքորեն պրոյեկտվում է կոորդինատական հարթություններից մեկում ընկած C^k դասին պատկանող եզր ունեցող որևէ $(n-1)$-չափանի D_{x^0} տիրույթի վրա. գոյություն ունի այնպիսի i, $i = 1, ..., n$, որ այդ հատումը նկարագրվում է

$$x_i = \varphi_{x^0}(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n), \quad (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in D_{x^0},$$

հավասարումով և $\varphi_{x^0} \in C^k(\overline{D}_{x^0})$: $S \cap U'_{x^0}$ հատումը կանվանենք S մակերևույթի *պարզ կտոր (*կամ *կտոր)*:

Քանի որ S մակերևույթը սահմանափակ է և փակ, ապա $\{U_x, x \in S\}$ ծածկույթից կարելի է ընտրել վերջավոր ենթածածկույթ: Այդպիսի վերջավոր ենթածածկույթին համապատասխանող $S_1, ..., S_N$ պարզ կտորների համախումբը կանվանենք S մակերևույթի պարզ կտորներով ծածկույթ:

$(n-1)$-չափանի C^k, $k \geq 1$, դասի S մակերևույթ ասելով՝ կհասկանանք կապակցված մակերևույթ, որը կարելի է այնպես ծածկել վերջավոր թվով U_i, $i = 1, ..., N$, տիրույթներով (n-չափանի), որ $S_i = S \cap U_i$, $i = 1, ..., N$, բազմություններից յուրաքանչյուրը միարժեքորեն պրոյեկտվում է կոորդինատական հարթություններից մեկում ընկած C^k դասին պատկանող եզրով որևէ $(n-1)$-չափանի D_i տիրույթի վրա. որևէ p-ի համար, $p = p(i)$, $1 \leq p \leq n$, այդ հատումը նկարագրվում է

$$x_p = \varphi_i(x_1, ..., x_{p-1}, x_{p+1}, ..., x_n), \quad (x_1, ..., x_{p-1}, x_{p+1}, ..., x_n) \in D_i,$$

հավասարումով և $\varphi_i \in C^k(\overline{D_i})$: S մակերևույթի $U_1, ..., U_N$ ծածկույթին համապատասխանող S_i, $i = 1, ..., N$, պարզ կտորների համախումբը կանվանենք S մակերևույթի պարզ կտորներով ծածկույթ: Այսուհետ $(n-1)$-չափանի մակերևույթ ասելով՝ կհասկանանք C^k, $k \geq 1$, դասի $(n-1)$-չափանի մակերևույթ:

Դիցուք S-ը $\overline{Q}$-ում ընկած C^k, $k \geq 1$, դասի որևէ մակերևույթի պարզ կտոր է և դիցուք

$$x_n = \varphi(x_1, ..., x_{n-1}) = \varphi(x'), \ x' \in D, \quad \varphi(x') \in C^k(\overline{D}),$$

այդ կտորի հավասարումն է:

Կասենք, որ S-ի վրա տրված $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$, $x \in S$, ֆունկցիան պատկանում է $C^k(S)$ բազմությանը, $f \in C^k(S)$, եթե $f(x', \varphi(x'))$ ֆունկցիան պատկանում է $C^k(\overline{D})$ բազմությանը:

Ենթադրենք S-ը $\overline{Q}$-ում ընկած C^k, $k \geq 1$, դասի փակ մակերևույթ է (մասնավորապես $S = \partial Q$) և $S_1, ..., S_N$ նրա պարզ կտորներով ծածկույթ է: Կասենք, որ S-ի վրա տրված $f(x)$, $x \in S$, ֆունկցիան պատկանում է $C^k(S)$ բազմությանը, $f \in C^k(S)$, եթե $f \in C^k(S_i)$, $i = 1, ..., N$: Դժվար չէ նկատել, որ $f(x)$ ֆունկցիայի պատկանելությունը $C^k(S)$ բազմությանը կախված չէ S մակերևույթի պարզ կտորներով ծածկույթից:

Վերադառնանք դիֆերենցիալ հավասարումներին:

Կիրառություններում անհրաժեշտություն է առաջանում ուսումնասիրել դիֆերենցիալ հավասարումներ և որոշակի տիրույթում գտնել ճշգրիտ, կամ մոտավոր, լուծումներ կամ ուսումնասիրել լուծման որակական հատկությունները: Ընդ որում, դիտարկվում են դիֆերենցիալ հավասարման ոչ բոլոր լուծումները, այլ այն լուծումները, որոնք, որպես կանոն, տիրույթի եզրի վրա բավարարում են ուսումնասիրվող խնդրի բնույթից բխող լրացուցիչ պայմանների: Բերենք մի քանի փիպային օրինակներ:

1. Մեմբրանի հավասարակշռության և շարժման խնդիրը: Խնդիրը կայանում է հետևյալում՝ գտնել ուժերի ազդեցության տակ գտնվող մեմբրանի հավասարակշռության դիրքը:

Ենթադրվում է, որ մեմբրանի ցանկացած թույլատրելի դիրք իրենից ներկայացնում է $(x, u) = (x_1, x_2, u)$ տարածության մակերևույթ, որը միարժեքորեն պրոյեկտվում է x_1Ox_2 հարթության որևէ Q տիրույթի վրա և տրվում է $u = u(x)$, $x \in Q$, հավասարումով, որտեղ $u \in C^1(\overline{Q})$:

Ենթադրվում է, որ եթե $u = \varphi(x)$, $x \in Q$, մեմբրանի որևէ թույլատրելի դիրք է, ապա ցանկացած այլ $u = u(x)$ թույլատրելի դիրք ստացվում է $u = \varphi(x)$ դիրքից մեմբրանի յուրաքանչյուր կետի Ou առանցքին զուգահեռ տեղափոխությամբ:

Ենթադրվում է նաև, որ մեմբրանի վրա ազդող արտաքին ուժը ուղղված է Ou առանցքին զուգահեռ և ունի $f(x)$ անընդհատ խտություն: Մեմբրանը φ դիրքից u դիրքը տեղափոխելու համար այդ ուժի կատարած աշխատանքը հավասար է

$$\int\limits_Q \int\limits_{\varphi(x)}^{u(x)} f(x) du dx = \int\limits_Q f(x)\Big(u(x) - \varphi(x)\Big)\, dx :$$

Բացի այդ, մեմբրանի վրա ազդում է նաև ներքին ուժ: Կհամարենք, որ մեմբրանը φ դիրքից u դիրքը տեղափոխելու ընթացքում այդ ուժի կատարած աշխատանքը հավասար է

$$-\int\limits_Q k(x)\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2} - \sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}\right)\, dx$$

$\Big((x_1, x_1+\Delta x_1)\times(x_2, x_2+\Delta x_2)$ տարրին այդ ուժի հատկացրած աշխատանքը համեմատական է մեմբրանի մակերևույթի այն մասի մակերեսի փոփոխությանը, որը պրոյեկտվում է այդ տարրի վրա, $k(x) > 0$ գործակիցը կոչվում է մեմբրանի ճկվածություն, $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2})\Big)$:

Եթե մեմբրանի եզրի կետերում կիրառված է $g_1(x,u) = g_1(x) - \sigma_1(x)u$ ($\sigma_1(x) \geq 0$ եզրի առաձգական ամրացման գործակիցն է) գծային խտությամբ ուժ, ապա մեմբրանը $\varphi(x)$ դիրքից $u(x)$ դիրքը տեղափոխելու համար այդ ուժի կատարած աշխատանքը հավասար է

$$\int\limits_{\partial Q}\int\limits_{\varphi(x)}^{u(x)} g_1(x,u)\, du\, dS = \int\limits_{\partial Q}\left(g_1(x)\left(u(x)-\varphi(x)\right) - \frac{\sigma_1(x)}{2}\left(u^2(x)-\varphi^2(x)\right)\right) dS :$$

$u(x)$ դիրքում մեմբրանի պոտենցիալ էներգիան հավասար է

$$U(u) = U(\varphi) + \int\limits_Q k(x)\left(\sqrt{1+|\nabla u|^2} - \sqrt{1+|\nabla\varphi|^2}\right)\, dx - \int\limits_Q f(x)(u-\varphi)\, dx +$$

$$+\int\limits_{\partial Q}\left(\frac{\sigma_1}{2}\left(u^2-\varphi^2\right) - g_1\left(u-\varphi\right)\right)\, dS,$$

որտեղ $U(\varphi)$-ն φ դիրքում մեմբրանի պոտենցիալ էներգիան է:

Պարզության համար ենթադրենք, որ մեմբրանի թույլատրելի $u(x)$ դիրքերի համար $\nabla u(x)$ բավականաչափ փոքր է և $|\nabla u|^4$ կարգի անդամները կարող ենք հաշվի չառնել: Այդ դեպքում $u(x)$ դիրքում մեմբրանի պոտենցիալ էներգիան կընդունի

$$U(u) = U(\varphi) + \int\limits_Q \frac{k}{2}\left(|\nabla u|^2 - |\nabla\varphi|^2\right)\,dx - \int\limits_Q f(x)(u-\varphi)\,dx +$$

$$+\int\limits_{\partial Q}\Big(\frac{\sigma_1}{2}\left(u^2-\varphi^2\right) - g_1\left(u-\varphi\right)\Big)\,dS$$

տեսքը:

Եթե $u(x)$-ը մեմբրանի հավասարակշռության դիրքն է, ապա ցանկացած որևէ այլ թույլատրելի $v(x)$ դիրքի դեպքում $t=0$ կետը

$$P(t) = U(u+tv) = U(u) + t\left[\int\limits_Q (k\nabla u\nabla v - fv)\,dx + \int\limits_{\partial Q}(\sigma_1 uv - g_1 v)\,dS\right] +$$

$$+\frac{t^2}{2}\left[\int\limits_Q k|\nabla v|^2\,dx + \int\limits_{\partial Q}\sigma_1 v^2\,dS\right]$$

բազմանդամի (ըստ t-ի) մինիմումի կետ է (այստեղ $\nabla u\nabla v$-ով նշանակված է ∇u և ∇v վեկտորների սկալյար արտադրյալը՝ $\nabla u\nabla v = u_{x_1}v_{x_1} + u_{x_2}v_{x_2}$): Հետևաբար,

$$\frac{dP(0)}{dt} = 0,$$

որտեղից սպացվում է, որ ցանկացած $v \in C^1(\overline{Q})$ ֆունկցիայի համար մեմբրանի հավասարակշռության դիրքը նկարագրող $u(x)$ ֆունկցիան բավարարում է

$$\int\limits_Q k\nabla u\nabla v\,dx + \int\limits_{\partial Q}\sigma_1 uv\,dS = \int\limits_Q fv\,dx + \int\limits_{\partial Q} g_1 v\,dS \qquad (0.1)$$

ինտեգրալ նույնությանը:

Եթե մեմբրանի եզրը անշարժ է, այսինքն՝ կոշտ ամրացված է, ապա մեմբրանի բոլոր թույլատրելի $u(x)$ դիրքերը բավարարում են

$$u\Big|_{\partial Q} = \varphi\Big|_{\partial Q} \qquad (0.2)$$

պայմանին, և այդ դեպքում կամայական $u(x)$ դիրքում մեմբրանի պոտենցիալ էներգիան հավասար է

$$U(u) = U(\varphi) + \int\limits_Q \left(\frac{k}{2} \left(|\nabla u|^2 - |\nabla \varphi|^2 \right) - f(u-\varphi) \right) dx :$$

Դիցուք u-ն կոշտ ամրացված մեմբրանի հավասարակշռության դիրքն է: Այդ դեպքում ցանկացած $v \in C^1(\overline{Q})$ ֆունկցիայի համար, որը բավարարում է

$$v|_{\partial Q} = 0 \tag{0.3}$$

պայմանին, $u + tv$ ֆունկցիան կբավարարի (0.2) պայմանին: Հետևաբար, բոլոր այդպիսի v ֆունկցիաների համար

$$P(t) = U(u+tv) = U(u) + t \int\limits_Q (k \nabla u \nabla v - fv)\, dx + \frac{t^2}{2} \int\limits_Q k |\nabla v|^2\, dx$$

բազմանդամը $t = 0$ կետում ընդունում է փոքրագույն արժեք: Ուստի, (0.3) պայմանին բավարարող ցանկացած $v \in C^1(\overline{Q})$ ֆունկցիայի համար կոշտ ամրացված մեմբրանի հավասարակշռության դիրքը նկարագրող $u(x)$ ֆունկցիան բավարարում է

$$\int\limits_Q k \nabla u \nabla v\, dx = \int\limits_Q fv\, dx \tag{0.4}$$

ինտեգրալ նույնությանը: Եթե համարենք, որ մեմբրանի հավասարակշռության u որոնելի դիրքը տրվում է ոչ թե մեկ, այլ երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիայի միջոցով, $u \in C^2(\overline{Q})$, ապա (0.1) և (0.4) ինտեգրալ պայմանները կարելի է փոխարինել լոկալ պայմաններով՝ ենթադրելով $k(x) \in C^1(\overline{Q})$, $k(x) > 0$, $x \in \overline{Q}$, $\sigma_1, g_1, \varphi \in C(\partial Q)$:

Համաձայն Օստրոգրադսկու բանաձևի

$$\int\limits_Q k \nabla u \nabla v\, dx = -\int\limits_Q v\, div\, (k \nabla u)\, dx + \int\limits_{\partial Q} k \frac{\partial u}{\partial \nu} v\, dS,$$

որտեղ $A=(A_1,A_2)$ վեկտորի համար $div A = A_{1x_1}+A_{2x_2}$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial Q} = (\nabla u,\nu)|_{\partial Q} = (u_{x_1}\nu_1 + u_{x_2}\nu_2)|_{\partial Q}$, $\nu = (\nu_1,\nu_2)$-ը ∂Q-ին տարված Q-ի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալ վեկտորն է: Հետևաբար, (0.1) և (0.4) նույնությունները կարելի է գրել

$$\int\limits_Q \Big(div\ (k\nabla u)+f\Big)v\,dx - \int\limits_{\partial Q}\left(k\frac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma_1 u - g_1\right)v\,dS = 0 \qquad (0.1')$$

և

$$\int\limits_Q \Big(div\ (k\nabla u)+f\Big)v\,dx = 0 \qquad (0.4')$$

տեսքով:

Քանի որ $div(k\nabla u)+f$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա $(0.4')$ նույնությունից ստանում ենք

$$div\ (k\nabla u)+f=0, \quad x\in Q, \qquad (0.5)$$

ինչը կոշտ ամրացված մեմբրանի դեպքում (0.2) *եզրային* պայմանի հետ միասին հանդիսանում է այն լոկալ պայմանը, որին պետք է բավարարի որոնելի $u(x)$ ֆունկցիան: (0.2) եզրային պայմանին բավարարող (0.5) հավասարման լուծումը գտնելու խնդիրը կոչվում է *առաջին եզրային խնդիր (*կամ *Դիրիխլեի խնդիր)* (0.5) հավասարման համար:

Քանի որ $(0.1')$-ում $v(x)$ կամայական ֆունկցիա է $C^1(\overline{Q})$ դասից, ապա դիտարկելով մասնավորապես (0.3) պայմանին բավարարող $v(x)$ ֆունկցիաներ՝ կստանանք, որ այս դեպքում ևս $u(x)$ ֆունկցիան բավարարում է (0.5) հավասարմանը: Հետևաբար, $(0.1')$ նույնությունը կարելի է գրել

$$\int\limits_{\partial Q}\left(k\frac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma_1 u - g_1\right)v\,dS = 0$$

տեսքով: Դիցուք $\sigma_1, g_1 \in C^1(\partial Q)$: Քանի որ $C^1(\partial Q)$, $\partial Q \subset C^1$, բազմությանը պատկանող ցանկացած ֆունկցիա ունի $C^1(\overline{Q})$-ին պատկանող շարունակություն, ապա վերջին նույնությունից ստանում ենք

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma u\right)\Big|_{\partial Q} = g \qquad (0.6)$$

եզրային պայմանը, որտեղ $\sigma = \dfrac{\sigma_1}{k} \geq 0$, $g = \dfrac{g_1}{k}$:

(0.6) եզրային պայմանին բավարարող (0.5) հավասարման լուծումը գտնելու խնդիրը կոչվում է *երրորդ եզրային խնդիր* (0.5) հավասարման համար: $\sigma \equiv 0$ դեպքում երրորդ եզրային խնդիրը կոչվում է *երկրորդ եզրային խնդիր (*կամ *Նեյմանի խնդիր)*: Այս դեպքում եզրային պայմանն ունի

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial Q} = g \tag{0.7}$$

տեսքը: Այսպիսով ստացանք, որ մեմբրանի հավասարակշռության դիրքը նկարագրվում է (0.5) հավասարման լուծման միջոցով, որը բավարարում է որոշակի եզրային պայմանի:

Այժմ դիտարկենք մեմբրանի շարժման խնդիրը:

Դիցուք $u(x,t)$ ֆունկցիան որոշում է մեմբրանի դիրքը ժամանակի t պահին: Այդ դեպքում $u_t(x,t)$ և $u_{tt}(x,t)$ ֆունկցիաները որոշում են մեմբրանի $x \in Q$ կետի արագությունը և արագացումը (ենթադրվում է, որ այդ ածանցյալները գոյություն ունեն): Դիցուք ժամանակի որոշակի $t = t_0$ պահին տրված են մեմբրանի (x,t) կետի դիրքը և արագությունը.

$$u|_{t=t_0} = \psi_0(x), \quad x \in \overline{Q}, \tag{0.8}$$

$$u_t|_{t=t_0} = \psi_1(x), \quad x \in \overline{Q} : \tag{0.9}$$

(0.8) և (0.9) պայմանները կոչվում են *սկզբնական պայմաններ*:

Դալամբերի սկզբունքի համաձայն՝ մեմբրանի շարժման հավասարումը մեմբրանի հավասարակշռության (0.5) հավասարումն է, որում $f(x)$ ֆունկցիան փոխարինված է $-\rho(x)u_{tt} + f(x,t)$ ֆունկցիայով ($-\rho(x)u_{tt}$-ն իներցիայի ուժի խտությունն է x կետում, $f(x,t)$-ն արտաքին ուժի խտությունն է, որը, ընդհանրապես ասած, կախված է t-ից).

$$div_x\ (k\nabla_x u) + f(x,t) - \rho(x)u_{tt} = 0, \quad x \in Q,\ t > t_0 : \tag{0.10}$$

∂Q եզրի վրա տրված պայմաններից կախված, ինչպես և ստացիոնար դեպքում, եզրային պայմանները ընդունում են (0.2), (0.6) կամ (0.7) տեսքը և տեղի ունեն դիտարկվող ժամանակի բոլոր $t \geq t_0$ արժեքների համար:

(0.2), (0.8), (0.9) կամ (0.7), (0.8), (0.9) (կամ (0.6), (0.8), (0.9)) պայմաններին բավարարող (0.10) հավասարման լուծումը գտնելու խնդիրը կոչվում է, համապատասխանաբար, *առաջին* կամ *երկրորդ (*կամ *երրորդ) խառը խնդիր* (0.10) հավասարման համար:

Այսպիսով, մեմբրանի շարժումը նկարագրվում է (0.10) հավասարման լուծման միջոցով, որը բավարարում է սկզբնական և որոշակի եզրային պայմանների:

Անվերջ տարածված մեմբրանի դեպքում ($Q = R_2$) շարժումը նկարագրող $u(x,t)$, $x \in R_2$, $t > 0$, ֆունկցիան (0.10) հավասարման լուծում է և բավարարում է (0.8), (0.9) սկզբնական պայմաններին: Այդ դեպքում ասում են, որ $u(x,t)$ ֆունկցիան (0.10) հավասարման համար *սկզբնական խնդրի (Կոշիի խնդրի)* լուծում է:

Եթե (0.5) և (0.10) հավասարումներում գործակիցները հաստատուններ են, $k(x) \equiv k > 0$, $\rho(x) \equiv \rho > 0$, ապա այդ հավասարումները համապատասխանաբար կոչվում են՝

Պուասոնի հավասարում

$$\Delta u = -\frac{f(x)}{k}, \quad x \in Q, \tag{0.5$'$}$$

և *ալիքային հավասարում*

$$\frac{1}{a_0^2}u_{tt} - \Delta u = -\frac{f(x,t)}{k}, \quad x \in Q,\ t > t_0, \quad a_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \tag{0.10$'$}$$

որտեղ $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ և կոչվում է *Լապլասի օպերատոր*:

Մեկ տարածական փոփոխականի դեպքում (0.10$'$) հավասարումն ունի

$$\frac{1}{a_0^2}u_{tt} - u_{xx} = -\frac{f(x,t)}{k}, \quad x \in (\alpha,\beta),\ t > t_0, \tag{0.10$''$}$$

տեսքը: Այս հավասարումը նկարագրում է (α,β) միջակայքի վրա տեղակայված լարի շարժումը: Եռաչափ $x = (x_1, x_2, x_3)$ դեպքում

$$\frac{1}{a_0^2} u_{tt} - \Delta u = -\frac{f(x,t)}{k}, \quad x \in Q,\ t > t_0, \tag{0.10'''}$$

հավասարումը, որտեղ $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}$, նկարագրում է գազի շարժումը Q տիրույթում ($u(x,t)$ ֆունկցիան բնութագրում է ժամանակի t պահին $x \in Q$ կետում գազի ճնշման շեղումը հաստատուն ճնշումից): Այս դեպքում a_0-ն գազում ձայնի տարածման արագությունն է:

2. Ջերմության տարածման խնդիրը: Դիցուք եռաչափ տարածության Q տիրույթում ունենք նյութ, որն ունի $\rho > 0$ խտություն, $c > 0$ ջերմունակություն և $k(x) > 0$ ջերմահաղորդականության գործակից: $u(x,t)$-ով նշանակենք t պահին $x \in Q$ կետում ջերմաստիճանը: Ենթադրենք, որ $t = t_0$ սկզբնական պահին ջերմաստիճանը հայտնի է,

$$u(x,t)|_{t=t_0} = \psi_0(x), \quad x \in Q, \tag{0.11}$$

և պահանջվում է գտնել ջերմաստիճանը $t > t_0$ համար:

Դիցուք Q' տիրույթը Q-ի որևէ ենթատիրույթ է: Ֆուրյեի օրենքի համաձայն՝ (t_1, t_2), $t_0 \le t_1 < t_2$, ժամանակահատվածում $\partial Q'$ եզրով Q' տիրույթ մտնող ջերմության քանակը հավասար է

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS,$$

որտեղ ν-ն $\partial Q'$-ին տարված Q'-ի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալն է:

Եթե Q տիրույթում առկա է $f(x,t)$ խտությամբ ջերմության աղբյուր, ապա (t_1, t_2) ժամանակահատվածում Q' - ում ջերմության աճը հավասար է

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{Q'} f(x,t)\, dx + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS :$$

Այդ ջերմությունը ծախսվում է յուրաքանչյուր $x \in Q'$ կետում ջերմաստիճանի արժեքը $u(x,t_1)$-ից մինչև $u(x,t_2)$ փոփոխելու վրա և տեղի ունի

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{Q'} f(x,t)\,dx + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\partial Q'} k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS = \int\limits_{Q'} c(x)\rho(x)\Big(u(x,t_2)-u(x,t_1)\Big)\,dx$$

ջերմային հավասարակշռության հավասարումը: Հաշվի առնելով, որ

$$u(x,t_2)-u(x,t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}\,dt$$

և օգտվելով Օստրոգրադսկու բանաձևից՝ կստանանք

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{Q'} \left(c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - div\ (k(x)\nabla u) - f(x,t)\right) dx = 0,$$

որտեղ $\nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$:

Եթե ենթաինտեգրալային ֆունկցիան անընդհատ է Q տիրույթում, ապա հաշվի առնելով $Q^{'}$ տիրույթի և (t_1,t_2) միջակայքի կամայական լինելը՝ կստանանք, որ վերջին հավասարությունը համարժեք է

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - div\ (k(x)\nabla u) = f(x,t), \quad x\in Q,\ t>t_0, \tag{0.12}$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը: Այն դեպքում, երբ $c(x)$, $\rho(x)$ և $k(x)$ ֆունկցիաները հաստատուններ են՝ $c(x)=c$, $\rho(x)=\rho$, $k(x)=k$, (0.12) հավասարումը կոչվում է *ջերմահաղորդականության հավասարում*.

$$\frac{1}{a^2}u_t - \Delta u = \frac{f(x,t)}{c\rho}, \tag{0.12$'$}$$

որտեղ $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}$:

Նկատենք, որ (0.12) հավասարումը տեղի ունի միայն $t>t_0$ և միայն Q տիրույթի ներքին կետերի համար: $u(x,t)$ ֆունկցիայի վարքը $t=t_0$ պահին տրվում է (0.11) սկզբնական պայմանով, իսկ $x\in\partial Q$ կետերում պետք է տրվի լրացուցիչ: Այն թելադրվում է ֆիզիկական կոնկրետ խնդրով, որը ջերմային կապ է հաստատում Q տիրույթի և արտաքին միջավայրի միջև:

Պարզագույն դեպքում ∂Q եզրի վրա t-ի բոլոր դիտարկվող արժեքների համար տրվում է $u(x,t)$ ջերմաստիճանը՝

$$u|_{\partial Q} = f_0(x,t) : \tag{0.13}$$

Այդ դեպքում ջերմաստիճանը կնկարագրվի (0.12) հավասարման այն լուծման միջոցով, որը բավարարում է (0.11) և (0.13) պայմաններին:

Եթե հայտնի է ∂Q եզրով ջերմային հոսքի $q_0(x,t)$ խտությունը, ապա Ֆուրյեի օրենքի համաձայն՝ եզրային պայմանն ունի

$$k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial Q} = q_0(x,t) \tag{0.14}$$

տեսքը:

Եթե հայտնի է Q տիրույթից դուրս ընկած միջավայրի $u_0(x,t)$ ջերմաստիճանը, և ∂Q եզրով ջերմային հոսքի $q_0(x,t)$ խտությունը համեմատական է $u|_{\partial Q}$ և $u_0|_{\partial Q}$ ջերմաստիճանների տարբերությանը, ապա եզրային պայմանն ընդունում է

$$\Big(k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} + k_1 u\Big)\Big|_{\partial Q} = k_1 u_0\Big|_{\partial Q} \tag{0.15}$$

տեսքը, որտեղ $k_1(x) > 0$ շրջակա միջավայրի հետ մարմնի ջերմափոխանակության գործակիցն է:

(0.11), (0.13) կամ (0.11), (0.14) (կամ (0.11), (0.15)) պայմաններին բավարարող (0.12) հավասարման լուծումը գտնելու խնդիրը կոչվում է, համապատասխանաբար, *առաջին* կամ *երկրորդ* (կամ *երրորդ*) *խառը խնդիր* (0.12) հավասարման համար:

Այն դեպքում, երբ նյութը լցնում է ամբողջ R_3 տարածությունը ($Q = R_3$), $u(x,t)$ ջերմաստիճանը բավարարում է (0.12) հավասարմանը, երբ $t > t_0$ և (0.11) սկզբնական պայմանին, երբ $t = t_0$: Այդ դեպքում ասում են, որ $u(x,t)$ ֆունկցիան (0.12) հավասարման համար *սկզբնական խնդրի (Կոշիի խնդրի)* լուծում է:

Գլուխ 1

Երկրորդ կարգի հավասարումների դասակարգումը Բնութագրիչ մակերևույթներ

n-չափանի R_n, $n > 1$, $x = (x_1, ..., x_n)$, տարածության Q բաց բազմության վրա դիտարկենք

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u = f(x), \quad x \in Q, \tag{1.1}$$

երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ հավասարման a_{ij}, a_i, a, $(i, j = 1, ..., n)$ *գործակիցները* տրված իրական արժեքանի ֆունկցիաներ են $C(Q)$-ից, հավասարման $f(x)$ *ազատ անդամը (աջ մասը)* տրված ֆունկցիա է $C(Q)$-ից: $u(x)$ ֆունկցիան կոչվում է (1.1) հավասարման *լուծում*, եթե $u \in C^2(Q)$ և բավարարում է (1.1) հավասարմանը: Բարձր կարգի ածանցյալների a_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$ գործակիցները ձևավորում են *ավագ գործակիցների* $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$ քառակուսային մատրից:

Հետագայում, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կենթադրենք, որ $A(x)$ մատրիցը սիմետրիկ է: Իրոք, հաշվի առնելով այն փաստը, որ $C^2(Q)$ դասին պատկանող ֆունկցիաների համար

$$u_{x_ix_j} = u_{x_jx_i}, \quad i, j = 1, ..., n,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} u_{x_ix_j},$$

ապա $A(x)$ մատրիցի փոխարեն միշտ կարելի է վերցնել

$$\frac{1}{2}\|a_{ij}(x) + a_{ji}(x)\| = \frac{1}{2}\left(A(x) + A^*(x)\right)$$

սիմետրիկ մատրիցը (չփոխելով հավասարումը):

§ 1. Հավասարումների դասակարգումը

Վերցնենք կամայական x կետ Q-ից: $\|A(x)\|$ մատրիցի սեփական արժեքները, այսինքն՝ $det\|A(x) - \lambda E\| = 0$ հավասարման արմատները, նշանակենք $\lambda_1(x), ..., \lambda_n(x)$ (յուրաքանչյուր λ_i կրկնվում է այնքան անգամ, որքան նրա պատիկությունն է): Քանի որ $\|A(x)\|$ մատրիցը սիմետրիկ է, ապա բոլոր λ_i, $i = 1, ..., n$, իրական են: Դիցուք դրանցից $n_- = n_-(x)$ բացասական են, $n_0 = n_0(x)$ զրոյական են և $n_+ = n_+(x)$ դրական են. $n_- + n_0 + n_+ = n$:

1. $n_0 = 0$ դեպք.

ա) եթե $n_+ = n$, $n_- = 0$, կամ $n_+ = 0$, $n_- = n$, ապա x կետում (1.1) հավասարումը կոչվում է *էլիպսական* փիպի,

բ) եթե $n_+ = n - 1$, $n_- = 1$, կամ $n_+ = 1$, $n_- = n - 1$, ապա x կետում (1.1) հավասարումը կոչվում է *հիպերբոլական* փիպի,

գ) եթե $n_+ > 1$ և $n_- > 1$ (դա հնարավոր է միայն $n \geq 4$ դեպքում), ապա x կետում (1.1) հավասարումը կոչվում է *ուլտրահիպերբոլական* փիպի:

2. $n_0 > 0$ դեպք.

Այս դեպքում x կետում (1.1) հավասարումը կոչվում է *պարաբոլական* փիպի:

Դիտողություն: Հավասարման դասակարգման սահմանումից բխում է, որ հավասարման փիպը որոշելու համար պարփադիր չէ գտնել $\lambda_i(x)$ արմատների արժեքները, այլ բավարար է իմանալ արմատների նշանները, ավելի ճիշտ՝ $n_-(x)$, $n_0(x)$ և $n_+(x)$ ամբողջ թվերը: Այդ նպատակով դիտարկենք

$$(\xi,\ \xi A(x)) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{i\,j}(x)\xi_i\xi_j, \quad \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in R_n,$$

քառակուսային ձևը ($x \in Q$ ֆիքսած կետ է): Հանրահաշվի դասընթացից հայտնի է, որ չվերասերվող իրական ձևափոխության միջոցով այն կարելի է բերել կանոնական (անկյունագծային) տեսքի և քառակուսային ձևերի իներցիայի օրենքի համաձայն՝ այդ կանոնական տեսքի դրական նշանով անդամների քանակը $n_+(x)$ է, բացասական նշանով անդամների քանակը $n_-(x)$ է, իսկ $n_0(x) = n - n_+(x) - n_-(x)$:

Եթե (1.1) հավասարումը որևէ $E \subset Q$ բազմության բոլոր կետերում էլիպսական է (հիպերբոլական է և այլն), ապա այն կոչվում է *էլիպսական (հիպերբոլական և այլն) E բազմության վրա*:

Օրինակներ.

Պուասոնի հավասարումը.

$$\Delta u = f(x), \quad x \in Q,$$

որտեղ $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ *Լապլասի օպերատորն* է, $\Delta u = u_{x_1x_1} + ... + \ u_{x_nx_n}$, (երբ $f = 0$ այս հավասարումը կոչվում է *Լապլասի հավասարում*) Q տիրույթում էլիպսական տիպի է, քանի որ այս դեպքում $A(x) = E$ և բոլոր $x \in Q$ կետերի համար $\lambda_1(x) = ... = \lambda_n(x) = 1$:

Ալիքային հավասարումը.

$$u_{x_1x_1} + ... + u_{x_{n-1}x_{n-1}} - u_{x_nx_n} = f(x), \quad x \in Q,$$

Q տիրույթում հիպերբոլական տիպի է, քանի որ այս դեպքում բոլոր $x \in Q$ կետերի համար $\lambda_1(x) = ... = \lambda_{n-1}(x) = 1, \ \lambda_n(x) = -1$:

Ջերմահաղորդականության հավասարումը.

$$u_{x_1x_1} + ... + u_{x_{n-1}x_{n-1}} - u_{x_n} = f(x), \quad x \in Q,$$

Q տիրույթում պարաբոլական տիպի է, քանի որ այս դեպքում բոլոր $x \in Q$ կետերի համար $\lambda_1(x) = ... = \lambda_{n-1}(x) = 1, \ \lambda_n(x) = 0$:

Տրիկոմիի հավասարումը.

$$x_2 u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = f(x), \quad x \in Q \subset R_2,$$

$Q = \{|x| < 1\}$ գնդում խառը տիպի է, քանի որ այս դեպքում հավասարումը $\{|x| < 1, \ x_2 > 0\}$ կիսաշրջանում էլիպսական տիպի է, $\{|x| < 1, \ x_2 < 0\}$ կիսաշրջանում հիպերբոլական տիպի է, իսկ $\{|x| < 1, x_2 = 0\}$ տրամագծի վրա պարաբոլական տիպի է:

§ 2. Դասակարգման ինվարիանտությունը ողորկ փոխմիարժեք արտապատկերումների նկատմամբ

Դիցուք U-ն որևէ տիրույթ է Q բազմությունից, $U \subset Q$, և դիցուք

$$y = \varphi(x), \quad x \in U, \tag{1.2}$$

կամ ըստ կոորդինատների.

$$y_1 = \varphi_1(x_1, ..., x_n), ..., y_n = \varphi_n(x_1, ..., x_n),$$

$x = (x_1, ..., x_n) \in U,\ \varphi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$, U-ում տրված ձևափոխություն է:
Ենթադրենք

ա) (1.2) ձևափոխությունը U տիրույթը փոխմիարժեքորեն արտապատկերում է V տիրույթի վրա ($y \in V$),

բ) $\varphi(x) \in C^2(U)$, այսինքն՝ $\varphi_i(x) \in C^2(U),\ i = 1, ..., n$,

գ) $J(x) = \|\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\|$ Յակոբիի մատրիցը U տիրույթում չի վերասերվում, այսինքն (1.2) ձևափոխության յակոբյանը՝ $det\ J(x) \neq 0,\ x \in U$:

Հայտնի է, որ ա) - գ) պայմանների դեպքում (1.2) ձևափոխության հակադարձ

$$x = \psi(y), \quad y \in V, \tag{1.2$'$}$$

ձևափոխությունը նույնպես օժտված է նման հատկություններով:

V տիրույթում սահմանենք $v(y)$ ֆունկցիան.

$$v(y) = u(\psi(y)), \quad y \in V: \tag{1.3}$$

Ցույց տանք, որ եթե ա) - գ) պայմանները տեղի ունեն, ապա հավասարումը, որին V տիրույթում բավարարում է $v(y)$ ֆունկցիան, $y \in V$ կետում կլինի նույն տիպի, ինչպիսին է (1.1) հավասարումը $y \in V$ կետին համապատասխանող $x \in U$ կետում (ըստ (1.2) կամ (1.2$'$)): Հենց այս պնդումը կհասկանանք որպես *դասակարգման ինվարիանտություն նշված ձևափոխությունների նկատմամբ*:

Ըստ (1.3)-ի

$$u(x) = v(y) = v(\varphi(x)), \quad x \in U \ (y \in V) :$$

Բոլոր $i, j = 1, ..., n$ համար

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} v_{y_k} \varphi_{kx_i},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} v_{y_k y_s} \varphi_{kx_i} \varphi_{sx_j} + \sum_{k=1}^{n} v_{y_k} \varphi_{kx_i x_j} :$$

Հետևաբար, $v(y)$ ֆունկցիան V տիրույթում բավարարում է

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \Big(\sum_{k,s=1}^{n} v_{y_k y_s} \varphi_{kx_i} \varphi_{sx_j} + \sum_{k=1}^{n} v_{y_k} \varphi_{kx_i x_j} \Big) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{n} v_{y_k} \varphi_{kx_i} + av = f, \quad (1.\widetilde{1})$$

հավասարմանը, որի ավագ անդամների գործակիցներն ունեն

$$\widetilde{a}_{ks}(y) = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{kx_i}(x) a_{ij}(x) \varphi_{sx_j}(x) \Big) \Big|_{x=\psi(y)}, \quad k, s = 1, ..., n$$

տեսքը: Վերջին բանաձևից հետևում է, որ $(1.\widetilde{1})$ հավասարման ավագ գործակիցների $\|\widetilde{A}(y)\|$ մատրիցը $J(x)$, $A(x)$ և $J^*(x)$ երեք մատրիցների արտադրյալ է.

$$\|\widetilde{A}(y)\| = \big(J(x) A(x) J^*(x) \big) \Big|_{x=\psi(y)},$$

$\widetilde{A} = JAJ^*$ կամ $A = J^{-1} \widetilde{A} J^{*-1}$, որտեղ $\widetilde{A} = \widetilde{A}(y)$, $J = J(\psi(y))$, $A = A(\psi(y))$, $y \in V$:

Դիցուք P-ն այնպիսի չվերասերվող մատրից է, որ $\xi = \eta P$ ձևափոխությունը A մատրիցի $(\xi, \xi A)$ քառակուսային ձևը բերում է կանոնական տեսքի՝ $(\xi, \xi A) = (\eta, \eta \Lambda)$, որտեղ Λ-ն անկյունագծային մատրից է, որի անկյունագիծը $\big(\underbrace{1, ..., 1}_{n_+}, \underbrace{0, ..., 0}_{n_0}, \underbrace{-1, ..., -1}_{n_-}\big)$ վեկտորն է: Այդ դեպքում

$$\Lambda = PAP^*, \quad \Lambda = PJ^{-1} \widetilde{A} J^{*-1} P^*,$$

որտեղից բխում է, որ $\widetilde{A}$ մատրիցի $(\xi, \xi\widetilde{A})$ քառակուսային ձևը $\xi = \eta(PJ^{-1})$ ձևափոխության միջոցով բերվում է նույն $(\eta, \eta\Lambda)$ տեսքի, ինչ տեսքի բերվել էր A մատրիցի քառակուսային ձևը: Հետևաբար, $A(x)$ և $\widetilde{A}(y),\ y = \varphi(x)$, մատրիցների դրական, զրոյական և բացասական սեփական արժեքների քանակները նույնն են: Պնդումն ապացուցված է:

§ 3. Բնութագրիչ մակերևույթներ

Դիցուք Q տիրույթում ընկած $(n-1)$-չափանի S ողորկ մակերևույթը $(S \subset Q)$ տրված է

$$F(x) = 0 \tag{1.4}$$

հավասարումով, որտեղ $F \in C^1(Q)$ իրական արժեքանի ֆունկցիա է, $\nabla F\big|_S \neq 0$:

$x^0 \in S$ կետը կոչվում է (1.1) հավասարման համար *բնութագրիչ* կետ, եթե

$$\big(\nabla F(x)A(x), \nabla F(x)\big) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\frac{\partial F(x)}{\partial x_j} = 0, \tag{1.5}$$

երբ $x = x^0$:

Եթե $x \in S$ բոլոր կետերը բնութագրիչ կետեր են, ապա S մակերևույթը կոչվում է (1.1) հավասարման համար *բնութագրիչ մակերևույթ* կամ ուղղակի *բնութագրիչ*:

Նշանակենք $\nu(x) = (\nu_1(x), ..., \nu_n(x)) = \dfrac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}$: ν վեկտորն ունի ∇F ուղղությունը և միավոր երկարություն, $|\nu| = \nu_1^2 + ... + \nu_n^2 = 1$ (ν_i-ն հավասար է ν վեկտորի և x_i ուղղության կազմած անկյան cos-ին՝ $\nu_i = \cos(\nu, x_i)$): Այդ դեպքում (1.5) հավասարությունը համարժեք է

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\nu_i(x)\nu_j(x) = 0 \tag{1.5$'$}$$

հավասարությանը:

Բերենք բնութագրիչ մակերևույթների օրինակներ հաստատուն գործակիցներով որոշ ֆիզիկային հավասարումների համար ($Q = R_n$)։

Պուասոնի հավասարում: Պուասոնի հավասարումը բնութագրիչներ չունի, քանի որ այս դեպքում $A(x) = E$ և (1.5) հավասարությունը կընդունի $|\nabla F|^2 = 0$ տեսքը։

Ջերմահաղորդականության հավասարում: Ջերմահաղորդականության հավասարման համար $(1.5^{'})$ հավասարությունը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\nu_1^2 + ... + \nu_{n-1}^2 = 0 :$$

Հետևաբար, $\nu_n^2 = 1,\ \nu_n = \pm 1$, և բնութագրիչներ են հանդիսանում այն մակերևույթները, որոնց գրադիենտի և x_n ուղղության կազմած անկյունը $0°$ կամ $180°$ է, այսինքն՝ $x_n = C$ հարթությունները, որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է ($F = x_n - C$)։

Ալիքային հավասարում: Ալիքային հավասարման համար $(1.5^{'})$ հավասարությունը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\nu_1^2 + ... + \nu_{n-1}^2 - \nu_n^2 = 0 :$$

Հետևաբար, $\nu_n^2 = \dfrac{1}{2},\ \nu_n = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, և բնութագրիչներ են հանդիսանում այն մակերևույթները, որոնց գրադիենտի և x_n ուղղության կազմած անկյունը $45°$ կամ $135°$ է։ Նկատենք, որ $n = 2$ մասնավոր դեպքում ալիքային հավասարման բնութագրիչներ են հանդիսանում *միայն* $x_1 + x_2 = C$ և $x_1 - x_2 = C$ ուղիղները, որտեղ C-ն կամայական հաստատուն է։

Նշենք բնութագրիչների մի կարևոր հատկություն։ Հայտնի է, որ ողորկ գործակիցներով և աջ մասով $u^{''} + a_1(x)u^{'} + a_2(x)u = f(x),\ a < x < b$, երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները ևս ողորկ են. օրինակ՝ հաստատուն գործակիցներով համասեռ հավասարումը ($f(x) \equiv 0$) ունի միայն անվերջ դիֆերենցելի լուծումներ։ Մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների համար իրավիճակը այլ է։

Դիցուք մեկ փոփոխականից կախված $f(t)$ և $g(t)$ ֆունկցիաները պատկանում են $C^2(R_1)$-ին և չեն պատկանում $C^3(R_1)$-ին, օրինակ. $f(t) = 0$, երբ $t \leq t_1$, $f(t) = (t-t_1)^3$, երբ $t \geq t_1$, իսկ $g(t) = (t-t_2)^5$, երբ $t \leq t_2$, $g(t) = 2(t-t_2)^3$ երբ $t \geq t_2$, որտեղ t_1 և t_2 իրական թվեր են: $u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$ ֆունկցիան ամբողջ R_2-ում

$$u_{x_1x_2} = 0$$

հաստատուն գործակիցներով համասեռ հավասարման լուծում է, ընդ որում u-ն չի պատկանում $C^3(R_1)$-ին: Այդ ֆունկցիայի երրորդ կարգի ածանցյալներն ունեն խզումներ $x_1 = t_1$ և $x_2 = t_2$ ուղիղների վրա, որոնք այդ հավասարման բնութագրիչներ են: Այս երևույթը կրում է ընդհանուր բնույթ:

Դիցուք n-չափանի Q տիրույթը $(n-1)$-չափանի L ողորկ մակերևույթով բաժանված է երկու Q_1 և Q_2 ենթատիրույթների.

$$L = \{x \in Q : \Phi(x) = 0\}, \tag{1.6}$$

որտեղ $\Phi \in C^1(Q),\ \nabla\Phi\big|_L \neq 0,$

$$Q_1 = Q \cap \{x \in Q : \Phi(x) > 0\},\ Q_2 = Q \cap \{x \in Q : \Phi(x) < 0\},\ Q = Q_1 \cup Q_2 \cup L :$$

Դիտարկենք $Q \setminus L$ բազմության վրա որոշված $h(x) \in C(Q_1) \cap C(Q_2)$ ֆունկցիան: L մակերևույթի վրա $h(x)$ ֆունկցիայի թռիչք կանվանենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$[h](x) = \lim_{\substack{y \in Q_1 \\ y \to x}} h(y) - \lim_{\substack{y \in Q_2 \\ y \to x}} h(y), \quad x \in L :$$

$x^0 \in L$ կետում $h(x)$ ֆունկցիայի անընդհատության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ $[h](x^0) = 0$, ընդ որում՝

$$h(x^0) = \lim_{\substack{y \in Q_1 \\ y \to x^0}} h(y) :$$

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը, որը կներկայացնենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 1.1.1 *Դիցուք Q տիրույթում u ֆունկցիան* (1.1) *հավասարման լուծում է, ընդ որում՝ որևէ ամբողջ $k > 0$ համար*

$$u \in C^{k+1}(Q) \cap C^{k+2}(Q_1 \cup L) \cap C^{k+2}(Q_2 \cup L),$$

իսկ հավասարման գործակիցները և ազատ անդամը պատկանում են $C^k(Q)$-ին: Եթե L մակերևույթի որևէ կետում լուծման $(k+2)$-րդ կարգի ածանցյալներից գոնե մեկը գոյություն չունի (հիշատակված ածանցյալի թռիչքը զրոյից տարբեր է), ապա այդ կետը բնութագրիչ կետ է:

Մասնավորապես, եթե L մակերևույթի յուրաքանչյուր կետում գոյություն չունի լուծման $(k+2)$-րդ կարգի ածանցյալներից որևէ մեկը, ապա L մակերևույթը բնութագրիչ է:

Լուծման հավասարման կարգից ավելի բարձր կարգի ածանցյալների խզումները կոչվում են լուծման *թույլ խզումներ*:

Թեորեմ 1.1.1-ը կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ կերպ՝ թեորեմում նշված *լուծումների թույլ խզումները տեղակայված են բնութագրիչների վրա:*

Գլուխ 2

Հիպերբոլական տիպի հավասարումներ

Երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարումները առավել հաճախ հանդիպում են տատանողական պրոցեսների հետ կապված ֆիզիկական խնդիրներում:

§ 1. Կոշիի խնդիրը և Կոշիի լոկալացված խնդիրը ալիքային հավասարման համար

$u(x,t)$, $x \in R_n$, $t > 0$, ֆունկցիան կոչվում է

$$u_{tt} - \triangle_x u = f(x,t), \quad x \in R_n,\ t > 0, \tag{2.1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_n, \tag{2.2}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R_n, \tag{2.3}$$

Կոշիի խնդրի լուծում, եթե u-ն պատկանում է $C^2(x \in R_n, t \geq 0)$ բազմությանը և բավարարում է $(2.1), (2.2), (2.3)$ հավասարություններին:

Լուծման սահմանումից ակնհայտորեն հետևում է, որ $(2.1), (2.2), (2.3)$ խնդրի լուծման գոյության համար *անհրաժեշտ* են

$$f \in C(x \in R_n, t \geq 0),\ \varphi \in C^2(R_n),\ \psi \in C^1(R_n)$$

պայմանները:

$(2.1) - (2.3)$ խնդրի հետ մեկտեղ կարելի է դիտարկել նաև հետևյալ ավելի ընդհանուր խնդիրը:

Դիցուք Q-ն $\{x \in R_n,\ t = 0\}$ հարթության որևէ n-չափանի տիրույթ է: Q-ով կնշանակենք նաև $(n+1)$-չափանի $\{x \in R_n,\ t \in R_1\}$ տարածության բազմությունը, որը կազմված է Q-ի կետերից:

Վերցնենք Q բազմության կամայական $(x^0, 0)$ կետ և կամայական $t^0 > 0$ թիվ այնպես, որ

$$Q_{x^0,t^0} = \{|x - x^0| \le t^0,\ t^0 > 0\}$$

t^0 շառավղով n-չափանի գունդը ընկած լինի Q-ի մեջ: Q_{x^0,t^0} հիմքով և (x^0, t^0) գագաթով $(n+1)$-չափանի կոնը նշանակենք Ω_{x^0,t^0}.

$$\Omega_{x^0,t^0} = \{|x - x^0| < t^0 - t,\ 0 < t < t^0\}\ :$$

Ω_{x^0,t^0} կոնի $S_{x^0,t^0} = \{|x - x^0| = t^0 - t,\ 0 \le t \le t^0\}$ կողմնային մակերևույթը (2.1) հավասարման կոնային բնութագրիչի կտոր է:

(2.1) հավասարման Q հիմքով *բնութագրիչ կոնոիդ* կամ ուղղակի Q *հիմքով կոնոիդ* կանվանենք բոլոր Ω_{x^0,t^0} կոների միավորում հանդիսացող Ω_Q տիրույթը.

$$\Omega_Q = \bigcup_{\substack{(x^0,0)\in Q, \\ t^0>0:\ Q_{x^0,t^0}\subset Q}} \Omega_{x^0,t^0}\ : \tag{2.4}$$

$\{x \in R_n, t = 0\}$ հարթության մեջ վերցնենք կամայական Q տիրույթ և դիցուք Ω_Q համապատասխան կոնոիդն է:

$$u_{tt} - \triangle u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_Q, \tag{2.5}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q, \tag{2.6}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in Q, \tag{2.7}$$

խնդիրը, որտեղ f, φ, ψ համապատասխան բազմությունների վրա տրված ֆունկցիաներ են, կոչվում է *Կոշիի լոկալացված խնդիր*:

$(2.5) - (2.7)$ խնդրի լուծում կոչվում է (2.5), (2.6), (2.7) հավասարություններին բավարարող $u \in C^2(\Omega_Q \cup Q)$ ֆունկցիան:

Կոշիի լոկալացված խնդիրը Կոշիի $(2.1)-(2.3)$ խնդրի ընդհանրացումն է. $(2.1)-(2.3)$ խնդիրը համընկնում է $(2.5)-(2.7)$ խնդրի հետ $Q=R_n$ դեպքում:

Սահմանումից հետևում է, որ (2.5), (2.6), (2.7) խնդրի լուծման գոյության համար *անհրաժեշտ է*

$$f \in C(\Omega_Q \cup Q), \quad \varphi \in C^2(Q), \quad \psi \in C^1(Q):$$

§ 2. Ֆուրյեի ձևափոխության կիրառումը ալիքային հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծումը սպանալու համար

Դիցուք տրված է $(2.1)-(2.3)$ խնդիրը: Մեր ուսումնասիրության պլանը հետևյալն է. նախ, Ֆուրյեի ձևափոխության ֆորմալ կիրառմամբ, առանց խիստ հիմնավորումների, մենք «կկռահենք» այն բանաձևը, որով $(2.1)-(2.3)$ խնդրի լուծումը արտահայտվում է $\varphi(x)$, $\psi(x)$ և $f(x,t)$ ֆունկցիաների միջոցով: Այնուհետև (ստացված բանաձևի օգնությամբ) կանդրադառնանք խնդրի խիստ հիմնավորված ուսումնասիրությանը, ինչպես նաև ստացված բանաձևի խիստ հիմնավորմանը:

Պարզության համար դիտարկենք

$$u_{tt} - \triangle_x u = 0, \quad x \in R_n,\ t>0, \tag{2.1^0}$$

համասեռ հավասարումը երեք տարածական փոփոխականի դեպքում, $n=3$, $x=(x_1,x_2,x_3)$:

Դիցուք u-ն (2.1^0) հավասարման լուծում է: Բազմապատկենք (2.1^0)-ն $e^{-i(x,\xi)}$-ով, որտեղ $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in R_3$, և ըստ x-ի ինտեգրենք R_3-ով: Կստանանք

$$\widetilde{u}_{tt} + |\xi|^2 \widetilde{u}(\xi,t) = 0, \quad t>0, \tag{$\widetilde{2.1}^0$}$$

որտեղ $\widetilde{u}(\xi,t) = \int\limits_{R_3} e^{-i(x,\xi)} u(x,t)\ dx$ հանդիսանում է $u(x,t)$ լուծման Ֆուրյեի ձևափոխությունը ըստ տարածական փոփոխականների: (2.2), (2.3) սկզբնական պայմաններից սպանում ենք

$$\widetilde{u}(\xi,t)\big|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(\xi), \tag{2.$\widetilde{2}$}$$

$$\widetilde{u}_t(\xi,t)\big|_{t=0} = \widetilde{\psi}(\xi) : \tag{2.$\widetilde{3}$}$$

($\widetilde{2}.1^0$), (2.$\widetilde{2}$), (2.$\widetilde{3}$) խնդիրը յուրաքանչյուր ֆիքսած $\xi \in R_3$-ի դեպքում հանդիսանում է Կոշիի խնդիր հաստատուն գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար, որի լուծումն ունի

$$\widetilde{u}(\xi,t) = \widetilde{\varphi}(\xi)\cos|\xi|t + \frac{\widetilde{\psi}(\xi)}{|\xi|}\sin|\xi|t$$

տեսքը: Հետևաբար, Ֆուրյեի հակադարձ ձևափոխության միջոցով $(2.1)-(2.3)$ խնդրի լուծումը ներկայացվում է

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{R_3}\widetilde{u}(\xi,t)e^{i(x,\xi)}\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{R_3}\widetilde{\varphi}(\xi)\cos|\xi|te^{i(x,\xi)}\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{R_3}\widetilde{\psi}(\xi)\frac{\sin|\xi|t}{|\xi|}e^{i(x,\xi)}\,d\xi = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_\varphi(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}u_\psi(x,t) \tag{2.8}$$

տեսքով, որտեղ

$$u_\alpha(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{R_3}\widetilde{\alpha}(\xi)\frac{\cos|\xi|t}{|\xi|^2}e^{i(x,\xi)}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{R_3}\left(\int\limits_{R_3}\alpha(y)e^{-i(y,\xi)}\,dy\right)e^{i(x,\xi)}\frac{\cos|\xi|t}{|\xi|^2}\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{R_3}\alpha(y)\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{R_3}e^{i(x-y,\xi)}\frac{\cos|\xi|t}{|\xi|^2}\,d\xi\right)dy = \int\limits_{R_3}K(x-y,t)\alpha(y)\,dy : \tag{2.9}$$

Այստեղ

$$K(z,t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{R_3}e^{i(z,\xi)}\frac{\cos|\xi|t}{|\xi|^2}\,d\xi, \quad z=(z_1,z_2,z_3)\in R_3 : \tag{2.10}$$

Քանի որ (2.10) ինտեգրալը կախված է միայն t-ից և $|z|$-ից, ապա բավարար է այն հաշվել միայն $z = (0, 0, |z|)$, $|z| \neq 0$, կետում

$$K(z,t) = K(0,0,|z|,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_0^{\infty} r^2\, dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} e^{ir\cos\theta|z|} \frac{\cos rt}{r^2} \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^2|z|} \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos rt \sin r|z|}{r}\, dr =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2|z|} \left(\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin r(|z|+t)}{r}\, dr + \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin r(|z|-t)}{r}\, dr \right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2|z|} \left(sgn(|z|+t) + sgn(|z|-t)\right) \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4\pi|z|} \begin{cases} 1, & |z| > t, \\ 0, & |z| < t : \end{cases}$$

Տեղադրելով ստացված արտահայտությունը (2.9)-ի մեջ՝ կստանանք

$$u_\alpha(x,t) = \int\limits_{R_3} K(x-y,t)\alpha(y)\, dy = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x-y|>t} \frac{\alpha(y)}{|x-y|}\, dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_t^{\infty} \frac{dr}{r} \int\limits_{|x-y|=r} \alpha(y)\, dS_y :$$

Հետևաբար

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-y|=t} \alpha(y)\, dS_y,$$

որտեղից, համաձայն (2.8)-ի, ստանում ենք

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-y|=t} \varphi(y)\, dS_y \right) + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|x-y|=t} \psi(y)\, dS_y : \qquad (2.11)$$

Այսպիսով, մենք ստացանք $(2.1^0), (2.2), (2.3)$ խնդրի լուծման տեսքը: (2.11) արտահայտությունը կոչվում է *Կիրխհոֆի բանաձև*:

§ 3. Կոշիի խնդիրը լարի տատանման հավասարման համար: Դալամբերի բանաձևը

Դիտարկենք հիպերբոլական տիպի համասեռ հավասարման պարզագույն օրինակ՝

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < +\infty,\ t > 0,$$

որտեղ $a > 0$ հաստատուն է: Այս հավասարումը նկարագրում է անվերջ լարի տատանումը, որտեղ $u(t,x)$ ֆունկցիան x կոորդինատ ունեցող կետի դիրքն է ժամանակի t պահին:

Քանի որ գրված հավասարումը $y = at$ փոփոխականի փոխարինմամբ ընդունում է $u_{yy} - u_{xx} = 0$ կանոնական տեսքը, ապա, առանց ընդհանրությունը խախտելու, կհամարենք $a = 1$.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < +\infty,\ t > 0: \tag{2.12}$$

Կոշիի խնդիրը (2.12) հավասարման համար կայանում է հետևյալում՝ գտնել (2.12) հավասարման այն $u \in C^2(x \in R_1, t \geq 0)$ լուծումը, որը բավարարում է

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2.13}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2.14}$$

սկզբնական պայմաններին, որտեղ $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ հայտնի ֆունկցիաներ են (սկզբնական տվյալներ): (2.13) պայմանը նկարագրում է սկզբնական $t = 0$ պահին լարի x կոորդինատ ունեցող կետի դիրքը, իսկ (2.14) պայմանը՝ արագությունը:

Լուծենք $(2.12), (2.13), (2.14)$ Կոշիի խնդիրը: Նախ գտնենք (2.12) հավասարման ընդհանուր լուծումը: (2.12) հավասարման բնութագրիչներ են հանդիսանում $x \pm t = C$, $C = const$, ուղիղները: (x,t) փոփոխականներից անցնենք (ξ, η),

$$\xi = x + t, \quad \eta = x - t,$$

փոփոխականներին: Նշանակենք $u(x,t) = v(\xi,\eta) = v(x+t, x-t)$: Նոր փոփոխականների համակարգում (2.12) հավասարումը կընդունի

$$v_{\xi\eta} = 0 \tag{2.15}$$

տեսքը: Գտնենք այս հավասարման ընդհանուր լուծումը: Ակնհայտ է, որ (2.15) հավասարման ցանկացած լուծման համար

$$v_\eta(\xi,\eta) = f^*(\eta),$$

որտեղ $f^*(\eta)$ ֆունկցիան կախված է միայն η փոփոխականից: Յուրաքանչյուր ξ-ի համար ինտեգրելով այս հավասարումը ըստ η փոփոխականի՝ կստանանք

$$v(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)\, d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{2.16}$$

որտեղ f_1 և f_2 միայն մեկ փոփոխականից, համապատասխանաբար ξ-ից և η-ից, կախված ֆունկցիաներ են: Տեղի ունի նաև հակառակը՝ կամայական f_1 և f_2 երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաների համար (2.16) բանաձևով որոշված $v(\xi,\eta)$ ֆունկցիան (2.15) հավասարման լուծում է: Քանի որ (2.15) հավասարման ցանկացած լուծում կարելի է ներկայացնել (2.16) տեսքով՝ համապատասխան f_1 և f_2 ընտրությամբ, ապա (2.16) բանաձևով տրվում է (2.15) հավասարման ընդհանուր լուծումը: Հետևաբար,

$$u(x,t) = f_1(x+t) + f_2(x-t) \tag{2.17}$$

ֆունկցիան (2.12) հավասարման ընդհանուր լուծումն է:

Ենթադրենք $(2.12)-(2.14)$ խնդրի լուծումը գոյություն ունի: Այդ դեպքում այն ներկայացվում է (2.17) տեսքով: Գտնենք այնպիսի f_1 և f_2 ֆունկցիաներ, որ բավարարվեն $(2.13), (2.14)$ սկզբնական պայմանները.

$$u\big|_{t=0} = u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{2.18}$$

$$u_t\big|_{t=0} = u_t(x,0) = f_1'(x) - f_2'(x) = \psi(x)\ : \tag{2.19}$$

Ինտեգրելով երկրորդ հավասարությունը x_0-ից x կստանանք

$$f_1(x) - f_2(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha + C,$$

որտեղ $C = f_1(x_0) - f_2(x_0)$: Այսպիսով ունենք, որ

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

և

$$f_1(x) - f_2(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha + C,$$

որտեղից գտնում ենք

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha + \frac{C}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\, d\alpha - \frac{C}{2} :$$

Այսպիսով, φ և ψ ֆունկցիաների միջոցով մենք որոշեցինք f_1 և f_2 ֆունկցիաները, որոնք տեղադրելով (2.17)-ի մեջ` կստանանք

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-t) + \varphi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\alpha)\, d\alpha : \tag{2.20}$$

(2.20) արտահայտությունը կոչվում է *Դալամբերի բանաձև*: Ենթադրելով, որ (2.12) – (2.14) խնդրի լուծումը գոյություն ունի, մենք ստացանք Դալամբերի բանաձևը, ինչն ապացուցում է լուծման միակությունը: Իրոք, եթե գոյություն ունենար (2.12) – (2.14) խնդրի մեկ այլ լուծում, ապա այն կներկայացվեր (2.20) Դալամբերի բանաձևով և կհամընկներ նախորդ լուծման հետ: Դիցուք φ ֆունկցիան երկու անգամ, իսկ ψ ֆունկցիան մեկ անգամ անընդհատ դիֆերենցելի են: Ակնհայտ է, որ այդ դեպքում (2.20) բանաձևով ներկայացված ֆունկցիան բավարարում է (2.12) հավասարմանը և (2.13), (2.14) սկզբնական պայմաններին (կարելի է ստուգել անմիջական տեղադրմամբ): Այսպիսով, ապացուցված է $(2.12), (2.13), (2.14)$ Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը:

Թեորեմ 2.3.1 *Դիցուք* $\varphi \in C^2(R_1)$, $\psi \in C^1(R_1)$*: Այդ դեպքում* (2.12), (2.13), (2.14) *Կոշիի խնդիրը ունի լուծում, որը տրվում է Դալամբերի* (2.20) *բանաձևով և այդ լուծումը միակն է:*

Դալամբերի բանաձևից բխում են Կոշիի խնդրի լուծման որոշ ուշագրավ հատկություններ:

Դիցուք $M(x_0, t_0)$-ը որևէ ֆիքսած կետ է, տանենք այդ կետով անցնող $x - t = x_0 - t_0$ և $x + t = x_0 + t_0$ բնութագրիչները, որոնք x առանցքը կհատեն $N(x_0 - t_0, 0)$ և $P(x_0 + t_0, 0)$ կետերում: MNP եռանկյունը (NP հիմքով կոնոիդը) կոչվում է *բնութագրիչ եռանկյուն*: Ըստ (2.20) բանաձևի՝ M կետում լուծման $u(x_0, t_0)$ արժեքը որոշվում է φ սկզբնական ֆունկցիայի արժեքներով N և P կետերում և ψ սկզբնական ֆունկցիայի արժեքներով NP հատվածի վրա.

$$u(M) = \frac{\varphi(N) + \varphi(P)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{NP} \psi(\alpha)\, d\alpha : \qquad (2.20')$$

Դիտարկենք երկու օրինակ:

Օրինակ 1: Դիցուք սկզբնական պահին բոլոր կետերը ունեն զրոյական արագություն. $\psi(x) \equiv 0$: Այդ դեպքում (2.20) բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - t) + \varphi(x + t)}{2} :$$

Լրացուցիչ ենթադրելով, որ $\varphi(x) \neq 0$ միայն (x_1, x_2) միջակայքում ($\varphi(x) \equiv 0$, երբ $x \leq x_1$ կամ $x \geq x_2$), կունենանք

$$u(x_0, t_0) = \frac{\varphi(x_0 - t_0) + \varphi(x_0 + t_0)}{2}, \quad \text{երբ} \quad (x_0 - t_0, x_0 + t_0) \subset (x_1, x_2),$$

$$u(x_0, t_0) = \frac{\varphi(x_0 - t_0)}{2}, \quad \text{երբ} \quad x_0 - t_0 \in (x_1, x_2),\ x_0 + t_0 \in (x_2, +\infty),$$

$$u(x_0, t_0) = \frac{\varphi(x_0 + t_0)}{2}, \quad \text{երբ} \quad x_0 - t_0 \in (-\infty, x_1),\ x_0 + t_0 \in (x_1, x_2),$$

$$u(x_0, t_0) = 0, \quad \text{երբ} \quad (x_0 - t_0, x_0 + t_0) \subset (-\infty, x_1)$$

կամ $(x_0-t_0, x_0+t_0) \subset (x_2, +\infty)$ կամ $x_0-t_0 \in (-\infty, x_1),\ x_0+t_0 \in (x_2, +\infty)$:

Օրինակ 2: Այժմ ենթադրենք, որ սկզբնական շեղումը զրոյական է. $\varphi(x) \equiv 0$, և ψ սկզբնական արագությունը զրոյից փարբեր է միայն (x_1, x_2) միջակայքում: (2.20) բանաձևից կստանանք

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \int\limits_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} \psi(\alpha)\, d\alpha, \quad \text{երբ} \quad (x_0 - t_0, x_0 + t_0) \subset (x_1, x_2),$$

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \int\limits_{x_0-t_0}^{x_2} \psi(\alpha)\, d\alpha, \quad \text{երբ} \quad x_0 - t_0 \in (x_1, x_2),\ x_0 + t_0 \in (x_2, +\infty),$$

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \int\limits_{x_1}^{x_0+t_0} \psi(\alpha)\, d\alpha, \quad \text{երբ} \quad x_0 - t_0 \in (-\infty, x_1),\ x_0 + t_0 \in (x_1, x_2),$$

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} \int\limits_{x_1}^{x_2} \psi(\alpha)\, d\alpha, \quad \text{երբ} \quad x_0 - t_0 \in (-\infty, x_1),\ x_0 + t_0 \in (x_2, +\infty),$$

$u(x_0, t_0) = 0,$ երբ $(x_0-t_0, x_0+t_0) \subset (-\infty, x_1)$ կամ $(x_0-t_0, x_0+t_0) \subset (x_2, +\infty)$:

Ձևակերպենք երկու պնդում, որոնք անմիջապես ստացվում են Դալամբերի բանաձևից որպես հետևանք:

Թեորեմ 2.3.2 *Եթե φ և ψ սկզբնական ֆունկցիաները կենտ են որևէ x_0 կետի նկատմամբ, ապա լուծումը այդ կետում զրո է ցանկացած t-ի համար՝ $u(x_0, t) \equiv 0$:*

x_0 կետի նկատմամբ φ և ψ ֆունկցիաների կենտ լինելը նշանակում է

$$\varphi(x_0 - x) = -\varphi(x_0 + x), \quad \psi(x_0 - x) = -\psi(x_0 + x) :$$

Համաձայն Դալամբերի բանաձևի՝ ունենք

$$u(x_0, t) = \frac{\varphi(x_0 - t) + \varphi(x_0 + t)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{x_0-t}^{x_0+t} \psi(\alpha)\, d\alpha = 0 :$$

Թեորեմ 2.3.3 *Եթե φ և ψ սկզբնական ֆունկցիաները զույգ են որևէ x_0 կետի նկատմամբ, ապա լուծման մասնական ածանցյալը այդ կետում զրո է ցանկացած t-ի համար՝ $u_x(x_0, t) \equiv 0$:*

x_0 կետի նկատմամբ φ և ψ ֆունկցիաների զույգ լինելը նշանակում է

$$\varphi(x_0 - x) = \varphi(x_0 + x), \quad \psi(x_0 - x) = \psi(x_0 + x) :$$

Ածանցելով (2.20) բանաձևը ըստ x-ի և հաշվի առնելով այն փաստը, որ զույգ ֆունկցիայի ածանցյալը կենտ ֆունկցիա է, կստանանք

$$u_x(x_0, t) = \frac{\varphi'(x_0 - t) + \varphi'(x_0 + t)}{2} + \frac{1}{2}\big(\psi(x_0 + t) - \psi(x_0 - t)\big) = 0 :$$

Լուծման կայունությունը: Ինչպես արդեն ցույց ենք տվել, (2.12) հավասարման լուծումը, որը բավարարում է (2.13) և (2.14) սկզբնական պայմաններին, որոշվում է միարժեքորեն: Այժմ ապացուցենք, որ սկզբնական պայմանների անընդհատ փոփոխվելու դեպքում լուծումը ևս անընդհատ է փոփոխվում: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 2.3.4 *Կամայական* $[0, t_0]$ *ժամանակահատվածի համար և կամայական* ε *ճշտության համար գոյություն ունի այնպիսի* $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, *որ* (2.12) *հավասարման ցանկացած երկու* $u_1(x,t)$ *և* $u_2(x,t)$ *լուծումներ* t_0 *ժամանակահատվածի ընթացքում իրարից կտարբերվեն* ε*-ից փոքր չափով՝*

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon, \quad 0 \le t \le t_0,$$

եթե

$$u_1\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad u_2\big|_{t=0} = \varphi_2(x),$$
$$u_{1t}\big|_{t=0} = \psi_1(x), \quad u_{2t}\big|_{t=0} = \psi_2(x),$$

սկզբնական ֆունկցիաները իրարից տարբերվեն δ*-ից փոքր չափով՝*

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta, \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta :$$

Ապացույց: Այս պնդման ապացույցը անմիջապես բխում է Դալամբերի բանաձևից: Ունենք

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \frac{\varphi_1(x+t) - \varphi_2(x+t)}{2} + \frac{\varphi_1(x-t) - \varphi_2(x-t)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)|\, d\alpha,$$

որտեղից ստանում ենք

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2}\delta 2t \le \delta(1+t_0) :$$

Վերցնելով $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+t_0}$, կունենանք այն, ինչ պահանջվում էր ապացուցել:

Եթե մաթեմատիկական խնդրի լուծումը անընդհատ է կախված լրացուցիչ պայմաններից (սկզբնական, եզրային և այլն), ապա ասում են, որ խնդիրը *կայուն* է:

Կասենք, որ մաթեմատիկական խնդիրը դրված է *կոռեկտ*, եթե խնդրի լուծումը գոյություն ունի, խնդիրը ունի միակ լուծում և խնդրի լուծումը անընդհատ է կախված նախնական փվյալներից (կայուն է):

Այսպիսով, մենք ցույց տվեցինք, որ Կոշիի խնդիրը լարի տատանման հավասարման համար դրված է կոռեկտ:

Ոչ կոռեկտ դրված խնդրի օրինակ կբերենք պարաբոլական և էլիպսական հավասարումներին նվիրված գլուխներում:

§ 4. Կոշիի խնդրի լուծման միակությունը ալիքային հավասարման համար

Այս պարագրաֆում կուսումնասիրենք Կոշիի խնդրի լուծման միակությունը:

Լեմմա 2.4.1 *Դիցուք* $u \in C^2(\overline{\Omega}_{x^0,t^0})$, $x^0 \in R_n$, $t^0 > 0$, *և*

$$u_{tt} - \triangle_x u = 0, \quad (x,t) \in \Omega_{x^0,t^0}, \tag{2.21}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in Q_{x^0,t^0}, \tag{2.22}$$

$$u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in Q_{x^0,t^0} : \tag{2.23}$$

Այդ դեպքում $\overline{\Omega}_{x^0,t^0}$*-ում* $u(x,t) \equiv 0$*:*

Ապացույց: Դիցուք $u(x,t)$-ն $(2.21)-(2.23)$ խնդրի լուծումն է: Վերցնենք կամայական $(\xi,\tau)\in\Omega_{x^0,t^0}$ կետ: Ցույց տանք, որ

$$u(\xi,\tau)=0: \tag{2.24}$$

Դիտարկենք Ω_{x^0,t^0} կոնին «զուգահեռ» (ξ,τ) գագաթով $\Omega_{\xi,\tau}$ ենթակոնը.

$$\Omega_{\xi,\tau}=\{|x-\xi|<\tau-t,\ 0<t<\tau\}\subset\Omega_{x^0,t^0}:$$

Ակնհայտ է, որ $u\in C^2(\overline{\Omega}_{\xi,\tau})$:

Բազմապատկենք (2.21) նույնությունը u_t-ով.

$$u_tu_{tt}-u_t\sum_{i=1}^n u_{x_ix_i}=0,\quad (x,t)\in\overline{\Omega}_{\xi,\tau}:$$

Քանի որ

$$u_tu_{tt}=\frac{1}{2}\big(u_t^2\big)_t,\quad u_tu_{x_ix_i}=(u_{x_i}u_t)_{x_i}-\frac{1}{2}\big(u_{x_i}^2\big)_t,\quad i=1,...,n,$$

ապա

$$\frac{1}{2}\Big(u_t^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\Big)_t-\sum_{i=1}^n(u_{x_i}u_t)_{x_i}=0,\quad (x,t)\in\overline{\Omega}_{\xi,\tau}: \tag{2.25}$$

Հետագա շարադրանքի պարզության համար t փոփոխականը նշանակենք x_{n+1}-ով, $t=x_{n+1}$, և (2.25) հավասարությունը գրենք

$$divA=A_{1x_1}+...+A_{nx_n}+A_{n+1x_{n+1}}=0 \tag{2.25$'$}$$

տեսքով, որտեղ $A=(A_1,...,A_n,A_{n+1})$ վեկտորը ունի հետևյալ կոմպոնենտները՝

$$A_i=-u_{x_i}u_{x_{n+1}},\ i=1,...,n,$$

$$A_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_{x_{n+1}}^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\right):$$

Ինտեգրելով $(2.25')$-ը $\Omega_{\xi,\tau}$-ով և կիրառելով Օստրոգրադսկու բանաձևը՝ կստանանք

$$\int\limits_{\partial\Omega_{\xi,\tau}}(A,\nu)\,dS=0, \tag{2.26}$$

որտեղ $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n, \nu_{n+1})$ վեկտորը $\partial\Omega_{\xi,\tau}$-ին տարված $\Omega_{\xi,\tau}$-ի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալն է: $\partial\Omega_{\xi,\tau}$ մակերևույթը կազմված է երկու կտորներից՝ $\partial\Omega_{\xi,\tau} = \overline{S}_{\xi,\tau} \cup \overline{Q}_{\xi,\tau}$: Գտնենք ν վեկտորը այդ մակերևույթներից յուրաքանչյուրի վրա: Ակնհայտ է, որ $Q_{\xi,\tau}$-ի վրա $\nu = (0, ..., 0, -1)$: Քանի որ $S_{\xi,\tau}$ մակերևույթը տրվում է

$$F(x_1, ..., x_{n+1}) \equiv \sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2 - (x_{n+1} - \tau)^2 = 0$$

հավասարումով, ապա նրա արտաքին միավոր նորմալը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\nu = \frac{\left(F_{x_1}, ..., F_{x_{n+1}}\right)}{\left(F^2_{x_1} + ... + F^2_{x_{n+1}}\right)^{1/2}} = \frac{(x_1 - \xi_1, ..., x_n - \xi_n, \tau - x_{n+1})}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + ... + (x_n - \xi_n)^2 + (\tau - x_{n+1})^2}} =$$

$$= \left(\frac{x_1 - \xi_1}{\sqrt{2}(\tau - x_{n+1})}, ..., \frac{x_n - \xi_n}{\sqrt{2}(\tau - x_{n+1})}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) : \qquad (2.27)$$

Ըստ (2.22) և (2.23) պայմանների՝ $A|_{x_{n+1}=0} = 0$, ուստի $\overline{Q}_{\xi,\tau}$-ի վրա $A = 0$ և (2.26) հավասարությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$0 = \int\limits_{S_{\xi,\tau}} \left[-\sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \frac{x_i - \xi_i}{\sqrt{2}(\tau - x_{n+1})} u_{x_{n+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(u^2_{x_{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} u^2_{x_i}\right)\right] dS =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int\limits_{S_{\xi,\tau}} \left[\sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_i} - \frac{x_i - \xi_i}{\tau - x_{n+1}} u_{x_{n+1}}\right)^2 + u^2_{x_{n+1}}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \xi_i)^2}{(\tau - x_{n+1})^2}\right)\right] dS =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int\limits_{S_{\xi,\tau}} \sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_i} - \frac{x_i - \xi_i}{\tau - x_{n+1}} u_{x_{n+1}}\right)^2 dS : \qquad (2.28)$$

Այստեղ օգտագործեցինք այն փաստը, որ $S_{\xi,\tau}$-ի վրա $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2 = (\tau - x_{n+1})^2$:

(2.28)-ից անմիջապես հետևում է, որ $S_{\xi,\tau}$-ի վրա

$$u_{x_1} = u_{x_{n+1}} \frac{x_1 - \xi_1}{\tau - x_{n+1}},$$
$$\cdots$$
$$u_{x_n} = u_{x_{n+1}} \frac{x_n - \xi_n}{\tau - x_{n+1}},$$

այսինքն՝ $S_{\xi,\tau}$-ի վրա

$$(u_{x_1}, ..., u_{x_n}, u_{x_{n+1}}) = u_{x_{n+1}} \left(\frac{x_1 - \xi_1}{\tau - x_{n+1}}, ..., \frac{x_n - \xi_n}{\tau - x_{n+1}}, 1\right),$$

որտեղից, համաձայն (2.27)-ի, ստանում ենք, որ $S_{\xi,\tau}$-ի վրա

$$(u_{x_1},...,u_{x_n},u_{x_{n+1}}) = u_{x_{n+1}}\sqrt{2}\nu\ :$$

Վերցնենք $S_{\xi,\tau}$ կոնային մակերևույթի ցանկացած ծնիչ, l-ով նշանակենք այդ ծնիչի ուղղության $(n+1)$-չափանի միավոր վեկտորը: Համաձայն վերջին հավասարության՝ այդ ծնիչի երկայնքով

$$\frac{\partial u}{\partial l} = u_{x_{n+1}}\sqrt{2}(\nu,l) = 0,$$

ինչը նշանակում է, որ $u = u(x_1,...,x_n,x_{n+1})$ ֆունկցիան $S_{\xi,\tau}$ կոնային մակերևույթի ծնիչի ուղղությամբ չի փոփոխվում: Ուստի, (2.24) հավասարությունը բխում է (2.22) պայմանից: Լեմման ապացուցված է:

Ապացուցված լեմմայից բխում է (2.5) − (2.7) Կոշիի լոկալացված խնդրի լուծման միակությունը, հետևաբար նաև (2.1) − (2.3) Կոշիի խնդրի լուծման միակությունը: Իրոք, դիցուք $u_1(x,t)$-ը և $u_2(x,t)$-ը (2.5)−(2.7) խնդրի լուծումներ են: Այդ դեպքում $u = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ տարբերությունը կհանդիսանա

$$u_{tt} - \triangle_x u = 0, \quad (x,t) \in \Omega_Q, \tag{2.5^0}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in Q, \tag{2.6^0}$$

$$u_t\big|_{t=0} = 0, \quad x \in Q\ : \tag{2.7^0}$$

խնդրի լուծում: Դա նշանակում է, որ $u(x,t)$ ֆունկցիան Ω_Q-ում բավարարում է $(2.21),(2.22),(2.23)$-ին: Համաձայն ապացուցված լեմմայի՝ ցանկացած $(x_0,t_0) \in\ \Omega_Q$ կետի դեպքում $u(x,t) \equiv 0\ \overline{\Omega}_{x^0,t^0}$-ում, հետևաբար $u_1(x,t) \equiv\ u_2(x,t)$ Ω_Q-ում: Այսպիսով, ապացուցված է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 2.4.1 (2.5)−(2.7) *խնդիրը չի կարող ունենալ մեկից ավելի լուծում:*

Ինչպես արդեն նշվել է, այս թեորեմից, մասնավորապես, հետևում է (2.1) − (2.3) Կոշիի խնդրի լուծման միակությունը:

Թեորեմ 2.4.2 (2.1)−(2.3) *խնդիրը չի կարող ունենալ մեկից ավելի լուծում:*

§ 5. Ալիքային հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը երեք պարածական փոփոխականների դեպքում

Այս պարագրաֆը նվիրված է $n = 3$ դեպքում (2.1) ալիքային հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությանը:

Նշանակենք

$$A_\varphi(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y-x|=t} \varphi(y)\, dS_y, \quad x \in R_3,\ t > 0: \tag{2.29}$$

(2.29) հավասարությունը երեք փոփոխականներից կախված յուրաքանչյուր $\varphi(x)$, $x \in R_3$, անընդհատ ֆունկցիայի համապատասխանության մեջ է դնում չորս չափանի տարածության $\{(x,t) : x \in R_3, t > 0\}$ կիսատարածությունում որոշած A_φ ֆունկցիա, ընդ որում՝ (x^0, t^0) կետում A_φ ֆունկցիայի արժեքը կախված է միայն $x^0 \in R_3$ կենտրոնով և $t^0 > 0$ շառավղով սֆերայի վրա φ ֆունկցիայի ընդունած արժեքներից: Դա նշանակում է, որ Ω_{x^0,t^0} կոնի (x^0, t^0) գագաթում, ուստի և Ω_{x^0,t^0} կոնի ցանկացած այլ կետում, A_φ ֆունկցիայի արժեքը որոշվում է միայն այդ կոնի $\overline{Q}_{x^0,t^0}$ հիմքի վրա φ ֆունկցիայի ընդունած արժեքներով: Հետևաբար, եթե $\varphi(x)$ ֆունկցիան տրված է ոչ թե ամբողջ $\{x \in R_3, t = 0\}$ հարթության, այլ որևէ $Q \subset \{x \in R_3, t = 0\}$ փիրույթի վրա, ապա A_φ ֆունկցիան որոշված է Q հիմքով Ω_Q կոնոիդի վրա:

Թեորեմ 2.5.1՝ *Դիցուք $\varphi \in C^3\,(Q)$, $\psi \in C^2\,(Q)$: Այդ դեպքում*

$$u(x,t) = \frac{\partial A_\varphi(x,t)}{\partial t} + A_\psi(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_Q, \tag{2.30}$$

ֆունկցիան

$$u_{tt} - (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_Q, \tag{2.31}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in Q, \tag{2.32}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in Q, \tag{2.33}$$

Կոշիի լոկալացված խնդրի լուծում է:

(2.30) արտահայտությունը կոչվում է *Կիրխհոֆի բանաձև*:

Մինչև թեորեմի ապացույցին անցնելը՝ նախ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը:

Լեմմա 2.5.1: *Դիցուք* (x^0, t^0) *կամայական կետ է* $\{x \in R_3, t > 0\}$ *կիսատարածությունից: Այդ դեպքում*

1. եթե $\varphi \in C^k\left(\overline{Q}_{x^0,t^0}\right),\ k \geq 0,$ *ապա* $A_\varphi(x,t) \in C^k\left(\overline{\Omega}_{x^0,t^0}\right),\ k = 0,1,2,...,$

2. եթե $\varphi \in C^k\left(\overline{Q}_{x^0,t^0}\right),\ k \geq 0,$ *ապա* $A_\varphi(x,t)\big|_{t=0} = 0,\ x \in \overline{Q}_{x^0,t^0},$

3. եթե $\varphi \in C^k\left(\overline{Q}_{x^0,t^0}\right),\ k \geq 1,$ *ապա* $\dfrac{\partial A_\varphi(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in \overline{Q}_{x^0,t^0},$

4. եթե $\varphi \in C^k\left(\overline{Q}_{x^0,t^0}\right),\ k \geq 2,$ *ապա* $\dfrac{\partial^2 A_\varphi(x,t)}{\partial t^2} - \triangle A_\varphi(x,t) = 0, x \in \overline{Q}_{x^0,t^0},$

5. եթե $\varphi \in C^k\left(\overline{Q}_{x^0,t^0}\right),\ k \geq 2,$ *ապա* $\dfrac{\partial^2 A_\varphi(x,t)}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = 0,\ x \in \overline{Q}_{x^0,t^0}:$

Ապացույց: (2.29)-ում կատարենք

$$y = x + \eta t$$

փոփոխականի փոխարինում, որտեղ $x = (x_1, x_2, x_3)$ ֆիքսած կետ է, t-ն ֆիքսած դրական թիվ է: Ըստ կոորդինատների՝ այս փոփոխականի փոխարինումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y_1 = x_1 + \eta_1 t,$$

$$y_2 = x_2 + \eta_2 t,$$

$$y_3 = x_3 + \eta_3 t :$$

Այդ դեպքում

$$A_\varphi(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y-x|=t} \varphi(y_1,y_2,y_3)\, dS_y =$$

$$= \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \varphi(x_1+\eta_1 t, x_2+\eta_2 t, x_3+\eta_3 t)\, dS_\eta : \tag{2.34}$$

Լեմմա 2.5.1-ի 1. և 2. պնդումները հետևում են (2.34) ներկայացումից և $\{(x,t) \in \overline{\Omega}_{x_0,t_0},\ |\eta| = 1\}$ փակ բազմության վրա ենթաինտեգրալային ֆունկցիայի անընդհատությունից:

3. պնդումը ապացուցելու համար հաշվենք $A_\varphi(x,t)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալը ըստ t փոփոխականի.

$$\frac{\partial A_\varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} \varphi(x+\eta t)\, dS_\eta + \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}\Big|_{y=x+\eta t}\eta_i\, dS_\eta =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} \varphi(x+\eta t)\, dS_\eta + \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} (\nabla\varphi(y),\eta)\big|_{y=x+\eta t}\, dS_\eta =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} \varphi(x+\eta t)\, dS_\eta + \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\eta|=1} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu}\Big|_{y=x+\eta t}\, dS_\eta, \tag{2.35}$$

որտեղ $\nu = \eta$ սֆերային պարված արտաքին միավոր նորմալն է: 3. պնդումը անմիջապես հետևում է (2.35) ներկայացումից, երբ $t=0$:

Այժմ ձևափոխենք (2.35) հավասարությունը (անցնելով y փոփոխականի), կստանանք

$$\frac{\partial A_\varphi(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi t^2}\int\limits_{|y-x|=t} \varphi(y)\, dS_y + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y-x|=t} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu}\, dS_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi t^2}\int\limits_{|y-x|=t} \varphi(y)\, dS_y + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y-x|\le t} \triangle\varphi(y)\, dy :$$

Այստեղ մենք օգտվեցինք Օստրոգրադսկու բանաձևից.

$$\int\limits_{|y-x|=t} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial\nu}\, dS_y = \int\limits_{|y-x|=t} (\nabla\varphi(y),\nu)\, dS_y =$$

$$= \int\limits_{|y-x|\le t} (div\nabla\varphi(y)\, dy = \int\limits_{|y-x|\le t} \triangle\varphi(y)\, dy :$$

Այսպիսով՝

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{t}A_\varphi + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_0^t d\rho \int\limits_{|y-x|=\rho} \triangle\varphi(y)\, dS_y :$$

Ածանցենք ստացված հավասարությունը ըստ t-ի.

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{t^2}A_\varphi + \frac{1}{t}\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \frac{1}{4\pi t^2}\int\limits_0^t d\rho \int\limits_{|y-x|=\rho} \triangle\varphi(y)\, dS_y +$$

$$+\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y-x|=t}\triangle\varphi(y)\,dS_y=-\frac{1}{t^2}A_\varphi+\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}A_\varphi+\frac{1}{4\pi t}\int\limits_0^t d\rho\int\limits_{|y-x|=\rho}\triangle\varphi(y)\,dS_y\right)-$$

$$-\frac{1}{4\pi t^2}\int\limits_0^t d\rho\int\limits_{|y-x|=\rho}\triangle\varphi(y)\,dS_y+\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y-x|=t}\triangle\varphi(y)\,dS_y=\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y-x|=t}\triangle\varphi(y)\,dS_y:$$

Մյուս կողմից ունենք

$$\triangle_x A_\varphi(x,t)=A_{\triangle\varphi}(x,t)=\frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y-x|=t}\triangle\varphi(y)\,dS_y,$$

որտեղից հետևում է 4. պնդումը:

5. պնդումը հետևում է 2. և 4. պնդումներից: Եթե $\varphi\in C^2\left(\overline{Q}_{x^0,t^0}\right)$, ապա $\triangle\varphi\in\ C\left(\overline{Q}_{x^0,t^0}\right)$ և $A_{\triangle\varphi}(x,t)\big|_{t=0}=0$: Լեմման ապացուցված է:

Այժմ ապացուցենք թեորեմը:

Համաձայն (2.4)-ի՝ բավարար է ապացուցել, որ թեորեմը տեղի ունի, եթե Q փիրույթի փոխարեն դիտարկենք $\overline{Q}_{x^0,t^0}\subset Q$ փակ գունդը, իսկ Ω_Q կոնոիդի փոխարեն՝ համապատասխան $\overline{\Omega}_{x^0,t^0}$ փակ կոնը:

Անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ եթե $\varphi\in C^3\left(\overline{Q}_{x^0,t^0}\right)$, $\psi\in C^2\left(\overline{Q}_{x^0,t^0}\right)$, ապա $u\in C^2\left(\overline{\Omega}_{x^0,t^0}\right)$ և

$$u_{tt}-(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3})=0,\quad (x,t)\in\Omega_{x^0,t^0},\tag{2.31$'$}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad x\in Q_{x^0,t^0},\tag{2.32$'$}$$

$$u_t\big|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in Q_{x^0,t^0}:\tag{2.33$'$}$$

$u(x,t)$ ֆունկցիայի պատկանելությունը $C^2\left(\overline{\Omega}_{x^0,t^0}\right)$ դասին հետևում է Լեմմա 2.5.1-ի պնդում 1.-ից, $(2.31')$ հավասարությունը՝ պնդում 4.-ից, $(2.32')$ և $(2.33')$ պայմանները՝ պնդումներ 2., 3., 5.-ից: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք 2.5.1՝ *Եթե $\varphi(x)$, $\psi(x)$ և $|\nabla\varphi(x)|$ ֆունկցիաները սահմանափակ են Q-ում, ապա* (2.30) *Կիրխհոֆի բանաձևով տրված* $(2.31)-(2.33)$ *խնդրի լուծումը բավարարում է հետևյալ անհավասարությանը՝*

$$|u(x,t)|\le\Phi_0+t(\Phi_1+\Psi_0),\quad (x,t)\in(\Omega_Q\cup Q),$$

որտեղ

$$\Phi_0 = \sup_Q |\varphi|, \quad \Phi_1 = \sup_Q |\nabla\varphi|, \quad \Psi_0 = \sup_Q |\Psi| :$$

Իրոք, ցանկացած $(x^0, t^0) \in Q$ կետի համար (ըստ (2.4)-ի), հաշվի առնելով (2.29), (2.30) և (2.35), ստանում ենք

$$|u(x^0,t^0)| \le \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \sup_Q |\varphi|\, dS_\eta + \frac{t^0}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \sup_Q |\nabla\varphi|\, dS_\eta + \frac{t^0}{4\pi} \int\limits_{|\eta|=1} \sup_Q |\psi|\, dS_\eta =$$

$$= \Phi_0 + t^0(\Phi_1 + \Psi_0) :$$

Ձևակերպենք համապատասխան պնդումները $\Omega = R_3$ մասնավոր դեպքում

$$u_{tt} - (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) = 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3,\ t > 0, \tag{2.36}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_3, \tag{2.37}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R_3, \tag{2.38}$$

Կոշիի խնդրի համար:

Թեորեմ 2.5.1 *Դիցուք* $\varphi \in C^3(R_3)$, $\psi \in C^2(R_3)$*: Այդ դեպքում*

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y-x|=t} \varphi(y)\, dS_y\right) + \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y-x|=t} \psi(y)\, dS_y \tag{2.39}$$

Կիրխհոֆի բանաձևով տրված ֆունկցիան $(2.36), (2.37), (2.38)$ *Կոշիի խնդրի լուծում է:*

Հետևանք 2.5.1 *Եթե* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *և* $|\nabla\varphi(x)|$ *ֆունկցիաները սահմանափակ են* R_3*-ում, ապա* (2.39) *Կիրխհոֆի բանաձևով տրված* $(2.31) - (2.33)$ *խնդրի լուծումը բավարարում է հետևյալ անհավասարությանը՝*

$$|u(x,t)| \le \Phi_0 + t(\Phi_1 + \Psi_0), \quad x \in R_3,\ t \ge 0,$$

որտեղ

$$\Phi_0 = \sup_{R_3} |\varphi|, \quad \Phi_1 = \sup_{R_3} |\nabla\varphi|, \quad \Psi_0 = \sup_{R_3} |\Psi| :$$

Դիտողություն: Թեորեմ 2.5.1-ում ենթադրվում է $\varphi \in C^3(R_3)$, $\psi \in C^2(R_3)$, մինչդեռ լուծման գոյության համար անհրաժեշտ են $\varphi \in C^2(R_3)$, $\psi \in C^1(R_3)$ պայմանները: Նշենք միայն, որ այս անհրաժեշտ պայմանները բավարար չեն լուծման գոյության համար, այսինքն՝ թեորեմում նշված պայմանները էական են. եթե սկզբնական պահի պայմանները C^2-ից են, ապա որոշ պահի լուծումը կարող է չպատկանել C^2 դասին:

§ 6. Ալիքային հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը երկու և մեկ պարածական փոփոխականների դեպքում

Նախորդ պարագրաֆում $n = 3$ դեպքի համար $(2.1) - (2.3)$ խնդրի ուսումնասիրությունը հիմնված էր

$$A_\varphi(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{|y-x|=t} \varphi(y)\, dS_y, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3,\ t > 0, \tag{2.29}$$

ֆունկցիայի հատկությունների վրա, որոնք ձևակերպված են Լեմմա 2.5.1-ում: Շարունակելով այս ֆունկցիայի ուսումնասիրությունը, $n = 2$ և $n = 1$ դեպքերի համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը կարելի է ստանալ $n = 3$ դեպքից «վայրէջքի» եղանակով: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 2.6.1 *Դիցուք* $\varphi \in C(R_3)$:

1. Եթե $\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \varphi(x_1, x_2)$, *այսինքն՝* φ *ֆունկցիան կախված չէ* x_3 *փոփոխականից, ապա* $A_\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ *ֆունկցիան նույնպես կախված չէ* x_3 *փոփոխականից, և այդ դեպքում*

$$A_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2 \le t^2} \frac{\varphi(y_1,y_2)\, dy_1\, dy_2}{\left(t^2 - (y_1-x_1)^2 - (y_2-x_2)^2\right)^{1/2}}, \tag{2.40}$$

2. եթե $\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \varphi(x_1)$, *այսինքն՝* φ *ֆունկցիան կախված չէ* x_2 *և* x_3 *փոփոխականներից, ապա* $A_\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ *ֆունկցիան նույնպես կախված չէ*

x_2 *և* x_3 *փոփոխականներից, և այդ դեպքում*

$$A_\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi(y_1)\,dy_1 :$$

Ապացույց: (2.29) բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$A_\varphi(x_1,x_2,x_3,t) = \frac{1}{4\pi t}\left(\int\limits_{S^+}\varphi(y_1,y_2)\,dS_y + \int\limits_{S^-}\varphi(y_1,y_2)\,dS_y\right),$$

որտեղ $S^+ = \{|y-x| = t\} \cap \{y_3 \geq x_3\}$-ը $\{|y-x| = t\}$ սֆերայի վերին կիսասֆերան է, իսկ $S^- = \{|y-x| = t\} \cap \{y_3 \leq x_3\}$-ը՝ ստորին կիսասֆերան: Այս երկու կիսասֆերաների պրոյեկցիաները $\{y_3 = 0\}$ հարթության վրա ներկայացնում են $K_t(x_1,x_2)$ շրջանը: Հետևաբար,

$$A_\varphi(x_1,x_2,x_3,t) = \frac{1}{4\pi t}\left(\int\limits_{K_t(x_1,x_2)}\varphi(y_1,y_2)\frac{dy_1dy_2}{|\nu_3|} + \int\limits_{K_t(x_1,x_2)}\varphi(y_1,y_2)\frac{dy_1dy_2}{|\nu_3|}\right),$$

որտեղ ν_3-ը համապատասխան կիսասֆերայի $\nu = (\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ արտաքին միավոր նորմալի երրորդ կոորդինատն է: Քանի որ $\{|y-x| = t\}$ սֆերայի արտաքին միավոր նորմալն ունի

$$\nu = \frac{y-x}{t}$$

տեսքը, ապա S^+ և S^- կիսասֆերաների համար

$$|\nu_3| = \frac{|y-x|}{t} = \frac{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}{t}$$

և

$$A_\varphi(x_1,x_2,x_3,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{K_t(x_1,x_2)}\frac{\varphi(y_1,y_2)\,dy_1dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} :$$

Լեմմայի առաջին պնդումն ապացուցված է:

Ենթադրենք φ ֆունկցիան կախված չէ նաև x_2 փոփոխականից: Այդ դեպքում (2.40)-ից կստանանք

$$A_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{K_t(x_1,x_2)}\frac{\varphi(y_1,y_2)\,dy_1dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi(y_1) \left(\int\limits_{x_2-\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}}^{x_2+\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}} \frac{dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} \right) dy_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi(y_1) \arcsin \frac{y_2-x_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}} \Bigg|_{y_2=x_2-\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}}^{y_2=x_2+\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2}} dy_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x_1-t}^{x_1+t} \varphi(y_1)\, dy_1 :$$

Լեմման ամբողջությամբ ապացուցված է:

$n = 3$ դեպքում (2.39) բանաձևը փալիս է (2.36)−(2.38) Կոշիի խնդրի լուծումը, երբ $\varphi \in C^3(R_3)$, $\psi \in C^2(R_3)$: Մասնավոր դեպքում, երբ φ և ψ ֆունկցիաները կախված չեն x_3 կամ x_3 և x_2 փոփոխականներից, այդ բանաձևը նորից փալիս է (2.36) − (2.38) խնդրի լուծումը: Բայց այդ դեպքում, համաձայն Լեմմա 2.6.1-ի, այդ լուծումները նույնպես կախված չեն համապատասխանաբար x_3 կամ x_3 և x_2 փոփոխականներից, այսինքն՝ (2.1) − (2.3) խնդրի լուծում են ($f(x,t) \equiv 0$), երբ $n = 2$ և $n = 1$:

Այսպիսով, $n = 2$ դեպքում

$$u_{tt} - (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in R_2,\ t > 0, \tag{2.41}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_2, \tag{2.42}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R_2, \tag{2.43}$$

Կոշիի խնդրի լուծումը տրվում է

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|y-x|\le t} \frac{\varphi(y_1,y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|y-x|\le t} \frac{\psi(y_1,y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} \tag{2.44}$$

բանաձևով: (2.44) արտահայտությունը կոչվում է Պուասոնի բանաձև:

$n = 1$ դեպքում, ինչպես արդեն գիտենք, Կոշիի խնդրի լուծումը ներկայացվում է (2.20) Դալամբերի բանաձևով, ուղղակի այս պարագրաֆում մենք այն ստացանք մեկ այլ՝ «վայրէջքի» եղանակով:

Ուշադրություն դարձնենք մեկ հանգամանքի վրա: $n = 2$ և $n = 1$ դեպքերում լուծումները ստացանք՝ օգտվելով $n = 3$ դեպքում լուծման գոյությունից, երբ ենթադրվում էր $\varphi \in C^3(R_3)$, $\psi \in C^2(R_3)$: Հետևաբար, ստացված բանաձևերը տեղի ունեն, երբ $\varphi \in C^3(R_2)$, $\psi \in C^2(R_2)$ և $\varphi \in C^3(R_1)$, $\psi \in C^2(R_1)$ համապատասխանաբար: Սակայն, ինչպես արդեն ցույց ենք տվել, $n = 1$ դեպքում ողորկության պայմանը կարելի է թուլացնել, բավարար է ենթադրել $\varphi \in C^2(R_1)$, $\psi \in C^1(R_1)$:

Նշենք, որ

$$u_{tt} - a^2 \triangle_x u = 0, \quad x \in R_3, \ t > t^0,$$

$$u\Big|_{t=t^0} = \varphi(x), \quad x \in R_3,$$

$$u_t\Big|_{t=t^0} = \psi(x), \quad x \in R_3,$$

Կոշիի խնդիրը, որտեղ $a > 0$ հաստատուն է, $t^0 \in R_1$, $\tau = a(t - t^0)$ փոփոխականի փոխարինմամբ բերվում է վերը ուսումնասիրված խնդրին և

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 (t-t^0)} \int\limits_{|y-x|=a(t-t^0)} \varphi(y)\, dS_y\right) +$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2 (t-t^0)} \int\limits_{|y-x|=a(t-t^0)} \psi(y)\, dS_y \tag{2.45}$$

ֆունկցիան այս խնդրի լուծում է:

§ 7. Ալիքների դիֆուզիայի մասին

Այս պարագրաֆում կհամոզվենք, որ Կոշիի խնդրի լուծումները ունեն պարբեր հատկություններ, որոնք կախված են տարածության n չափողականությունից: Դիտարկենք

$$u_{tt} - a^2 \triangle_x u = 0, \quad x \in R_n,\ t > 0, \tag{2.46}$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in R_n, \tag{2.47}$$

$$u_t\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R_n, \tag{2.48}$$

Կոշիի խնդիրը, որտեղ $\psi(x) \in C^2(R_n)$, $a > 0$ հաստատուն է:

Ենթադրենք գոյություն ունի այնպիսի $R > 0$, որ $\psi(x) > 0$, երբ $|x| < R$, $\psi(x) \equiv 0$, երբ $|x| \geq R$: Մենք կդիտարկենք $n = 3$ և $n = 2$ դեպքերը:

$n = 3$ դեպքում $(2.46) - (2.48)$ խնդրի լուծումը տրվում է

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} \psi(y)\, dS_y,\ x \in R_3,\ t > 0,$$

Կիրխհոֆի բանաձևով, որից հետևում է, որ ցանկացած ֆիքսած $x \in R_3,\ |x| > R$, կետի համար

$$u(x,t) > 0, \quad \text{երբ} \quad at \in (|x| - R, |x| + R),$$

$$u(x,t) = 0, \quad \text{երբ} \quad at \leq |x| - R \quad \text{կամ} \quad at \geq |x| + R\,:$$

Այլ կերպ ասած, եթե $|x| > R$, ապա

$$at - R < |x| < at + R$$

գնդային շերտում $u(x,t) > 0$ և $u(x,t) = 0$ այդ շերտից դուրս: Դա նշանակում է, որ սկզբնական պահին $\psi(x)$ ֆունկցիայի առաջացրած ազդեցությունը ժամանակի ընթացքում տարածվում է հետևյալ կերպ. առաջանում է գնդային ալիք $|x| = at+R$ ***առաջնային ճակատով*** և $|x| = at - R$ ***հետին ճակատով***, որոնք շարժվում են $\dfrac{d(at \pm R)}{dt} = a$ արագությամբ: Այդ գնդային ալիքի լայնությունը $2R$ է: Ցանկացած x, $|x| > R$, կետում $u(x,t) = 0$ (դադարի վիճակ է) քանի դեռ $at \leq |x| - R$ (մինչև առաջնային ճակատը կհասնի այդ կետին), այնուհետև $|x| - R < at < |x| + R$ ժամանակահատվածում $u(x,t) > 0$ (տատանվող վիճակ է) և հետո կրկին $u(x,t) = 0$ (դադարի վիճակ է), երբ $at \geq |x| + R$ (երբ ալիքի հետին ճակատը արդեն անցել է x կետով):

Առաջնային ճակատի առկայության հատկությունը բնորոշ է հիպերբոլական հավասարումների համար Կոշիի խնդրին, ինչը պայմանավորված է նման խնդրով նկարագրվող երևույթներում ազդեցության տարածման վերջավոր արագությամբ: Սակայն հետին ճակատի առկայությունը, որի անցնելուց հետո կետում վերականգնվում է դադարի վիճակը, եռաչափ խնդրի առանձնահատկություն է:

$n = 2$ դեպքում նման երևույթ չկա: Իրոք, $n = 2$ դեպքում $(2.46)-(2.48)$ խնդրի լուծումը տրվում է

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{|y-x|\le at} \frac{\psi(y_1,y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}},\ x \in R_2,\ t>0,$$

Պուասոնի բանաձևով: Ցանկացած $x \in R_2$, $|x| > R$, կետի համար

$$u(x,t) = 0, \quad \text{երբ} \quad at \le |x| - R,$$

$$u(x,t) > 0, \quad \text{երբ} \quad at > |x| - R:$$

Այսպիսով, $u(x,t) > 0$, երբ $|x| < at + R$ և $u(x,t) = 0$, երբ $|x| \ge at + R$: Դա նշանակում է, որ սկզբնական պահին $\psi(x)$ ֆունկցիայի առաջացրած ազդեցությունը ժամանակի ընթացքում տարածվում է հետևյալ կերպ. x, $|x| > R$, կետում $u(x,t) = 0$ դադարի վիճակը շարունակվում է մինչև $t = \dfrac{|x|-R}{a}$ պահը, երբ այդ կետով անցնում է a արագությամբ շարժվող $|x| = at + R$ առաջնային ճակատը, ժամանակի բոլոր հաջորդ $t > \dfrac{|x|-R}{a}$ պահերին $u(x,t) > 0$ և x կետում այլևս դադար չի լինի: Սակայն դժվար չէ նկատել, որ այդ կետում $u(x,t) \to 0$, երբ $t \to \infty$, ինչը նշանակում է, որ կետի շեղումը անվերջ փոքր է, երբ $t \to \infty$: Այդ կապակցությամբ ասում են, որ $n = 2$ դեպքում տեղի է ունենում ալիքի *հետին ճակատի դիֆուզիա* (հետին ճակատը բացակայում է):

Դյուամելի սկզբունքը: Այժմ ուսումնասիրենք Կոշիի խնդիրը անհամասեռ ալիքային հավասարման համար: Ակնհայտ է, որ բավարար է դիտարկել համասեռ սկզբնական պայմաններով դեպքը՝

$$u_{tt} - a^2\triangle_x u = f(x,t), \quad x \in R_n,\ t > 0, \tag{2.49}$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in R_n, \tag{2.50}$$

$$u_t\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in R_n : \tag{2.51}$$

Այդ նպատակով դիտարկենք

$$v_{tt} - a^2\triangle_x v = 0, \quad x \in R_n,\ t > \tau \geq 0, \tag{2.52}$$

$$v\Big|_{t=\tau} = 0, \quad x \in R_n, \tag{2.53}$$

$$v_t\Big|_{t=\tau} = f(x,\tau), \quad x \in R_n, \tag{2.54}$$

խնդիրը, որի լուծումը կախված է x, t փոփոխականներից և τ պարամետրից՝ $v = \ v(x,t,\tau)$: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը, որը կոչվում է *Դյուամելի* սկզբունք:

Թեորեմ 2.7.1 (Դյուամելի սկզբունքը) *Դիցուք* $v(x,t,\tau)$ *ֆունկցիան* (2.52), (2.53), (2.54) *խնդրի լուծում է: Այդ դեպքում*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t v(x,t,\tau)\, d\tau \tag{2.55}$$

ֆունկցիան (2.49), (2.50), (2.51) *խնդրի լուծում է:*

Ապացույց: Ածանցելով (2.55) բանաձևը երկու անգամ ըստ t փոփոխականի, հաշվի առնելով (2.53), (2.54) պայմանները՝ ստանում ենք

$$u_t = v(t,x,t) + \int\limits_0^t v_t(x,t,\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t v_t(x,t,\tau)\, d\tau, \tag{2.56}$$

$$u_{tt} = v_t(t,x,t) + \int\limits_0^t v_{tt}(x,t,\tau)\, d\tau = f(x,t) + \int\limits_0^t v_{tt}(x,t,\tau)\, d\tau :$$

Քանի որ ըստ x_i փոփոխականների ածանցման գործողությունը կարելի է տանել ինտեգրալի նշանի տակ, ապա

$$\triangle_x u = \triangle_x \int\limits_0^t v(x,t,\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t \triangle_x v(x,t,\tau)\, d\tau :$$

Հետևաբար,

$$u_{tt} - a^2\triangle_x u = f(x,t) + \int\limits_0^t v_{tt}(x,t,\tau)\, d\tau - a^2 \int\limits_0^t \triangle_x v(x,t,\tau)\, d\tau =$$

$$= f(x,t) + \int\limits_0^t \left(v_{tt}(x,t,\tau) - a^2\triangle_x v(x,t,\tau)\right)\, d\tau = f(x,t):$$

Այսպիսով, u ֆունկցիան բավարարում է (2.49) հավասարմանը: (2.55) և (2.56) ներկայացումներից անմիջապես հետևում է, որ u ֆունկցիան բավարարում է (2.50) և (2.51) պայմաններին: Թեորեմն ապացուցված է:

Եվ այսպես, մենք կարող ենք գրել

$$u_{tt} - a^2\triangle_x u = f(x,t), \quad x \in R_n,\ t > 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_n,$$

$$u_t\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R_n,$$

Կոշիի խնդրի լուծման տեսքը, եթե ունենք համասեռ հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծումը:

Գրենք այդ լուծումների տեսքը մեզ հայտնի դեպքերի համար: Ենթադրվում է, որ $f(x,\tau)$ ֆունկցիան յուրաքանչյուր $\tau \geq 0$ համար, որպես x փոփոխականից կախված ֆունկցիա, պատկանում է համապատասխան դասին ($n = 1$ դեպքում C^1 դասին, $n = 2,3$ դեպքերում C^2 դասին):

$n = 1$ ***(Դալամբերի բանաձև).***

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi$$

$$\left(\text{կամ, տես } (2.20'), u(M) = \frac{\varphi(N) + \varphi(P)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{NP} \psi(\alpha)\, d\alpha + \iint\limits_{MNP} f(x,t)\, dxdt\right),$$

$n = 2$ *(Պուասոնի բանաձև).*

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|y-x|\le at}\frac{\varphi(y_1,y_2)\,dy_1dy_2}{\sqrt{a^2t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|y-x|\le at}\frac{\psi(y_1,y_2)\,dy_1dy_2}{\sqrt{a^2t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{|y-x|\le a(t-\tau)}\frac{f(y_1,y_2,\tau)\,dy_1dy_2}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}},$$

$n = 3$ *(Կիրխհոֆի բանաձև).*

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|y-x|=at}\varphi(y)\,dS_y\right)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|y-x|=at}\psi(y)\,dS_y+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\int\limits_{|y-x|=a(t-\tau)}f(y,\tau)\,dS_y :$$

§ 8. Խառը խնդիրը հիպերբոլական հավասարման համար

Կիսաանվերջ լարի փափանումները: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. գտնել

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty, \quad (a > 0)$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$u(0,t) = \mu(t) \quad \Big(\text{կամ } u_x(0,t) = \nu(t)\Big), \quad t \ge 0,$$

եզրային և

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x < \infty,$$

սկզբնական պայմաններին:

Այս խնդիրը կոչվում է խառը խնդիր լարի փափանման հավասարման համար:

Պարզության համար կդիտարկենք $u(0,t) = 0$ համասեռ եզրային պայմանը, ինչը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ լարի ծայրը ամրացված է, ինչպես նաև $u_x(0,t) = 0$ համասեռ եզրային պայմանը, ինչը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ լարի ծայրը ազատ է:

Նախ դիտարկենք ամրացված ծայրով կիսաանվերջ լարի փափանումները՝ $u(0,t) = 0$: Տարածենք խնդիրը ամբողջ առանցքի վրա՝ շարունակելով սկզբնական ֆունկցիաները բացասական կիսաառանցքի վրա կենտ ձևով: Նշանակենք

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ x \geq 0, \\ -\varphi(-x), \ x < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), \ x \geq 0, \\ -\psi(-x), \ x < 0: \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ անվերջ լարի փափանումը նկարագրող

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{\widetilde{\varphi}(x-at) + \widetilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \widetilde{\psi}(\xi)\, d\xi$$

ֆունկցիան $\{x > 0, \ t > 0\}$ տիրույթում կիսաանվերջ լարի համար ձևակերպված խնդրի լուծում է. այդ ֆունկցիան բավարարում է հավասարմանը, սկզբնական պայմաններին և $\widetilde{u}(0,t) = 0$ եզրային պայմանին (Թեորեմ 2.3.2):

Վերադառնալով նախնական խնդրի $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ սկզբնական ֆունկցիաներին՝ լուծումը կներկայացվի հետևյալ ձևով.
$x - at > 0$ տիրույթում ($t < \dfrac{x}{a}$ և եզրի առկայությունը դեռևս չի դրսևորվում), կունենանք

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi,$$

$x - at < 0$ տիրույթում ($t > \dfrac{x}{a}$ և արդեն առկա է եզրի ազդեցությունը), հաշվի առնելով սիմետրիկ սահմաններում կենտ ֆունկցիայի ինտեգրալի զրո լինելը, կունենանք

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi \, :$$

Այժմ դիտարկենք ազատ ծայրով կիսաանվերջ լարի տատանումները՝ $u_x(0,t) = 0$: Նույն կերպ, խնդիրը դիտարկենք ամբողջ առանցքի վրա, բայց այժմ սկզբնական ֆունկցիաները զույգ ձևով շարունակելով բացասական կիսաառանցքի վրա: Նշանակենք

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), \; x \geq 0 \\ \varphi(-x), \; x < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), \; x \geq 0 \\ \psi(-x), \; x < 0 \, : \end{cases}$$

Այս դեպքում ևս ակնհայտ է, որ անվերջ լարի տատանումը նկարագրող

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{\widetilde{\varphi}(x-at) + \widetilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \widetilde{\psi}(\xi)\, d\xi$$

ֆունկցիան $\{x > 0, t > 0\}$ տիրույթում կիսաանվերջ լարի համար ձևակերպված խնդրի լուծում է, սակայն ի տարբերություն կենտ շարունակության դեպքի՝ այս դեպքում բավարարում է $\widetilde{u}_x(0,t) = 0$ եզրային պայմանին (Թեորեմ 2.3.3):

Վերադառնալով նախնական խնդրի $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ սկզբնական ֆունկցիաներին՝ լուծումը կներկայացվի հետևյալ ձևով.
երբ $t < \dfrac{x}{a}$ և եզրի առկայությունը դեռևս չի դրսևորվում, ինչպես նախորդ դեպքում, կունենանք

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi,$$

երբ $t > \dfrac{x}{a}$ և արդեն առկա է եզրի ազդեցությունը, հաշվի առնելով սիմետրիկ սահմաններում զույգ ֆունկցիայի ինտեգրալի հատկությունը, կունենանք

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int\limits_0^{at-x}\psi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi\right):$$

Վերջավոր լարի տատանումները: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. գտնել

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l,\ 0 < t < \infty, \quad (a > 0) \tag{2.57}$$

հավասարման լուծումը, որը բավարարում է

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2.58}$$

սկզբնական պայմաններին և

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{2.59}$$

եզրային պայմաններին, ինչը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ լարի ծայրերը ամրացված են:

Ինչպես և նախորդ դեպքերում, խնդիրը տարածենք ամբողջ առանցքի վրա: Սկզբնական ֆունկցիաները շարունակենք՝ շարունակված ֆունկցիաները նշանակելով $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, հետևյալ ձևով. նախ կենտ ձևով շարունակենք $[0,l]$-ից $[-l,l]$,

$$\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l,$$

$$\widetilde{\psi}(x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l,$$

$$\widetilde{\varphi}(x) = -\varphi(-x), \quad -l \le x \le 0,$$

$$\widetilde{\psi}(x) = -\psi(-x), \quad -l \le x \le 0,$$

այնուհետև շարունակենք $2l$ պարբերությամբ ամբողջ առանցքի վրա՝

$$\widetilde{\varphi}(x \pm 2lk) = \widetilde{\varphi}(x), \quad -l \le x \le l, \quad k = \pm\, 1, 2, ...$$

$$\widetilde{\psi}(x \pm 2lk) = \widetilde{\psi}(x), \quad -l \le x \le l, \quad k = \pm\, 1, 2, ... :$$

Ակնհայտ է, որ անվերջ լարի տատանումը նկարագրող

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{\widetilde{\varphi}(x-at)+\widetilde{\varphi}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\widetilde{\psi}(\xi)\,d\xi$$

ֆունկցիան $(2.57), (2.58), (2.59)$ խնդրի լուծում է ((2.59) եզրային պայմանը բավարարված է՝ համաձայն Թեորեմ 2.3.2-ի): Ստացված բանաձևում նախնական խնդրի $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ սկզբնական ֆունկցիաներին վերադառնալու համար, ինչպես նախորդ դեպքերում, անհրաժեշտ է $\{0 < x < l,\ t > 0\}$ տիրույթում $\widetilde{\varphi}$ և $\widetilde{\psi}$ ֆունկցիաների արժեքները արտահայտել $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաների արժեքների միջոցով, ինչը թողնում ենք ընթերցողին:

§ 9. Փոփոխականների անջատման մեթոդը

Համասեռ հավասարումներ: Փոփոխականների անջատման կամ Ֆուրյեի մեթոդը մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման հիմնական մեթոդներից է, որը կշարադրենք նախ $(2.57), (2.58), (2.59)$ ամրացված ծայրերով լարի տատանման խնդրի համար: Քանի որ (2.57) հավասարումը գծային է և համասեռ, ուստի երկու մասնավոր լուծումների գումարը ևս այդ հավասարման լուծում է: Փորձենք գտնել (2.57) հավասարման այնպիսի մասնավոր լուծումներ, որոնց գումարը կլինի $(2.57), (2.58), (2.59)$ խնդրի լուծում: Նախ լուծենք հետևյալ օժանդակ խնդիրը. գտնել (2.57) հավասարման այն ոչ տրիվիալ (ոչ նույնաբար զրո) լուծումները, որոնք բավարարում են (2.59) եզրային պայմաններին և ունեն

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2.60}$$

տեսքը, որտեղ $X(x)$ ֆունկցիան կախված է միայն x փոփոխականից, $T(t)$ ֆունկցիան կախված է միայն t փոփոխականից: Տեղադրելով (2.60) տեսքի $u(x,t)$ ֆունկցիան (2.57) հավասարման մեջ՝ ստանում ենք

$$X(x)T''(t) - a^2X''(x)T(t) = 0,$$

որտեղից, հաշվի առնելով $X(x) \not\equiv 0$, $T(t) \not\equiv 0$, ստանում ենք

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} : \tag{2.61}$$

Որպեսզի (2.60) ֆունկցիան լինի (2.57) հավասարման լուծում, անհրաժեշտ է, որ (2.61) հավասարությունը տեղի ունենա $\{(x,t) : 0 < x < l,\ t > 0\}$ փիրույթի բոլոր կետերի համար: (2.61) հավասարության ձախ մասը կախված է միայն x-ից, իսկ աջ մասը՝ միայն t-ից: Ֆիքսելով x փոփոխականի որևէ արժեք և փոփոխելով t փոփոխականը (կամ հակառակը)՝ ստանում ենք, որ (2.61) հավասարության աջ և ձախ մասերը նույնաբար հավասար են միևնույն հաստատունին: Այդ հաստատունը նշանակենք λ-ով.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda :$$

Այստեղից $X(x)$ և $T(t)$ ֆունկցիաների համար ստանում ենք

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0, \quad 0 < x < l, \tag{2.62}$$

$$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad T(t) \not\equiv 0, \quad t > 0, \tag{2.63}$$

սովորական դիֆերենցիալ հավասարումները: (2.59) եզրային պայմաններից ունենք

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0,$$

որտեղից հետևում է, որ

$$X(0) = X(l) = 0 : \tag{2.64}$$

Այսպիսով $X(x)$ ֆունկցիայի համար ստացանք հետևյալ խնդիրը՝ գտնել λ հաստատունի այն արժեքները, որոնց համար

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad X(0) = X(l) = 0, \tag{2.65}$$

խնդիրն ունի ոչ զրոյական լուծում: Այդպիսի λ հաստատունները կոչվում են (2.65) խնդրի սեփական արժեքներ, իսկ համապատասխան լուծումները՝ սեփական ֆունկցիաներ: Այս խնդիրն անվանում են նաև Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիր: Դիտարկենք $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ և $\lambda < 0$ հնարավոր դեպքերը:

1. $\lambda > 0$ դեպքում (2.65) խնդիրը չունի ոչ տրիվիալ լուծում: Իրոք, (2.62) հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

տեսքը: (2.64) եզրային պայմաններից ունենք

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} = 0, \end{cases}$$

որտեղից $C_1 = C_2 = 0$ և $X(x) \equiv 0$:

2. $\lambda = 0$ դեպքում (2.65) խնդիրը կրկին չունի ոչ տրիվիալ լուծում: Իրոք, այս դեպքում (2.62) հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$X(x) = C_1 x + C_2 :$$

(2.64) եզրային պայմաններից ունենք

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0, \\ X(l) = C_1 l + C_2 = 0, \end{cases}$$

որտեղից $C_1 = C_2 = 0$ և $X(x) \equiv 0$:

3. $\lambda < 0$ դեպքում (2.62) հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$X(x) = D_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + D_2 \sin\sqrt{-\lambda}x :$$

(2.64) եզրային պայմաններից ունենք

$$\begin{cases} X(0) = D_1 = 0, \\ X(l) = D_1 \cos\sqrt{-\lambda}l + D_2 \sin\sqrt{-\lambda}l = 0, \end{cases}$$

որտեղից $D_1 = 0$ և $D_2 \sin\sqrt{-\lambda}l = 0$: Եթե $X(x) \not\equiv 0$, ապա $D_2 \neq 0$ և $\sin\sqrt{-\lambda}l = 0$, այսինքն՝

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

որտեղ $n = 1, 2, ...$: Հետևաբար, (2.65) խնդիրը կարող է ունենալ ոչ տրիվիալ լուծումներ միայն

$$-\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, ...$$

արժեքների (սեփական արժեքների) դեպքում: Յուրաքանչյուր λ_n-ին համապատասխանում է

$$X_n(x) = D_n \sin\frac{\pi n}{l}x$$

լուծումը (սեփական ֆունկցիան), որտեղ D_n-ը կամայական հաստատուն է: λ_n-ին համապատասխանող (2.63) հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi a n}{l}t + B_n \sin\frac{\pi a n}{l}t$$

տեսքը, որտեղ A_n-ը և B_n-ը կամայական հաստատուններ են:

Այսպիսով,

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \Big(A_n \cos\frac{\pi a n}{l}t + B_n \sin\frac{\pi a n}{l}t\Big) \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad n = 1, 2, ...$$

ֆունկցիաները (2.57) հավասարման մասնավոր լուծումներ են, որոնք բավարարում են (2.59) եզրային պայմաններին և ներկայացվում են երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով, որոնցից մեկը կախված է միայն x-ից, մյուսը՝ միայն t-ից: Այս լուծումները կարող են բավարարել նախնական խնդրի (2.58) սկզբնական պայմաններին միայն մասնավոր φ և ψ ֆունկցիաների համար:

Այժմ վերադառնանք $(2.57), (2.58), (2.59)$ ընդհանուր խնդրին: Ենթադրենք A_n, B_n գործակիցները այնպիսին են, որ

$$u(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos\frac{\pi a n}{l}t + B_n \sin\frac{\pi a n}{l}t\Big) \sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (2.66)$$

շարքը, ինչպես նաև այն շարքերը, որոնք ստացվում են այս շարքը երկու անգամ անդամ առ անդամ ածանցելիս ըստ x և t փոփոխականների, հավասարաչափ զուգամետ են $\{0 \leq x \leq l,\ t \geq 0\}$ բազմության վրա:

Պարզ է, որ $u(x,t)$ ֆունկցիան կբավարարի ինչպես (2.59) եզրային պայմաններին, այնպես էլ (2.57) հավասարմանը: (2.58) սկզբնական պայմաններից գտնենք A_n, B_n գործակիցները: Ունենք

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{2.67}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin\frac{\pi n}{l}x : \tag{2.68}$$

Եթե φ և ψ ֆունկցիաները կարելի է ներկայացնել Ֆուրյեի շարքով, ապա

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi, \tag{2.69}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi : \tag{2.70}$$

$(2.69), (2.70)$ շարքերի և $(2.67), (2.68)$ բանաձևերի համեմատությունից երևում է, որ սկզբնական պայմանների բավարարման համար անհրաժեշտ է վերցնել

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{1}{\pi n a}\psi_n, \tag{2.71}$$

և այդ դեպքում (2.66) շարքով ներկայացված $u(x,t)$ ֆունկցիան կհանդիսանա $(2.57), (2.58), (2.59)$ խնդրի լուծում:

Այսպիսով, մենք լուծումը ներկայացրինք (2.66) շարքի տեսքով: Եթե (2.66) շարքը տարամիտում է կամ այդ շարքով ներկայացված ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ, ապա, իհարկե, այն չի կարող լինել (2.57) դիֆերենցիալ հավասարման լուծում:

Այժմ տեսնենք, թե ինչ պայմանների պետք է բավարարեն φ և ψ ֆունկցիաները, որպեսզի (2.71) բանաձևով որոշված գործակիցներով (2.66) շարքը և այն շարքերը, որոնք ստացվում են այդ շարքը երկու անգամ անդամ առ անդամ ածանցելիս ըստ x և t փոփոխականների, լինեն հավասարաչափ զուգամետ $\{0 \leq x \leq l,\ t \geq 0\}$-ում:

Քանի որ

$$|u_n(x,t)| \leq |A_n| + |B_n|,$$

ապա

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \tag{2.72}$$

շարքը (2.66) շարքի մաժորանտ է և (2.72) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (2.66) շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը:

$u_t(x,t)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը ստանալու նպատակով ուսումնասիրենք

$$u_t(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi a n}{l} \left(-A_n \sin\frac{\pi a n}{l} t + B_n \cos\frac{\pi a n}{l} t\right) \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{2.73}$$

շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը: (2.73) շարքի համար մաժորանտ է

$$\frac{\pi a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(|A_n| + |B_n|\right) \tag{2.74}$$

շարքը: Եվ վերջապես, $u_{tt}(x,t)$ և $u_{xx}(x,t)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը ստանալու նպատակով ուսումնասիրենք

$$u_{tt}(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} =$$

$$= -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos\frac{\pi a n}{l} t + B_n \sin\frac{\pi a n}{l} t\right) \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{2.75}$$

$$u_{xx}(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos\frac{\pi a n}{l} t + B_n \sin\frac{\pi a n}{l} t\right) \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{2.76}$$

շարքերի հավասարաչափ զուգամիտությունը: Այս շարքերի համար հաստատուն բազմապատկիչի ճշտությամբ մաժորանտ շարք է հանդիսանում

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(|A_n| + |B_n|\right) \tag{2.77}$$

շարքը: Այնուհետև, հաշվի առնելով A_n, B_n գործակիցների (2.71) ներկայացումը, (2.72), (2.73), (2.77) շարքերի զուգամիտության խնդիրը բերվում է

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n|, \quad k = 0, 1, 2, \tag{2.78}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n|, \quad k = -1, 0, 1, \tag{2.79}$$

շարքերի զուգամիտության խնդրին:

Համաձայն Ֆուրյեի շարքերի հայտնի հատկությունների

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n|, \quad k = 0, 1, 2,$$

շարքերի զուգամիտության համար բավարար է ենթադրել, որ $\varphi \in C^2[0,l]$ ֆունկցիան ունի երրորդ կարգի կտոր առ կտոր անընդհատ ածանցյալ և տեղի ունի

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \tag{2.80}$$

պայմանը, իսկ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n|, \quad k = -1, 0, 1,$$

շարքերի զուգամիտության համար բավարար է ենթադրել, որ $\psi \in C^1[0,l]$ ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի կտոր առ կտոր անընդհատ ածանցյալ և տեղի ունի

$$\psi(0) = \psi(l) = 0 \tag{2.81}$$

պայմանը: Այսպիսով, ապացուցվեց հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2.9.1 *Դիցուք $\varphi \in C^2[0,l]$ ֆունկցիան ունի երրորդ կարգի կտոր առ կտոր անընդհատ ածանցյալ, $\psi \in C^1[0,l]$ ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի կտոր առ կտոր անընդհատ ածանցյալ և տեղի ունեն (2.80), (2.81) պայմանները: Այդ դեպքում (2.66) շարքով ներկայացված $u(x,t)$*

ֆունկցիան, որտեղ A_n, B_n գործակիցները որոշվում են (2.71) *բանաձևով,* $(2.57), (2.58), (2.59)$ *խնդրի լուծում է:*

Ստացիոնար անհամասեռությամբ հավասարումներ: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. գտնել

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \quad 0 < x < l,\ 0 < t < \infty, \quad (a > 0) \tag{2.82}$$

անհամասեռ հավասարման լուծումը, որը բավարարում է

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2.83}$$

սկզբնական պայմաններին և

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{2.84}$$

համասեռ եզրային պայմաններին:

Լուծումը փնտրենք

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x) \tag{2.85}$$

երկու ֆունկցիաների գումարի տեսքով, որոնք բավարարում են (2.84) եզրային պայմանին: $w(x)$ ֆունկցիան կոչվում է լուծման ստացիոնար մաս: Պահանջենք, որ $v(x,t)$ ֆունկցիան բավարարի

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

համասեռ հավասարմանը: Համաձայն (2.83) պայմանի

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x) = \varphi(x) - w(x), \tag{2.86}$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) = \psi(x) :$$

Այսպիսով, $v(x)$ ֆունկցիայի համար ստացանք խնդիր, որը կարելի է լուծել փոփոխականների անջատման մեթոդով:

Տեղադրելով (2.85) ներկայացումը (2.82) հավասարման մեջ՝ $w(x)$ ֆունկցիայի համար կստանանք

$$a^2 w_{xx} + f(x) = 0,$$

հավասարումը, որը լուծվում է երկու անգամ ինտեգրելով ըստ x փոփոխականի՝ հաշվի առնելով $w(0) = w(l) = 0$ եզրային պայմանները: Տեղադրելով $w(x)$ ֆունկցիան (2.86) սկզբնական պայմանի մեջ կարող ենք գտնել $v(x)$ ֆունկցիան:

Ընդհանուր անհամասեռությամբ հավասարումներ: Դիցուք տրված է

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t < \infty, \quad (a > 0) \tag{2.87}$$

անհամասեռ հավասարումը, ինչը համապատասխանում է այն դեպքին, երբ ազդող արտաքին ուժը փոփոխվում է ժամանակի ընթացքում:

Դիտարկենք $(2.87), (2.83), (2.84)$ խնդիրը: Լուծումը փնտրենք

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{2.88}$$

տեսքով: Ներկայացնենք հավասարման $f(x,t)$ աջ մասը և (2.83) սկզբնական ֆունկցիաները Ֆուրյեի համապատասխան շարքերով.

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t) \sin\frac{\pi n}{l}\xi \, d\xi, \tag{2.89}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l}\xi \, d\xi, \tag{2.90}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l}\xi \, d\xi : \tag{2.91}$$

Տեղադրելով (2.88) և (2.89) արտահայտությունները (2.87) հավասարման մեջ՝ ստանում ենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n''(t) + \left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 u_n(t) \right) \sin\frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

որտեղից

$$u_n''(t) + \left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t), \quad n = 1, 2, ... : \tag{2.92}$$

Այսպիսով, $u_n(t)$ ֆունկցիան որոշելու համար սպացանք հաստատուն գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարում: (2.83) սկզբնական պայմաններից ստանում ենք

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin\frac{\pi n}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(0) \sin\frac{\pi n}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

որտեղից

$$u_n(0) = \varphi_n, \quad u_n^{'}(0) = \psi_n : \tag{2.93}$$

Լուծելով $(2.92), (2.93)$ խնդիրը կստանանք $u_n(t)$ ֆունկցիան:

Անհամասեռ եզրային պայմաններ: Դիտարկենք առաջին խառը խնդիրը լարի տատանման հավասարման համար ընդհանուր դեպքում.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t < \infty, \quad (a > 0)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \ge 0 :$$

Այս խնդիրը լուծելու համար ներմուծենք նոր $v(x,t)$ անհայտ ֆունկցիա.

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t),$$

որտեղ ենթադրվում է, որ $U(x,t)$ ֆունկցիան հայտնի է: $v(x,t)$ ֆունկցիան պետք է լինի

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = \widetilde{f}(x,t)$$

հավասարման լուծում, որտեղ $\widetilde{f}(x,t) = f(x,t) - \left(U_{tt} - a^2 U_{xx}\right)$, և բավարարի հետևյալ սկզբնական և եզրային պայմաններին՝

$$v(x,0) = \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x,0),$$

$$v_t(x,0) = \widetilde{\psi}(x) = \psi(x) - U_t(x,0),$$

$$v(0,t) = \widetilde{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0,t),$$

$$v(l,t) = \widetilde{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l,t) :$$

Ընտրենք $U(x,t)$ ֆունկցիան այնպես, որ

$$\widetilde{\mu}_1(t) = \widetilde{\mu}_2(t) = 0 :$$

Այդ նպատակով կարող ենք վերցնել

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\big(\mu_2(t) - \mu_1(t)\big) :$$

Այսպիսով, $u(x,t)$ ֆունկցիայի համար ընդհանուր եզրային պայմաններով խնդիրը բերվեց $v(x,t)$ ֆունկցիայի համար համասեռ եզրային պայմաններով խնդրին:

Գլուխ 3

Պարաբոլական տիպի հավասարումներ

$u(x,t)$, $x \in R_n$, $t > 0$, ֆունկցիան կոչվում է

$$Lu \equiv u_t - \triangle_x u = f(x,t), \quad x \in R_n,\ t > 0, \tag{3.1}$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_n, \tag{3.2}$$

Կոշիի խնդրի լուծում, եթե u-ն պատկանում է

$$C^2\,(x \in R_n, t > 0) \cap C(x \in\ R_n, t \geq\ 0)$$

բազմությանը, $\{x \in R_n, t > 0\}$ տիրույթում բավարարում է (3.1) հավասարմանը և $t = 0$ դեպքում (3.2) պայմանին: (3.2) պայմանը կոչվում է սկզբնական պայման, իսկ $\varphi(x)$ ֆունկցիան կոչվում է սկզբնական ֆունկցիա:

Լուծման սահմանումից ակնհայտորեն հետևում է, որ (3.1), (3.2) խնդրի լուծման գոյության համար անհրաժեշտ են $f \in C(x \in R_n, t > 0)$ և $\varphi \in C(R_n)$ պայմանները:

Ինչպես և ալիքային հավասարման դեպքում, մեր ուսումնասիրության պլանը հետևյալն է. սկզբում Ֆուրյեի ձևափոխության միջոցով (առանց հիմնավորման) «կկռահենք» $(3.1), (3.2)$ խնդրի լուծման բանաձևը, այնուհետև կանդրադառնանք խնդրի մաթեմատիկական խիստ հետազոտմանը:

§ 1. Ֆուրյեի ձևափոխության կիրառումը ջերմահաղորդականության հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծումը սփանալու համար

Պարզության համար դիտարկենք համասեռ հավասարման դեպքը.

$$u_t - \triangle_x u = 0, \quad x \in R_n, \ t > 0, \tag{3.1^0}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_n : \tag{3.2}$$

Եվ այսպես, դիցուք $u(x,t)$ ֆունկցիան $(3.1^0), (3.2)$ խնդրի լուծում է: Բազմապատկենք (3.1^0) նույնության աջ և ձախ մասերը $e^{-i(x,\xi)}$-ով, որտեղ ξ-ն R_n տարածության կամայական կետ է, և ստացված հավասարությունը ինտեգրենք R_n-ով: Կստանանք

$$\widetilde{u}_t(\xi,t) + |\xi|^2 \widetilde{u}(\xi,t) = 0, \quad x \in R_n, \ t > 0, \tag{3.$\widetilde{1}^0$}$$

որտեղ $\widetilde{u}(\xi,t)$-ն $t > 0$ պարամետրից կախված $u(x,t)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի ձևափոխությունն է ըստ $x \in R_n$ փոփոխականի.

$$\widetilde{u}(\xi,t) = \int\limits_{R_n} u(x,t) e^{-i(x,\xi)}\, dx :$$

Նույն ձևով, (3.2) սկզբնական պայմանից կստանանք

$$\widetilde{u}_t(\xi,t)\big|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(\xi) : \tag{3.$\widetilde{2}$}$$

Յուրաքանչյուր ֆիքսած $\xi \in R_n$ դեպքում $(3.\widetilde{1}^0), (3.\widetilde{2})$ խնդիրը $\widetilde{u}(\xi,t)$ ֆունկցիայի համար հանդիսանում է Կոշիի խնդիր հաստատուն գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար, որի լուծումն ունի

$$\widetilde{u}(\xi,t) = e^{-|\xi|^2 t} \widetilde{\varphi}(\xi), \quad t > 0, \ \xi \in R_n,$$

տեսքը: Հետևաբար, Ֆուրյեի հակադարձ ձևափոխության միջոցով, $(3.1^0), (3.2)$ խնդրի լուծումը ներկայացվում է

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R_n} \widetilde{u}(\xi,t) e^{i(x,\xi)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2 t} \widetilde{\varphi}(\xi) e^{i(x,\xi)}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2 t} e^{i(x,\xi)} \int\limits_{R_n} \varphi(y) e^{-i(y,\xi)} \, dy \, d\xi =$$

$$= \int\limits_{R_n} \varphi(y) \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R_n} e^{-|\xi|^2 t} e^{i(x-y,\xi)} \, d\xi \right) \, dy = \int\limits_{R_n} K(x-y,t)\varphi(y) \, dy$$

տեսքով, որտեղ

$$K(z,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R_n} e^{i(z,\xi)} e^{-|\xi|^2 t} \, d\xi, \quad z = (z_1, ..., z_n) \in R_n, \ t > 0 :$$

$K(z,t)$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի

$$K(z,t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iz_j \xi_j} e^{-\xi_j^2 t} \, d\xi_j = \prod_{j=1}^{n} k(z_j, t),$$

հավասարությունը, որտեղ

$$k(\alpha,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha\xi} e^{-\xi^2 t} \, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} \cos \alpha\xi \, d\xi, \quad \alpha \in R_1, \ t > 0 :$$

Հաշվի առնելով, որ

$$\frac{\partial k}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi \sin \alpha\xi e^{-\xi^2 t} \, d\xi = -\frac{\alpha}{4\pi t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha\xi e^{-\xi^2 t} \, d\xi = -\frac{\alpha}{2t} k(\alpha, t),$$

կստանանք

$$k(\alpha,t) = e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} k(0,t) :$$

Մյուս կողմից ունենք

$$k(0,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} \, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}},$$

հետևաբար

$$k(\alpha,t) = \frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}, \quad \alpha \in R_1, \ t > 0,$$

$$K(z,t) = \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-\frac{z_j^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} = \frac{e^{-\frac{|z|^2}{4t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n}, \quad z \in R_n, \ t > 0,$$

ուստի և $(3.1^0), (3.2)$ խնդրի լուծման համար կարող ենք գրել

$$u(x,t) = \int\limits_{R_n} K(x-y,t)\varphi(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y)\,dy, \quad x \in R_n,\ t > 0: \tag{3.3}$$

(3.3) արտահայտությունը կոչվում է *Պուասոնի բանաձև*:

§ 2. Ֆունդամենտալ լուծում: Ջերմահաղորդականության հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծման գոյությունը

Դիտարկենք

$$U(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},\ x \in R_n,\ t > 0, \\ \\ 0,\ x \in R_n,\ t \le 0, \end{cases}$$

ֆունկցիան: $\{0\} = \{x = 0, t = 0\}$ կետում $U(x,t)$ ֆունկցիան խզվում է, իսկ մնացած բոլոր կետերում բավարարում է ջերմահաղորդականության հավասարմանը: Դժվար չէ ստուգել, որ $U \in C^{\infty}\left(R_{n+1} \backslash \{0\}\right)$:

Սահմանում: *$U(x,t)$ ֆունկցիան կոչվում է ջերմահաղորդականության հավասարման ֆունդամենտալ լուծում*:

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 3.2.1 *Դիցուք $\varphi \in C(R_n)$ ֆունկցիան սահմանափակ է՝*

$$\sup_{x \in R_n} |\varphi(x)| = M < \infty:$$

Այդ դեպքում (3.3) բանաձևով տրված ֆունկցիան $(3.1^0), (3.2)$ խնդրի լուծում է: Այդ լուծումը սահմանափակ է՝

$$\sup_{x \in R_n, t \ge 0} |u(x,t)| \le M, \tag{3.4}$$

ավելին, տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\inf_{R_n} \varphi \le u(x,t) \le \sup_{R_n} \varphi, \quad x \in R_n,\ t \ge 0 : \tag{3.4$'$}$$

Ապացույց: Վերցնենք կամայական $R > 0$, $0 < \delta < T < \infty$ և $Q_{R,\delta,T}$-ով նշանակենք

$$Q_{R,\delta,T} = \{|x| < R, \delta < t < T\}$$

գլանը: Նախ ապացուցենք, որ (3.3) բանաձևով տրված $u(x,t)$ ֆունկցիան պատկանում է $C^2(\overline{Q}_{R,\delta,T})$ դասին և $Q_{R,\delta,T}$-ում բավարարում է (3.1^0) հավասարմանը: (3.3) ինտեգրալը ներկայացնենք

$$u(x,t) = I_1(x,t) + I_2(x,t) \tag{3.5}$$

երկու ինտեգրալների գումարի տեսքով, որտեղ

$$I_1(x,t) = \int\limits_{|y| \le 2R} K(x-y,t)\varphi(y)\,dy,$$

$$I_2(x,t) = \int\limits_{|y| > 2R} K(x-y,t)\varphi(y)\,dy :$$

Քանի որ $I_1(x,t)$ ինտեգրալի ենթաինտեգրալային ֆունկցիան և նրա ցանկացած կարգի ածանցյալները ըստ x և t փոփոխականների անընդհատ են $\{(x,t) \in \overline{Q}_{R,\delta,T},\ |y| \le 2R\}$ փակ և սահմանափակ բազմության վրա, ապա ածանցման գործողությունը կարելի է տեղափոխել ինտեգրալի նշանի տակ: Հետևաբար, $I_1 \in C^\infty(\overline{Q}_{R,\delta,T})$ և $I_1(x,t)$ ֆունկցիան $\overline{Q}_{R,\delta,T}$-ում բավարարում է (3.1^0) հավասարմանը:

$I_2(x,t)$ ինտեգրալի ենթաինտեգրալային ֆունկցիան և նրա ցանկացած կարգի ածանցյալները ըստ x և t փոփոխականների անընդհատ են $\{(x,t) \in \overline{Q}_{R,\delta,T},\ |y| > 2R\}$ բազմության վրա: Սակայն I_2-ում ինտեգրումը կատարվում է $\{|y| > 2R\}$ անսահմանափակ բազմությունով: $I_2(x,t)$ ֆունկցիայի համար $I_1(x,t)$ ֆունկցիայի համապատասխան հատկությունները ապացուցելու համար բավարար է ցույց տալ, որ $I_2(x,t)$ ֆունկցիան և նրա ցանկացած կարգի ածանցյալները ըստ x և t փոփոխականների $\{|y|>2R\}$ բազմության վրա ունեն ինտեգրելի մաժորանտներ, որոնք կախված չեն (x,t)-ից, $(x,t)\in\overline{Q}_{R,\delta,T}$:

Քանի որ $\{(x,t)\in\overline{Q}_{R,\delta,T}, |y|>2R\}$ կետերի համար

$$|x-y|\geq|y|-|x|\geq|y|-R,$$

ապա

$$|K(x-y,t)\varphi(y)|\leq\frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n}|\varphi(y)|\leq\frac{e^{-\frac{(|y|-R)^2}{4T}}}{(2\sqrt{\pi\delta})^n}M:$$

Աջ մասում գրված ֆունկցիան որոնելի մաժորանտն է.

$$|I_2(x,t)|\leq\int\limits_{|y|>2R}|K(x-y,t)\varphi(y)|\,dy\leq\frac{M}{\left(2\sqrt{\pi\delta}\right)^n}\int\limits_{|y|>2R}e^{-\frac{(|y|-R)^2}{4T}}\,dy<\infty:$$

Նման ձևով կարելի է գտնել մաժորանտներ ածանցյալների համար: Օրինակ, գտնենք մաժորանտ առաջին կարգի ածանցյալների (ըստ x_i, $i=1,...,n$, և t փոփոխականների) համար .

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K(x-y,t)\varphi(y)\right)\right|=\left|\frac{-2(x_i-y_i)}{(2\sqrt{\pi t})^n4t}\leq e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\varphi(y)\right|\leq$$

$$\leq\frac{|x|+|y|}{(2\sqrt{\pi t})^n2t}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}|\varphi(y)|\leq\frac{R+|y|}{(2\sqrt{\pi\delta})^n2\delta}e^{-\frac{(|y|-R)^2}{4T}}M,\quad i=1,...,n,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(K(x-y,t)\varphi(y)\right)\right|\leq\frac{(R+|y|)^2}{(2\sqrt{\pi\delta})^n4\delta^2}e^{-\frac{(|y|-R)^2}{4T}}M:$$

Այսպիսով, $I_1(x,t)$ և $I_2(x,t)$ ֆունկցիաները անվերջ դիֆերենցելի են $\overline{Q}_{R,\delta,T}$-ում, $I_1,I_2\in C^\infty(\overline{Q}_{R,\delta,T})$, և $\overline{Q}_{R,\delta,T}$-ում բավարարում են (3.1^0) հավասարմանը: Հետևաբար, $u(x,t)$ ֆունկցիան (ըստ (3.5)) ևս օժտված է նույն հատկություններով: Քանի որ $R>0$, $T>0$, $\delta>0$ կամայական են, ապա $u(x,t)$ ֆունկցիան բավարարում է (3.1^0) հավասարմանը $\{x\in R_n, t>0\}$ փիրույթում և $u\in C^\infty(x\in R_n,t>0)$:

Դիցուք $x \in R_n$ կամայական կետ է, $\sigma > 0$ կամայական թիվ է: Այդ դեպքում

$$\int\limits_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{\sigma}}\, dy = \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_j-y_j)^2}{\sigma}}\, dy_j =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta_j^2}\, d\eta_j \right) \sqrt{\sigma} = \prod_{j=1}^{n} (\sqrt{\pi\sigma}) = (\sqrt{\pi\sigma})^n :$$

Հետևաբար, ցանկացած $x \in R_n$, $t > 0$, $\sigma > 0$ դեպքում

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t\sigma}}\, dy = \sigma^{n/2} : \tag{3.6}$$

Մասնավորապես, երբ $\sigma = 1$,

$$\int\limits_{R_n} K(x-y,t)\, dy = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy \equiv 1, \quad x \in R_n,\ t > 0 : \tag{3.7}$$

Այժմ ապացուցենք, որ $u \in C(x \in R_n, t \geq 0)$ և տեղի ունի (3.2) պայմանը: Դրա համար բավարար է ցույց տալ, որ կամայական $x^0 \in R_n$ համար

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x^0,0)\\(t>0)}} u(x,t) = \varphi(x^0) : \tag{3.8}$$

Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$: Քանի որ $\varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x^0 կետում, ապա գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$, որ

$$|\varphi(y) - \varphi(x^0)| \leq \varepsilon \quad \text{երբ} \quad |y - x^0| \leq \delta :$$

Ունենք

$$u(x,t) - \varphi(x^0) = \int\limits_{R_n} K(x-y,t) \left(\varphi(y) - \varphi(x^0)\right)\, dy =$$

$$= \int\limits_{|y-x^0|\leq\delta} K(x-y,t) \left(\varphi(y) - \varphi(x^0)\right)\, dy +$$

$$+ \int\limits_{|y-x^0|>\delta} K(x-y,t) \left(\varphi(y) - \varphi(x^0)\right)\, dy = I_{1,\delta} + I_{2,\delta} : \tag{3.9}$$

Ըստ (3.7) հավասարության

$$|I_{1,\delta}| \leq \int\limits_{|y-x^0|\leq\delta} K(x-y,t)|\varphi(y)-\varphi(x^0)|\,dy \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{|y-x^0|\leq\delta} K(x-y,t)\,dy \leq \varepsilon \int\limits_{R_n} K(x-y,t)\,dy = \varepsilon \qquad (3.10)$$

Գնահատենք (3.9) ներկայացման երկրորդ գումարելին.

$$|I_{2,\delta}| \leq \int\limits_{|y-x^0|>\delta} K(x-y,t)|\varphi(y)-\varphi(x^0)|\,dy \leq$$

$$\leq \int\limits_{|y-x^0|>\delta} K(x-y,t)\left(|\varphi(y)|+|\varphi(x^0)|\right)\,dy \leq 2M \int\limits_{|y-x^0|>\delta} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}}\,dy :$$

Վերցնենք այնպիսի x, որ

$$|x-x^0| < \frac{\delta}{2} :$$

Այդ դեպքում, երբ $|y-x^0|>\delta$,

$$|x-y| = |(y-x^0)-(x-x^0)| \geq |y-x^0|-|x-x^0| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} :$$

Ըստ (3.6)-ի ունենք

$$|I_{2,\delta}| \leq 2M \int\limits_{|y-x^0|>\delta} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\delta^2}{32t}}\,dy \leq$$

$$\leq 2Me^{-\frac{\delta^2}{32t}} \int\limits_{R_n} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{8t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n}\,dy = 2Me^{-\delta^2/32t}2^{n/2} \to 0, \quad \text{երբ} \quad t\to +0 : \qquad (3.11)$$

(3.9), (3.10), (3.11) առնչություններից անմիջապես հետևում է (3.8) հավասարությունը:

$\{x\in R_n, t>0\}$ փիրույթում $u(x,t)$ լուծման սահմանափակությունը անմիջապես ստացվում է (3.3) ներկայացումից՝

$$|u(x,t)| \leq \int\limits_{R_n} K(x-y,t)|\varphi(y)|\,dy \leq M \int\limits_{R_n} K(x-y,t)\,dy = M,$$

իսկ $t=0$ դեպքում տեղի ունի (3.2)-ը, որտեղից հետևում է (3.4) գնահատականը:

Նման ձևով ապացուցվում են $(3.4')$ անհավասարությունները:

Երբ $x \in R_n$, $t > 0$ տեղի ունի

$$\inf_{R_n} \varphi = \int_{R_n} K(x-y,t) \inf_{R_n} \varphi \, dy \le u(x,t) \le \int_{R_n} K(x-y,t) \sup_{R_n} \varphi \, dy = \sup_{R_n} \varphi,$$

իսկ $t=0$ դեպքում տեղի ունի (3.2)-ը, որտեղից հետևում է $(3.4^{'})$ գնահատականը: Թեորեմն ապացուցված է:

§ 3. Լուծման միակությունը: Մաքսիմումի սկզբունքը: Լուծման անընդհատ կախվածությունը սկզբնական ֆունկցիայից

Նշանակենք $B = B(x \in R_n, t \ge 0)$ բոլոր $g(x,t)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք որոշված են $\{x \in R_n, t \ge 0\}$-ում և սահմանափակ են կամայական $\{x \in \ R_n,\ 0 \le t \le T\}$ շերտում՝

ցանկացած $T > 0$ համար գոյություն ունի այնպիսի $C(T) > 0$ թիվ, որ

$$|g(x,t)| \le C(T), \quad \text{երբ} \quad x \in R_n,\ 0 \le t \le T:$$

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 3.3.1 B *բազմությանը պատկանող*

$$Lu \equiv u_t - \triangle_x u = f(x,t), \quad x \in R_n,\ t > 0, \tag{3.1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_n, \tag{3.2}$$

խնդրի լուծումը միակն է:

Մինչ թեորեմի ապացույցին անցնելը՝ նշենք միայն, որ (3.1), (3.2) խնդրի լուծման միակությունը կարելի է ապացուցել նաև B դասից ավելի լայն դասում: Նշանակենք B_α-ով, որտեղ $\alpha \ge 0$ ոչբացասական թիվ է, բոլոր $g(x,t)$ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք որոշված են $\{x \in R_n, t \ge 0\}$-ում և բավարարում են հետևյալ պայմանին՝

կամայական $T > 0$ համար գոյություն ունի այնպիսի $C(T) > 0$, որ

$$|g(x,t)| \le C(T)e^{\alpha|x|^2}, \quad \text{երբ} \quad x \in R_n,\ 0 \le t \le T:$$

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը, որը ներկայացնում ենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 3.3.1′ (3.1), (3.2) *խնդրի լուծումը միակն է* B_α, $\alpha \ge 0$, *դասում*:

Ակնհայտ է, որ $B = B_0 \subset B_\alpha$: Նշենք նաև, որ սահմանափակության պայմանի բացակայության դեպքում (առանց որևէ այլ պայմանի) (3.1), (3.2) խնդրի լուծումը միակը չէ:

Թեորեմ 3.3.1-ի ապացույց: Դիցուք $u_1(x,t)$ և $u_2(x,t)$ ֆունկցիաները (3.1), (3.2) խնդրի լուծումներ են և պատկանում են B դասին: Այդ դեպքում $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ ֆունկցիան

$$Lu \equiv u_t - \triangle_x u = 0, \quad x \in R_n,\ t > 0, \tag{3.1^0}$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad x \in R_n, \tag{3.2^0}$$

խնդրի լուծում է և պատկանում է B դասին: Դա նշանակում է, որ ցանկացած $T > 0$ համար գոյություն ունի այնպիսի $C(T) > 0$ թիվ, որ

$$|u(x,t)| \le C(T), \quad x \in R_n,\ 0 \le t \le T: \tag{3.12}$$

Ցույց տանք, որ

$$u(x,t) \equiv 0, \quad x \in R_n,\ t > 0: \tag{3.13}$$

(3.13)-ը ապացուցելու համար ֆիքսենք կամայական $(x^0, t^0) \in \{x \in R_n,\ t > 0\}$ կետ և ցույց տանք, որ

$$u(x^0, t^0) = 0: \tag{3.14}$$

Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ և դիտարկենք

$$w_\pm(x,t) = \varepsilon(|x|^2 + (2n+1)t) \pm u_(x,t), \quad x \in R_n,\ t \ge 0,$$

ֆունկցիաները, որտեղ w_+-ը համապատասխանում է հավասարության աջ մասում $+$ նշանին, w_--ը համապատասխանում է $-$ նշանին: w_+ և w_-

ֆունկցիաները պատկանում են $C^2(x \in R_n, t > 0) \cap C(x \in R_n, t \geq 0)$ դասին և բավարարում են

$$Lw_\pm = \varepsilon, \quad x \in R_n,\ t > 0, \tag{3.15}$$

հավասարմանը: $w_\pm$ ֆունկցիաները բավարարում են

$$w_\pm\big|_{t=0} = \varepsilon |x|^2, \quad x \in R_n, \tag{3.16}$$

սկզբնական պայմանին: Համաձայն (3.12)-ի՝ գոյություն ունի այնքան մեծ R, որ $\{|x| = R,\ 0 \leq t \leq t^0\}$ գլանային մակերևույթի վրա

$$w_\pm\Big|_{\substack{|x|=R \\ 0\leq t\leq t^0}} = \varepsilon R^2 + (2n+1)t\varepsilon \pm u\Big|_{\substack{|x|=R \\ 0\leq t\leq t^0}} \geq$$

$$\geq \varepsilon R^2 - |u|\Big|_{\substack{|x|=R \\ 0\leq t\leq t^0}} \geq \varepsilon R^2 - C(t^0) \geq 0 \tag{3.17}$$

(քանի որ $\varepsilon R^2 - C(t^0) \to +\infty$, երբ $R \to \infty$): Ընդ որում, կարող ենք ենթադրել R-ը այնքան մեծ է, որ $R > |x^0|$ և (x^0, t^0) կետը ընկած է $\Omega_{R,\, t^0} = \{|x| < R,\ 0 < t < t^0\}$ գլանի վերին հիմքի ներսում: Օգտվենք հետևյալ պնդումից, որը հետո կապացուցենք:

Լեմմա 3.3.1 *Դիցուք $z(x,t)$ ֆունկցիան պատկանում է $C^2(\Omega_R) \cap C(\overline{\Omega}_R)$ դասին, որտեղ $\Omega_R = \{|x| < R,\ 0 < t < \infty\}$, $R > 0$, և օժտված է հետևյալ հատկություններով՝*

1. $Lz \geq 0$ Ω_R-ում,

2. $z\big|_{t=0} \geq 0$,

3. $z\Big|_{\substack{|x|=R \\ 0\leq t\leq t^0}} \geq 0$, որտեղ t^0-ն որևէ դրական թիվ է:

Այդ դեպքում

$$z(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_{R,\, t^0} = \{|x| \leq R,\ 0 \leq t \leq t^0\} :$$

Հաշվի առնելով (3.15), (3.16), (3.17) և $w_\pm(x,t)$ ֆունկցիաների համար կիրառելով Լեմմա 3.3.1-ը՝ ստանում ենք, որ $\overline{\Omega}_{R,\, t^0}$-ում $w_\pm(x,t) \geq 0$, մասնավորապես $w_\pm(x^0, t^0) \geq 0$: Հետևաբար

$$-\varepsilon\left(|x^0|^2+(2n+1)t^0\right)\le u(x^0,t^0)\le\varepsilon\left(|x^0|^2+(2n+1)t^0\right),$$

որտեղից

$$|u(x^0,t^0)|\le\varepsilon\left(|x^0|^2+(2n+1)t^0\right):$$

Քանի որ $\varepsilon>0$ կամայական է, ստանում ենք (3.14) հավասարությունը: Թեորեմն ապացուցված է:

Լեմմա 3.3.1-ի ապացույց: Կատարենք հակասող ենթադրություն: Ենթադրենք գոյություն ունի այնպիսի $(x^1,t^1)\in\overline{\Omega}_{R,\,t^0}$ կետ, որ $z(x^1,t^1)<0$: Դիտարկենք $v(x,t)=e^{-t}z(x,t)$ ֆունկցիան: Պարզ է, որ

$$v(x^1,t^1)<0: \tag{3.18}$$

$v(x,t)$ անընդհատ ֆունկցիան $\overline{\Omega}_{R,\,t^0}$ փակ գլանում ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը. գոյություն ունի այնպիսի $(x^2,t^2)\in\overline{\Omega}_{R,\,t^0}$ կետ, որ

$$v(x^2,t^2)=\min_{(x,t)\in\overline{\Omega}_{R,\,t^0}}v(x,t):$$

Համաձայն (3.18)-ի՝

$$v(x^2,t^2)<0: \tag{3.19}$$

Լեմմայի 2. և 3. պայմանների համաձայն

$$v\Big|_{t=0}=(e^{-t}z)\Big|_{t=0}\ge 0,\quad v\Big|_{\substack{|x|=R\\0\le t\le t^0}}=(e^{-t}z)\Big|_{\substack{|x|=R\\0\le t\le t^0}}\ge 0,$$

ուստի (x^2,t^2) կետը չի կարող պատկանել ոչ գլանի $\{|x|\le R,\ t=0\}$ ստորին հիմքին, ոչ էլ գլանի $\{|x|=R,\ 0\le t\le t^0\}$ կողմնային մակերևույթին: Հետևաբար (x^2,t^2) կետը կամ $\Omega_{R,\,t^0}$ գլանի ներքին կետ է կամ պատկանում է գլանի վերին հիմքին՝ $|x^2|<R$, $t^2=t^0$: Առաջին դեպքում, երբ (x^2,t^2)-ը մինիմումի կետ է,

$$v(x^2,t^2)<0,\quad v_t(x^2,t^2)=0,\quad v_{x_ix_i}(x^2,t^2)\ge 0,\quad i=1,...,n,$$

երկրորդ դեպքում

$$v(x^2,t^2) < 0, \quad v_t(x^2,t^2) \leq 0, \quad v_{x_ix_i}(x^2,t^2) \geq 0, \quad i = 1,...,n:$$

Երկու դեպքում էլ

$$Lz(x^2,t^2) = L(e^t v)(x^2,t^2) = e^t(v + v_t - \triangle_x v)\Big|_{\substack{x=x^2\\ t=t^2}} < 0,$$

ինչը հակասում է լեմմայի 1. պայմանին: Լեմման ապացուցված է:

Դիցուք $u(x,t)$ ֆունկցիան պատկանում է B բազմությանը և (3.1^0), (3.2) խնդրի լուծում է: Միակության թեորեմից հետևում է, որ այդ լուծումը պետք է համընկնի (3.3) Պուասոնի ինտեգրալով տրված լուծման հետ: Հետևաբար այն սահմանափակ է ամբողջ $\{x \in R_n, t > 0\}$ կիսապարածությունում և բավարարում է $(3.4')$ անհավասարություններին: Այսպիսով, տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 3.3.2 (Մաքսիմումի սկզբունքը) *B բազմությանը պատկանող (3.1^0), (3.2) խնդրի լուծումը բավարարում է $(3.4')$ անհավասարություններին:*

Թեորեմ 3.3.1-ի ապացույցից բխում է, որ ջերմահաղորդականության հավասարման համար Կոշիի խնդրի սահմանափակ լուծումը օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1. Ժամանակի սկզբնական $t = 0$ պահին լինելով միայն անընդհատ, լուծումը անմիջապես դառնում է անվերջ դիֆերենցելի բոլոր $t > 0$ համար:

2. Եթե ժամանակի սկզբնական $t = 0$ պահին լուծումը հավասար է զրոյի ամենուրեք, բացառությամբ որևէ կետի ինչքան ասես փոքր շրջակայքի, որտեղ այն դրական է, ապա ցանկացած $t > 0$ համար լուծումը դառնում է դրական բոլոր կետերում: Դա նշանակում է, որ (3.1), (3.2) խնդրով նկարագրվող ջերմության տարածման արագությունը անվերջ է, ինչը, իհարկե, ցույց է տալիս խնդրի ոչ լիարժեք համապատասխանությունը բնության երևույթին: Ջերմության տարածման երևույթների առավել ճշգրիտ նկարագրության համար անհրաժեշտ է դիտարկել Կոշիի ավելի բարդ խնդիր ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման համար:

Թեորեմ 3.3.3 (Սկզբնական ֆունկցիայից լուծման անընդհատ կախվածության մասին) *Դիցուք* $u_1(x,t)$ *և* $u_2(x,t)$ *ֆունկցիաները պատկանում են* B *բազմությանը և*

$$\begin{cases} u_{1t} - \triangle_x u_1 = f(x,t), \quad x \in R_n,\ t > 0, \\ u_1\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad x \in R_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2t} - \triangle_x u_2 = f(x,t), \quad x \in R_n,\ t > 0, \\ u_1\big|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad x \in R_n, \end{cases}$$

խնդիրների լուծումներ են: Այդ դեպքում, եթե որևէ $\varepsilon > 0$ *համար*

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in R_n,$$

ապա

$$|u_1(x,t)) - u_2(x,t)| \leq \varepsilon, \quad x \in R_n,\ t \geq 0 : \tag{3.20}$$

Ապացույց: Դիտարկենք $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ տարբերությունը: $u(x,t)$ ֆունկցիան պատկանում է B բազմությանը և

$$\begin{cases} u_t - \triangle_x u = 0, \quad x \in R_n,\ t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R_n, \end{cases}$$

Կոշիի խնդրի լուծում է, որտեղ $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, $|\varphi(x)| \leq \varepsilon$: Վերը շարադրվածից հետևում է, որ $u(x,t)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $\{x \in R_n, t > 0\}$ կիսատարածությունում և համաձայն մաքսիմումի սկզբունքի՝ բավարարում է

$$-\varepsilon \leq \inf_{R_n}(\varphi_1 - \varphi_2) = \inf_{R_n} \varphi \leq u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq$$

$$\leq \sup_{R_n} \varphi = \sup_{R_n}(\varphi_1 - \varphi_2) \leq \varepsilon, \quad x \in R_n,\ t \geq 0,$$

անհավասարություններին, որտեղից հետևում է (3.20) անհավասարությունը: Թեորեմն ապացուցված է:

Սկզբնական ֆունկցիայից լուծման անընդհատ կախվածության բացակայության օրինակ: Դիտարկենք Կոշիի հետևյալ խնդիրները («հակադարձ» ջերմահաղորդականության հավասարման համար)՝

$$(K_0)\quad \begin{cases} u_{0t} + u_{0xx} = 0, \quad x \in R_1,\ t > 0, \\ u_0\big|_{t=0} = 0, \quad x \in R_1, \end{cases}$$

$$(K_n)\quad \begin{cases} u_{nt} + u_{nxx} = 0, \quad x \in R_1,\ t > 0, \\ u_n\big|_{t=0} = e^{-n}\cos nx, \quad x \in R_1 : \end{cases}$$

$u_0(x,t) \equiv 0$ և $u_n(x,t) = e^{-n}e^{n^2 t}\cos nx$, $n = 1, 2, ...$, $x \in R_1$, $t \geq 0$, ֆունկցիաները համապատասխանաբար (K_0) և (K_n) խնդիրների լուծումներ են և պատկանում են B բազմությանը: (K_n) խնդրում սկզբնական ֆունկցիան (բոլոր ածանցյալների հետ միասին) հավասարաչափ ըստ $x \in R_1$ ձգտում է զրոյի, երբ $n \to \infty$, այսինքն՝ (K_0) խնդրի սկզբնական ֆունկցիային: Սակայն, օրինակ, երբ $x = 0$, $u_n(x,t) -$ $u_0(x,t)$ լուծումների տարբերությունը ցանկացած $t > 0$ համար ձգտում է անվերջի, երբ $n \to \infty$: Իրոք.

$$|u_n(0,t) - u_0(0,t)| = u_n(0,t) = e^{-n}e^{n^2 t} \to \infty, \quad \text{երբ} \quad n \to \infty :$$

Դյուամելի սկզբունքը: Այժմ ուսումնասիրենք Կոշիի խնդիրը անհամասեռ ջերմահաղորդականության հավասարման համար: Ակնհայտ է, որ բավարար է դիտարկել համասեռ սկզբնական պայմանով դեպքը.

$$u_t - a^2 \triangle_x u = f(x,t),\ x \in R_n,\ t > 0, \tag{3.21}$$

$$u\big|_{t=0} = 0,\ x \in R_n : \tag{3.22}$$

Դիտարկենք

$$v_t - a^2 \triangle_x v = 0,\ x \in R_n,\ t > \tau \geq 0, \tag{3.23}$$

$$v\Big|_{t=\tau} = f(x, \tau),\ x \in R_n, \tag{3.24}$$

խնդիրը, որի լուծումը կախված է x, t փոփոխականներից և τ պարամետրից. $v = v(x, t, \tau)$:

Նշենք միայն, որ (3.21), (3.22) խնդիրը, ինչպես և ալիքային հավասարման դեպքում, փոփոխականի համապատասխան փոխարինումով բերվում է $a = 1$ դեպքին:

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը, որը կոչվում է Դյուամելի սկզբունք:

Թեորեմ 3.3.4 (Դյուամելի սկզբունքը) *Դիցուք* $v(x, t, \tau)$ *ֆունկցիան* (3.23), (3.24) *խնդրի լուծում է: Այդ դեպքում*

$$u(x, t) = \int\limits_0^t v(x, t, \tau)\, d\tau \tag{3.25}$$

ֆունկցիան (3.21), (3.22) *խնդրի լուծում է:*

Ապացույց: Ածանցելով $u(x, t)$ ֆունկցիան ըստ t փոփոխականի, հաշվի առնելով (3.23) պայմանը՝ ստանում ենք

$$u_t = v(t, x, t) + \int\limits_0^t v_t(x, t, \tau)\, d\tau = f(x, t) + \int\limits_0^t v_t(x, t, \tau)\, d\tau : \tag{3.26}$$

Քանի որ ըստ x_i փոփոխականների ածանցման գործողությունը կարելի է տեղափոխել ինտեգրալի նշանի տակ, ապա

$$\triangle_x u = \triangle_x \int\limits_0^t v(x, t, \tau)\, d\tau = \int\limits_0^t \triangle_x v(x, t, \tau)\, d\tau :$$

Հետևաբար

$$u_t - a^2 \triangle_x u = f(x, t) + \int\limits_0^t v_t(x, t, \tau)\, d\tau - a^2 \int\limits_0^t \triangle_x v(x, t, \tau)\, d\tau =$$

$$= f(x,t) + \int_0^t \Big(v_t(x,t,\tau) - a^2 \triangle_x v(x,t,\tau)\Big)\ d\tau = f(x,t) :$$

Այսպիսով, u ֆունկցիան բավարարում է (3.21) հավասարմանը: (3.25) ներկայացումից անմիջապես հետևում է, որ u ֆունկցիան բավարարում է (3.22) պայմանին: Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով, եթե ունենք համասեռ հավասարման համար Կոշիի խնդրի լուծումը, մենք կարող ենք գրել նաև

$$u_t - a^2 \triangle_x u = f(x,t),\ x \in R_n,\ t > 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in R_n,$$

Կոշիի խնդրի լուծումը: Ենթադրենք $f(x,\tau)$ ֆունկցիան անընդհատ է և պատկանում է B բազմությանը, իսկ φ ֆունկցիան անընդհատ է և սահմանափակ: Այդ դեպքում լուծումն ունի

$$u(x,t) = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi a^2 t}\right)^n} \int_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} \varphi(y)\ dy +$$

$$+ \int_0^t d\tau \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}\right)^n} \int_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}} f(y,\tau)\ dy, \quad x \in R_n,\ t > 0,$$

տեսքը, ընդ որում $u \in B$:

§ 4. Խառը խնդիրը պարաբոլական հավասարման համար

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը. գտնել

$$Lu \equiv u_t - u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t < T,$$

հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T,$$

եզրային պայմաններին և

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l,$$

սկզբնական պայմանին:

Այս խնդիրը կոչվում է առաջին խառը խնդիր ջերմահաղորդականության հավասարման համար: Նշանակենք

$$Q_T = \{0 < x < l,\ 0 < t < T\}, \quad \Gamma_0 = \{0 < x < l,\ t = 0\},$$

$$\Gamma_{1,T} = \{x = 0,\ 0 < t < T\}, \quad \Gamma_{2,T} = \{x = l,\ 0 < t < T\},$$

$$\Gamma_T = \overline{\Gamma}_T = \overline{\Gamma}_0 \cup \overline{\Gamma}_{1,T} \cup \overline{\Gamma}_{2,T} :$$

Γ_T-ն կոչվում է Q_T ուղղանկյան պարաբոլական եզր: Առաջին խառը խնդրի $u(x,t)$ լուծումը պատկանում է $C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$ բազմությանը. $u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$:

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 3.4.1

$$Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3.26}$$

$$u\big|_{\Gamma_T} = \varphi, \tag{3.27}$$

առաջին խառը խնդրի լուծումը միակն է:

Ապացույց: Դիցուք $u_1(x,t)$ և $u_2(x,t)$ ֆունկցիաները միևնույն խառը խնդրի լուծումներ են.

$$\begin{cases} Lu_1 = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \\ u_1\big|_{\Gamma_T} = \varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lu_2 = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \\ u_2\big|_{\Gamma_T} = \varphi : \end{cases}$$

Այդ դեպքում $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ ֆունկցիան

$$\begin{cases} Lv = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \\ v\big|_{\Gamma_T} = 0, \end{cases}$$

խնդրի լուծում է: Լեմմա 3.3.1-ից հետևում է, որ

$$v(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T : \tag{3.28}$$

Կապարելով նույն դատողությունները $-v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$ ֆունկցիայի համար՝ կստանանք

$$-v(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T : \tag{3.29}$$

(3.28), (3.29)-ից հետևում է, որ

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3.30}$$

$$u\big|_{\Gamma_T} = \varphi : \tag{3.31}$$

Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 3.4.2 (Մաքսիմումի սկզբունքը) *Դիցուք* $u(x,t)$ *ֆունկցիան* (3.30), (3.31) *խնդրի լուծում է: Այդ դեպքում*

$$\min_{\Gamma_T} \varphi \leq u(x,t) \leq \max_{\Gamma_T} \varphi, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T : \tag{3.32}$$

Ապացույց: Նշանակենք

$$m = \min_{\Gamma_T} \varphi, \quad M = \max_{\Gamma_T} \varphi :$$

Դիտարկենք $z(x,t) = u(x,t) - m$ ֆունկցիան: Ակնհայտ է, որ $z(x,t)$ ֆունկցիան բավարարում է (3.30) հավասարմանը և

$$z\big|_{\Gamma_T} \geq 0 :$$

Ըստ Լեմմա 3.3.1-ի,

$$z(x,t) \geq 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T,$$

այսինքն՝

$$u(x,t) \geq m, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T :$$

Կատարելով նույն դատողությունները $M - u(x,t)$ ֆունկցիայի համար՝ կստանանք

$$u(x,t) \leq M, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

(3.32) անհավասարություններից բխում է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 3.4.3 (Մոդուլի մաքսիմումի սկզբունքը) *Դիցուք* $u(x,t)$ *ֆունկցիան* (3.30), (3.31) *խնդրի լուծում է: Այդ դեպքում*

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q}_T} |u(x,t)| \leq \max_{\Gamma_T} |\varphi| : \tag{3.33}$$

Թեորեմ 3.4.3-ից հետևում է (3.30), (3.31) խնդրի լուծման անընդհատ կախվածությունը եզրային ֆունկցիայից:

Թեորեմ 3.4.4 (Եզրային ֆունկցիայից լուծման անընդհատ կախվածության մասին) *Դիցուք* $u_1(x,t)$ *և* $u_2(x,t)$ *ֆունկցիաները*

$$\begin{cases} u_{1t} - u_{1xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \\ u_1\big|_{\Gamma_T} = \varphi_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2t} - u_{2xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \\ u_2\big|_{\Gamma_T} = \varphi_2, \end{cases}$$

խնդիրների լուծումներ են: Այդ դեպքում, եթե որևէ $\varepsilon > 0$ համար

$$|\varphi_1 - \varphi_2|\Big|_{\Gamma_T} \le \varepsilon,$$

ապա

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T :$$

Ապացույց: Դիտարկենք $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ տարբերությունը: $u(x,t)$ ֆունկցիան

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{\Gamma_T} = \varphi, \end{cases}$$

խնդրի լուծում է, որտեղ $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$: Համաձայն Թեորեմ 3.4.3-ի՝ ունենք

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| = |u(x,t)| \le \max_{(x,t)\in\overline{Q}_T} |u(x,t)| \le \max_{\Gamma_T} |\varphi| =$$

$$= \max_{\Gamma_T} |\varphi_1 - \varphi_2| \le \varepsilon, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

§ 5. Փոփոխականների անջատման մեթոդը

Ինչպես արդեն նշել ենք նախորդ գլխում, փոփոխականների անջատման կամ Ֆուրյեի մեթոդը մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման հիմնական մեթոդներից է: Այս պարագրաֆում կապարելով նման դատողություններ, ինչպես լարի տատանման հավասարման դեպքում, մենք կշարադրենք Ֆուրյեի մեթոդը ջերմահաղորդականության հավասարման առաջին խառը խնդրի համար $Q_T = \{0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ տիրույթում:

Համասեռ հավասարումներ: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l,\ 0 < t < T, \tag{3.34}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.35}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l : \tag{3.36}$$

Քանի որ (3.34) հավասարումը գծային է և համասեռ, ապա երկու մասնավոր լուծումների գումարը ևս այդ հավասարման լուծում է: Փորձենք գտնել (3.34) հավասարման այնպիսի մասնավոր լուծումներ, որոնց գումարը կլինի $(3.34), (3.35), (3.36)$ խնդրի լուծում: Նախ լուծենք հետևյալ օժանդակ խնդիրը՝

գտնել (3.34) հավասարման այն ոչ տրիվիալ (ոչ նույնաբար զրո) լուծումները, որոնք բավարարում են (3.35) եզրային պայմաններին և ունեն

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.37}$$

տեսքը, որտեղ $X(x)$ ֆունկցիան կախված է միայն x փոփոխականից, $T(t)$ ֆունկցիան կախված է միայն t փոփոխականից:

Տեղադրելով (3.37) տեսքի $u(x,t)$ ֆունկցիան (3.34) հավասարման մեջ՝ ստանում ենք

$$X(x)T^{'}(t) - a^2X^{''}(x)T(t) = 0,$$

որտեղից, հաշվի առնելով $X(x) \not\equiv 0$, $T(t) \not\equiv 0$, ստանում ենք

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T^{'}(t)}{T(t)} : \tag{3.38}$$

Քանի որ (3.38) հավասարության ձախ մասը կախված է միայն x-ից, իսկ աջ մասը՝ միայն t-ից, ապա (3.38) հավասարության աջ և ձախ մասերը նույնաբար հավասար են միևնույն հաստատունին: Այդ հաստատունը նշանակենք λ-ով.

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T^{'}(t)}{T(t)} = \lambda :$$

Այստեղից $X(x)$ և $T(t)$ ֆունկցիաների համար ստանում ենք

$$X^{''}(x) - \lambda X(x) = 0, \ X(x) \not\equiv 0, \quad 0 < x < l, \tag{3.39}$$

$$T^{'}(t) - \lambda a^2T(t) = 0, \ T(t) \not\equiv 0, \quad t > 0, \tag{3.40}$$

սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ: (3.35) եզրային պայմաններից ունենք

$$X(0) = X(l) = 0 : \tag{3.41}$$

Այսպիսով, $X(x)$ ֆունկցիայի համար սպացանք

$$X^{''}(x) - \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < l,\ \ X(0) = X(l) = 0, \tag{3.42}$$

Շտուրմ-Լիուվիլի խնդիրը, որն ուսումնասիրել ենք լարի փափանման հավասարումը լուծելիս և ցույց ենք փվել, որ միայն

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, ...$$

արժեքների դեպքում (3.42) խնդիրն ունի

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

ոչ զրոյական լուծում, որտեղ D_n-ը կամայական հաստատուն է:

λ_n-ին համապատասխանող (3.40) հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t},$$

որտեղ A_n-ը կամայական հաստատուն է:

Այսպիսով.

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 1, 2, ...$$

ֆունկցիաները (3.34) հավասարման մասնավոր լուծումներ են, որոնք բավարարում են (3.35) եզրային պայմաններին և ներկայացվում են երկու ֆունկցիաների արփադրյալի փեսքով: Այդ ֆունկցիաներից մեկը կախված է միայն x փոփոխականից, մյուսը՝ միայն t փոփոխականից: Այս լուծումները կարող են բավարարել նախնական խնդրի (3.36) սկզբնական պայմանին միայն մասնավոր φ ֆունկցիաների համար:

Այժմ վերադառնանք (3.34), (3.35), (3.36) ընդհանուր խնդրին: Ենթադրենք A_n գործակիցները այնպիսին են, որ

$$u(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{3.43}$$

շարքը, ինչպես նաև այն շարքերը, որոնք ստացվում են այս շարքը երկու անգամ ըստ x-ի և մեկ անգամ ըստ t-ի անդամ առ անդամ ածանցելիս, հավասարաչափ զուգամետ են համապատասխան բազմությունների վրա:

Պարզ է, որ $u(x,t)$ ֆունկցիան կբավարարի ինչպես (3.35) եզրային պայմաններին, այնպես էլ (3.34) հավասարմանը: (3.36) սկզբնական պայմանից գտնենք A_n գործակիցները: Քանի որ

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{3.44}$$

ապա A_n գործակիցները φ ֆունկցիայի ըստ սինուսների շարքի վերլուծության Ֆուրյեի գործակիցներն են (ենթադրվում է, որ φ ֆունկցիան այնպիսին է, որ այն կարելի է վերլուծել ըստ սինուսների Ֆուրյեի շարքի).

$$A_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \, : \tag{3.45}$$

Այսպիսով, մենք լուծումը ներկայացրինք (3.43) շարքի տեսքով: Եթե այդ շարքը տարամիտում է, կամ այդ շարքով ներկայացված ֆունկցիան դիֆերենցելի չէ, ապա, իհարկե, այն չի կարող լինել (3.34) դիֆերենցիալ հավասարման լուծում:

Քանի որ

$$|u_n(x,t)| \le |A_n|,$$

ապա

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \tag{3.46}$$

թվային շարքը (3.43) ֆունկցիոնալ շարքի համար մաժորանտ է, և (3.46) շարքի զուգամիտությունից հետևում է (3.43) շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը $\{0 \le x \le l, \ 0 \le t \le T\}$ բազմության վրա: Համաձայն Ֆուրյեի շարքերի հայտնի հապկությունների՝ (3.46) շարքի զուգամիտության համար բավարար է ենթադրել, որ $\varphi \in C[0,l]$, ունի կտոր առ կտոր անընդհատ ածանցյալ և տեղի ունի

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0 \tag{3.47}$$

պայմանը:

Ուսումնասիրենք $u_t(x,t)$ և $u_{xx}(x,t)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը: Դիտարկենք

$$u_t(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{3.48}$$

$$u_{xx}(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x \tag{3.49}$$

շարքերը: Դիցուք $|\varphi| \le M$: Այդ դեպքում

$$|A_n| = \frac{2}{l}\left|\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi \, d\xi\right| \le 2M,$$

որտեղից հետևում է, որ

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| \le 2M\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t},$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| \le 2M\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t}:$$

Ակնհայտ է, որ ցանկացած t_0-ի համար, որտեղ $0 < t_0 \le T$,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| \le 2M\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t_0}, \quad t \ge t_0,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| \le 2M\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t_0}, \quad t \ge t_0:$$

Հետևաբար, (3.48), (3.49) շարքերը հավասարաչափ զուգամիտում են $\{0 \le\ x \le\ l,\ t_0 \le t \le T\}$ բազմության վրա: Ավելին.

$$\left|\frac{\partial^{k+m} u_n}{\partial x^k \partial t^m}\right| \le 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2m+k} n^{2m+k} a^{2m} e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t_0}, \quad t \ge t_0,$$

և (3.43) շարքը կարելի է ցանկացած անգամ ածանցել ըստ x-ի և ըստ t-ի և ստացված շարքերը կլինեն հավասարաչափ զուգամետ $\{0 \le x \le l,\ t_0 \le t \le T\}$ բազմության վրա: Քանի որ t_0-ն կամայական է, ապա $\{0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ փիրույթում (3.43) շարքը (3.34) հավասարման լուծում է և անվերջ դիֆերենցելի է: Մենք ապացուցեցինք հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 3.5.1 *Դիցուք φ ֆունկցիան անընդհատ է՝ $\varphi \in C[0,l]$, ունի կտոր առ կտոր անընդհատ ածանցյալ և տեղի ունի* (3.47) *պայմանը: Այդ դեպքում* (3.43) *շարքով ներկայացված $u(x,t)$ ֆունկցիան, որտեղ A_n գործակիցները որոշվում են* (3.45) *բանաձևով,* $(3.34), (3.35), (3.36)$ *խնդրի լուծում է:*

Անամասեռ հավասարումներ: Դիտարկենք

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t < T, \tag{3.50}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.51}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l: \tag{3.52}$$

խնդիրը: Ինչպես լարի փափանման հավասարման դեպքում, լուծումը փնտրենք

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{3.53}$$

տեսքով՝ t փոփոխականը դիտարկելով որպես պարամետր: Հավասարման $f(x,t)$ աջ մասը ներկայացնենք Ֆուրյեի շարքով.

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad f_n(t) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(\xi,t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi : \tag{3.54}$$

Տեղադրելով (3.53) և (3.54) արտահայտությունները (3.50) հավասարման մեջ՝ ստանում ենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n^{'}(t) + \left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 u_n(t) \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

որտեղից

$$u_n^{'}(t) + \left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t), \quad n = 1, 2, ... : \tag{3.55}$$

$u_n(t)$ ֆունկցիան որոշելու համար ստացանք հաստատուն գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարում: Ըստ (3.52) սկզբնական պայմանի՝

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = 0,$$

հետևաբար

$$u_n(0) = 0 : \tag{3.56}$$

Լուծելով (3.55) սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը (3.56) զրոյական սկզբնական պայմանով՝ կստանանք

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau : \tag{3.57}$$

Տեղադրելով (3.57) արտահայտությունը (3.53)-ի մեջ՝ ստանում ենք (3.50), (3.51), (3.52) խնդրի լուծումը՝

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau \right) \sin \frac{\pi n}{l} x :$$

Անհամասեռ եզրային պայմաններ: Դիտարկենք առաջին խառը խնդիրը ջերմահաղորդականության հավասարման համար ընդհանուր դեպքում.

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad 0 < x < l,\ 0 < t < T, \quad (a > 0)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \ge 0 :$$

Այս խնդիրը լուծելու համար ներմուծենք նոր $v(x,t)$ անհայտ ֆունկցիա.

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t),$$

որտեղ ենթադրվում է, որ $U(x,t)$ ֆունկցիան հայտնի է: Այդ $v(x,t)$ ֆունկցիան պետք է լինի

$$v_t - a^2 v_{xx} = \widetilde{f}(x,t)$$

հավասարման լուծում, որտեղ $\widetilde{f}(x,t) = f(x,t) - \big(U_t - a^2 U_{xx}\big)$, և բավարարի հետևյալ սկզբնական և եզրային պայմաններին՝

$$v(x,0) = \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x,0),$$

$$v(0,t) = \widetilde{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0,t),$$

$$v(l,t) = \widetilde{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l,t) :$$

Ընտրենք $U(x,t)$ ֆունկցիան այնպես, որ

$$\widetilde{\mu}_1(t) = \widetilde{\mu}_2(t) = 0 :$$

Այդ նպատակով կարող ենք վերցնել (ինչպես լարի տատանման հավասարման դեպքում)

$$U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}\big(\mu_2(t) - \mu_1(t)\big) :$$

Եվ այսպես, $u(x,t)$ ֆունկցիայի համար ընդհանուր եզրային պայմաններով խնդիրը բերվեց $v(x,t)$ ֆունկցիայի համար համասեռ եզրային պայմաններով խնդրին:

Գլուխ 4

Էլիպսական տիպի հավասարումներ

§ 1. Հարմոնիկ ֆունկցիաներ: Լապլասի հավասարման ֆունդամենտալ լուծումը: Գրինի բանաձևերը

Դիցուք $Q \subset R_n$, $n \geq 1$, տիրույթ է: Կասենք, որ $u(x)$, $x \in Q$, ֆունկցիան *հարմոնիկ* է Q տիրույթում, եթե $u \in C^2(Q)$ և բավարարում է

$$\triangle u \equiv u_{x_1x_1} + ... + u_{x_nx_n} = 0 \tag{4.1}$$

Լապլասի հավասարմանը:

Նշենք, որ գոյություն ունի ֆունկցիա, որը յուրաքանչյուր կետում բավարարում է Լապլասի հավասարմանը, սակայն հարմոնիկ չէ, քանի որ անընդհատ չէ: $n = 2$ դեպքում այդպիսի ֆունկցիայի օրինակ է

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} Re\exp\left(-\dfrac{1}{(x_1 + ix_2)^4}\right), & x_1^2 + x_2^2 \neq 0, \\ 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = 0, \end{cases}$$

ֆունկցիան, որը խզվում է $(0, 0)$ կետում:

$n = 1$ դեպքում $(a, b) \subset R_1$ միջակայքի վրա որոշված հարմոնիկ ֆունկցիաները $\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0$ հավասարման լուծումներ են և ունեն $u(x) = c_1x + c_2$ տեսքը, որտեղ c_1-ը և c_2-ը կամայական հաստատուններ են:

Մեզ հետաքրքրելու է $n > 1$ դեպքը: Այս դեպքում հարմոնիկ ֆունկցիաների բազմությունը էապես հարուստ է:

Հարմոնիկ ֆունկցիաների տեսության մեջ կարևոր դեր ունեն հատուկ տեսքի հարմոնիկ ֆունկցիաները:

Դիցուք ξ-ն R_n, $n \geq 2$, տարածության կամայական կետ է: $x \in R_n$ կետի հեռավորությունը ξ կետից նշանակենք ρ-ով. $\rho = \rho(x) = |x - \xi|$: Գտնենք բոլոր $u(x)$ հարմոնիկ ֆունկցիաները, որոնք կախված են միայն $\rho(x)$-ից: Եթե $u = u(\rho)$, ապա

$$u_{x_i} = u_\rho \rho_{x_i} = u_\rho \frac{(x_i - \xi_i)}{\rho},$$

$$u_{x_i x_i} = u_{\rho\rho} \frac{(x_i - \xi_i)^2}{\rho^2} + u_\rho \frac{1}{\rho} - u_\rho \frac{(x_i - \xi_i)^2}{\rho^3}, \quad i = 1, ..., n,$$

և

$$\triangle u = u_{\rho\rho} + (n-1)\frac{u_\rho}{\rho} :$$

Հետևաբար, մեզ հետաքրքրող հարմոնիկ ֆունկցիաները

$$u''_{\rho\rho} + (n-1)\frac{u'_\rho}{\rho} = 0, \quad \rho > 0,$$

սովորական դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներ են: $n = 2$ դեպքում այդ հավասարման ընդհանուր լուծումն է

$$u(\rho) = c_1 \ln \rho + c_2,$$

իսկ $n > 2$ դեպքում՝

$$u(\rho) = \frac{c_1}{\rho^{n-2}} + c_2,$$

որտեղ c_1 և c_2 կամայական հաստատուններ են:

Այսպիսով, $n = 2$ դեպքում $c_1 \ln |x - \xi|$ ֆունկցիաները, իսկ $n > 2$ դեպքում $\dfrac{c_1}{|x - \xi|^{n-2}}$ ֆունկցիաները $R_n \setminus \{\xi\}$ տիրույթում հարմոնիկ են:

Լապլասի հավասարման ֆունդամենտալ լուծում ξ կետում եզակիությամբ կոչվում է

$$U(x - \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln |x - \xi|, & x \in R_2 \setminus \{\xi\}, \\ \dfrac{-1}{(n-2)\sigma_n |x - \xi|^{n-2}}, & x \in R_n \setminus \{\xi\},\ n > 2, \end{cases}$$

ֆունկցիան, որտեղ σ_n միավոր սֆերայի մակերևույթի մակերեսն է R_n-ում: Մասնավորապես, $n = 3$ դեպքում ֆունդամենտալ լուծումն ունի

$$U(x-\xi) = \frac{-1}{4\pi|x-\xi|}, \quad x \in R_3 \setminus \{\xi\},$$

տեսքը:

Օգտվելով Օստրոգրադսկու բանաձևից՝ դուրս բերենք բանաձևեր, որոնք մենք կօգտագործենք հետագայում:

Դիցուք Q-ն R_n տարածության սահմանափակ տիրույթ է, $\partial Q \in C^1$, և $u \in C^2(\overline{Q})$, $v \in C^1(\overline{Q})$: Այդ դեպքում

$$\int\limits_Q v\triangle u \, dx = \int\limits_Q v \, div(\nabla u) \, dx = \int\limits_Q div(v\nabla u) \, dx - \int\limits_Q \nabla u \nabla v \, dx =$$

$$= \int\limits_{\partial Q} (v\nabla u, \nu) \, dS - \int\limits_Q \nabla u \nabla v \, dx = \int\limits_{\partial Q} v\frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \int\limits_Q \nabla u \nabla v \, dx,$$

որտեղ ν-ն ∂Q-ին տարված Q-ի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալ վեկտորն է: Այսպիսով, մենք ստացանք *Գրինի առաջին բանաձևը*.

$$\int\limits_Q v\triangle u \, dx = \int\limits_{\partial Q} v\frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \int\limits_Q \nabla u \nabla v \, dx : \tag{4.2}$$

Այժմ ենթադրենք $u, v \in C^2(\overline{Q})$: (4.2) հավասարության մեջ փոխելով u և v ֆունկցիաների դերերը՝ կստանանք

$$\int\limits_Q u\triangle v \, dx = \int\limits_{\partial Q} u\frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS - \int\limits_Q \nabla v \nabla u \, dx :$$

(4.2) հավասարությունից անդամ առ անդամ հանելով ստացված հավասարությունը՝ կստանանք *Գրինի երկրորդ բանաձևը*.

$$\int\limits_Q (v\triangle u - u\triangle v) \, dx = \int\limits_{\partial Q} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) dS : \tag{4.3}$$

Ստացված բանաձևերից բխում է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 4.1.1 *Դիցուք Q-ն սահմանափակ տիրույթ է, $\partial Q \in C^1$, $u(x)$ ֆունկ-ցիան հարմոնիկ է Q-ում և $u \in C^2(\overline{Q})$: Այդ դեպքում*

$$\int\limits_{\partial Q} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS = 0 :$$

Ապացույց: Ապացույցը հետևում է, օրինակ, (4.2) բանաձևից, վերցնելով $v \equiv 1$:

§ 2. Պոտենցիալներ: Ողորկ ֆունկցիայի ներկայացումը պոտենցիալների գումարի տեսքով

Դիցուք Q-ն R_n տարածության սահմանափակ տիրույթ է, $\partial Q \in C^1$, և $u(x)$ ֆունկցիան պատկանում է $C^2(\overline{Q})$ բազմությանը, $u \in C^2(\overline{Q})$:

Պարզության համար ենթադրենք $n = 3$:

Վերցնենք կամայական $\xi \in Q$ և դիտարկենք $Q_\varepsilon = Q \setminus \{|x-\xi| \leq \varepsilon\}$ տիրույթը, որտեղ $\varepsilon > 0$ կամայական թիվ է, որը փոքր է ξ կետի ∂Q եզրից ունեցած հեռավորությունից.

$$0 < \varepsilon < r(\xi) = \min_{y \in \partial Q} |\xi - y| :$$

Կիրառենք (4.3) բանաձևը $u(x)$ և $v(x) = \dfrac{1}{|x-\xi|}$ ֆունկցիաների համար (ընդհանուր դեպքում որպես $v(x)$ ֆունկցիա պետք է վերցնել $\dfrac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$ ֆունկցիան, երբ $n \neq 2$, և $\ln|x-\xi|$ ֆունկցիան, երբ $n = 2$): Քանի որ $v(x)$ ֆունկցիան Q_ε տիրույթում հարմոնիկ է, կստանանք

$$\int\limits_{Q_\varepsilon} \frac{\triangle u}{|x-\xi|}\, dx = \int\limits_{\partial Q_\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{|x-\xi|} - u \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) \right) dS_x =$$

$$= \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{|x-\xi|} - u \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) \right) dS_x +$$

$$+ \int\limits_{\partial Q} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{|x-\xi|} - u \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) \right) dS_x : \qquad (4.4)$$

Նշանակենք $M = \max\limits_{x\in\overline{Q}} |\triangle u(x)|$: Քանի որ

$$\left| \int\limits_{|x-\xi|\le\varepsilon} \frac{\triangle u}{|x-\xi|}\, dx \right| \le M \int\limits_{|x-\xi|\le\varepsilon} \frac{dx}{|x-\xi|} =$$

$$= M \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{\varepsilon} r\, dr = 2M\pi\varepsilon^2,$$

ապա

$$\int\limits_{Q_\varepsilon} \frac{\triangle u}{|x-\xi|}\, dx \to \int\limits_{Q} \frac{\triangle u}{|x-\xi|}\, dx, \quad \text{երբ} \quad \varepsilon \to 0 : \tag{4.5}$$

Նշանակենք $M_1 = \max\limits_{x\in\overline{Q}} |\nabla u(x)|$: Քանի որ

$$\left| \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{dS_x}{|x-\xi|} \right| \le \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} |(\nabla u, \nu)| \frac{dS_x}{|x-\xi|} \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} |\nabla u|\, dS_x \le \frac{M_1}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi M_1 \varepsilon,$$

ապա

$$\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{dS_x}{|x-\xi|} \to 0 \quad \text{երբ} \quad \varepsilon \to 0 : \tag{4.6}$$

Քանի որ $\{|x-\xi| = \varepsilon\}$ սֆերայի x կետում պարված Q_ε-ի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալը $\dfrac{\xi - x}{\varepsilon}$ վեկտորն է, ապա այդ սֆերայի վրա

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) = \left(\nabla_x \frac{1}{|x-\xi|}, \frac{\xi - x}{\varepsilon} \right) = -\left(\frac{x-\xi}{|x-\xi|^3}, \frac{\xi - x}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

և

$$\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} u(x)\, \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) dS_x = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} u(x)\, dS_x = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 u(\theta) = 4\pi u(\theta),$$

որտեղ $\theta \in \{|x-\xi| = \varepsilon\}$: Ուստի

$$\int\limits_{|x-\xi|=\varepsilon} u(x)\, \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) dS_x \to 4\pi u(\xi), \quad \text{երբ} \quad \varepsilon \to 0 : \tag{4.7}$$

Անցնելով սահմանի (4.4) հավասարության մեջ, երբ $\varepsilon \to 0$, հաշվի առնելով (4.5), (4.6), (4.7), կստանանք

$$u(\xi) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_Q \frac{\triangle u}{|x-\xi|}\, dx + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial Q} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{|x-\xi|} - u \frac{\partial}{\partial \nu_x} \left(\frac{1}{|x-\xi|} \right) \right) dS_x :$$

Հաշվի առնելով, որ $n = 3$ դեպքում $\dfrac{-1}{4\pi|x-\xi|} = U(x-\xi)$, որտեղ U-ն Լապլասի հավասարման ֆունդամենտալ լուծումն է, ստացված հավասարությունը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով.

$$u(\xi) = \int\limits_Q U(x-\xi) \triangle u(x)\, dx + \int\limits_{\partial Q} \left(u(x) \frac{\partial}{\partial \nu_x} U(x-\xi) - \frac{\partial u}{\partial \nu} U(x-\xi) \right) dS_x :$$

Վերջապես, ξ-ն փոխարինելով x-ով, x-ը փոխարինելով y-ով՝ ստացված հավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$u(x) = \int\limits_Q U(x-\xi) \triangle u(y)\, dy +$$

$$+ \int\limits_{\partial Q} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} U(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu} U(x-y) \right) dS_y, \quad x \in Q : \qquad (4.8)$$

(4.8) բանաձևը տեղի ունի ցանկացած $n \geq 2$ չափողականության դեպքում:

$$u_0(x) = \int\limits_Q U(x-y) \rho_0(y)\, dy, \quad x \in Q, \qquad (4.9)$$

ֆունկցիան, որտեղ $\rho_0 \in C(\overline{Q})$, կոչվում է *ծավալային պոտենցիալ* ρ_0 խտությամբ:

$$u_1(x) = \int\limits_{\partial Q} U(x-y) \rho_1(y)\, dS_y, \quad x \in Q, \qquad (4.10)$$

ֆունկցիան, որտեղ $\rho_1 \in C(\partial Q)$, կոչվում է *պարզ շերտի պոտենցիալ* ρ_1 խտությամբ:

$$u_2(x) = \int\limits_{\partial Q} \frac{\partial U(x-y)}{\partial \nu_y} \rho_2(y)\, dS_y, \quad x \in Q, \qquad (4.11)$$

ֆունկցիան, որտեղ $\rho_2 \in C(\partial Q)$, կոչվում է *կրկնակի շերտի պոտենցիալ* ρ_2 *խտությամբ*:

Դժվար չէ նկատել, որ պարզ շերտի և կրկնակի շերտի պոտենցիալները Q տիրույթում անվերջ դիֆերենցելի և հարմոնիկ ֆունկցիաներ են:

Մենք ապացուցեցինք ($n = 3$ դեպքում) հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 4.2.1 *Դիցուք Q-ն R_n տարածության սահմանափակ տիրույթ է, $\partial Q \in C^1$: Այդ դեպքում ցանկացած $u \in C^2(\overline{Q})$ ֆունկցիա ներկայացվում է ծավալային պոտենցիալի ($\triangle u$ խտությամբ), պարզ շերտի պոտենցիալի ($-\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ խտությամբ) և կրկնակի շերտի պոտենցիալի (u խտությամբ) գումարի տեսքով:*

Հետևանք: *Եթե թեորեմում հիշատակված $u(x)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է Q տիրույթում, ապա Q-ում այն կարող է ներկայացվել պարզ և կրկնակի շերտերի պոտենցիալների գումարի տեսքով:*

§ 3. Միջինի մասին թեորեմը

Թեորեմ 4.3.1 (Մակերևութային միջինի մասին) *Դիցուք Q-ն R_n տարածության կամայական տիրույթ է, $u(x)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է Q տիրույթում, $x_0 \in Q$ կամայական կետ է: Այդ դեպքում ցանկացած R-ի համար, $0 < R < r(x^0)$, որտեղ $r(x^0)$-ն x^0 կետի հեռավորությունն է ∂Q եզրից, տեղի ունի*

$$u(x^0) = \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \int\limits_{|x^0-y|=R} u(y)\, dS_y$$

հավասարությունը, որտեղ σ_n միավոր սֆերայի մակերևույթի մակերեսն է R_n-ում:

Այլ խոսքով, $x_0 \in Q$ կետում հարմոնիկ ֆունկցիայի արժեքը հավասար է x_0 կենտրոնով և R շառավղով սֆերայի վրա այդ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների միջին թվաբանականին:

Ապացույց: Թեորեմի ապացույցը շարադրենք $n = 3$ դեպքի համար: Քանի որ $B_R(x^0) = \{|y - x^0| < R\}$ գունդը էապես ընկած է Q տիրույթի մեջ՝ $B_R(x^0) = \{|y - x^0| < R\} \Subset Q$, ապա $u(x) \in C^2(\overline{B}_R(x^0))$ և կարող ենք կիրառել (4.8) բանաձևը $u(x)$ ֆունկցիայի համար $B_R(x^0)$ գնդում.

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x^0-y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|x-y|} \, dS_y -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x^0-y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y, \quad x \in B_R(x^0) :$$

Մասնավորապես, երբ $x = x^0$, կստանանք

$$u(x^0) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{|x^0-y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \, dS_y - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x^0-y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|x^0-y|} \right) dS_y =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|x^0-y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|x^0-y|} \right) dS_y.$$

քանի որ ըստ Թեորեմ 4.1.1-ի ունենք $\displaystyle\int\limits_{|x^0-y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \, dS_y = 0$: $\{|x^0 - y| = R\}$ սֆերայի y կետում տարված $B_R(x^0)$ գնդի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալը $\dfrac{y - x^0}{R}$ վեկտորն է: Հետևաբար, այդ սֆերայի վրա

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|x^0-y|} \right) = -\frac{(y - x^0, y - x^0)}{R\,|x^0 - y|^3} = -\frac{1}{R^2}$$

և

$$u(x^0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{|x^0-y|=R} u(y) \, dS_y :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 4.3.1 - ից բխում է հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 4.3.2 (Ծավալային միջինի մասին) *Դիցուք Q-ն R_n տարածության կամայական տիրույթ է, $u(x)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է Q տիրույթում, $x_0 \in Q$ կամայական կետ է: Այդ դեպքում ցանկացած R-ի համար, $0 < R < r(x^0)$,* *տեղի ունի*

$$u(x^0) = \frac{n}{\sigma_n R^n} \int\limits_{|x^0-y|\le R} u(y)\, dy$$

հավասարությունը, որտեղ $\dfrac{\sigma_n}{n}$ *միավոր գնդի ծավալն է* R_n*-ում:*

Այլ խոսքով, $x_0 \in Q$ *կետում հարմոնիկ ֆունկցիայի արժեքը հավասար է* x_0 *կենտրոնով և* R *շառավղով գնդում այդ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների միջին թվաբանականին:*

Ապացույց: Դիցուք $n = 3$: Ըստ Թեորեմ 4.3.1-ի, կամայական ρ-ի համար, $0 < \rho < r(x^0)$,

$$4\pi\rho^2 u(x^0) = \int\limits_{|x^0-y|=\rho} u(y)\, dS_y :$$

Ինտեգրելով այս հավասարությունը ըստ ρ-ի 0-ից R, ստանում ենք

$$\frac{4\pi}{3} R^3 u(x^0) = \int\limits_0^R d\rho \int\limits_{|x^0-y|=\rho} u(y)\, dS_y = \int\limits_{|x^0-y|\le R} u(y)\, dy :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

§ 4. Մաքսիմումի սկզբունքը

Կասենք, որ $Q \subset R_n$ տիրույթում $u(x)$ անընդհատ ֆունկցիան օժտված է միջինի հատկությամբ, եթե ցանկացած $x_0 \in Q$ կետի համար և ցանկացած $R > 0$ համար, $0 < R < r(x^0)$, տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$u(x^0) = \frac{n}{\sigma_n R^n} \int\limits_{|x^0-y|\le R} u(y)\, dy : \qquad (4.12)$$

Թեորեմ 4.3.2-ից հետևում է, որ հարմոնիկ ֆունկցիաները օժտված են միջինի հատկությամբ: Իրականում այդ հատկությամբ բնութագրվում են բոլոր հարմոնիկ ֆունկցիաները. հետագայում մենք կապացուցենք, որ տեղի ունի նաև միջինի վերաբերյալ հակադարձ թեորեմը:

Միջինի հատկությամբ օժտված ֆունկցիաների համար տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 4.4.1 *Դիցուք Q-ն R_n տարածության սահմանափակ տիրույթ է, $u(x)$ ֆունկցիան պատկանում է $C(\overline{Q})$-ին և օժտված է միջինի հատկությամբ: Այդ դեպքում կամ*

$$u(x) \equiv 0, \quad x \in Q,$$

կամ

$$\min_{\overline{Q}} u < u(x) < \max_{\overline{Q}} u, \quad x \in Q : \tag{4.13}$$

Ապացույց: Նշանակենք $M = \max\limits_{\overline{Q}} u$: Ցույց տանք, որ եթե գոյություն ունի այնպիսի $x^0 \in Q$ կետ, որ $u(x^0) = M$, ապա $u(x) = M$, $x \in Q$:

Վերցնենք կամայական $y \in Q$ կետ և ցույց տանք, որ $u(y) = M$: Միացնենք y և x^0 կետերը $L = \overline{L}$ վերջավոր բեկյալով, որն ամբողջությամբ ընկած է Q տիրույթի մեջ: L բեկյալի և ∂Q եզրի հեռավորությունը նշանակենք $d = \min\limits_{\substack{x\in L\\ y\in\partial Q}} |x - y| > 0$ և L բեկյալը ծածկենք $B_i = \{|x - x^i| < \dfrac{d}{2}\}$, $i = 0, 1, ..., N$, վերջավոր քանակի գնդերով, որտեղ $x^i \in L \cap \partial B_{i-1}$, $i = 1, ..., N$, ընդ որում $y \in \overline{B}_N$:

Դիցուք $n = 3$: Ըստ (4.12)-ի ունենք

$$u(x^0) = \frac{3}{4\pi(d/2)^3} \int\limits_{B_0} u(x)\, dx,$$

որը կարելի է արտագրել

$$\int\limits_{B_0} \big(u(x^0) - u(x)\big)\, dx = 0$$

տեսքով: Քանի որ $u(x^0) - u(x)$ ենթաինտեգրալային ֆունկցիան անընդհատ է $\overline{B}_0$-ում և ոչբացասական է, ապա $\overline{B}_0$-ում $u(x^0) - u(x) \equiv 0$, այսինքն՝ $\overline{B}_0$-ում $u(x) \equiv u(x^0) = M$ և, մասնավորապես, $u(x^1) = M$: x^1 կետի և B_1 գնդի համար կրկնելով նույն դատողությունները՝ կստանանք, որ $\overline{B}_1$-ում $u(x) \equiv M$, մասնավորապես՝ $u(x^2) = M$: Կրկին կապարելով նույն դատողությունները՝ արդյունքում կստանանք, որ $\overline{B}_N$-ում $u(x) \equiv M$, մասնավորապես՝ $u(y) = M$:

Եվ այսպես, ապացուցեցինք, որ կամ Q-ում $u(x) \equiv const$ կամ Q-ում տեղի ունի (4.13) անհավասարության աջ մասը: Կիրառելով ապացուցված պնդումը $-u(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ՝ կստանանք, որ կամ Q-ում $u(x) \equiv const$ կամ Q-ում տեղի ունի (4.13) անհավասարության ձախ մասը: Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 4.4.1-ից հետևում է, որ լեմմայի պայմաններին բավարարող և հաստատունից տարբեր $u(x)$ ֆունկցիան Q տիրույթի ներսում չի կարող ընդունել այնպիսի արժեքներ, որոնք հավասար են $\overline{Q}$-ում այդ ֆունկցիայի մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքներին: Հետևաբար, այդպիսի ֆունկցիան իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները ընդունում է ∂Q եզրի վրա: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 4.4.2 *Դիցուք Q-ն R_n տարածության սահմանափակ տիրույթ է, $u(x)$ ֆունկցիան պատկանում է $C(\overline{Q})$-ին և օժտված է միջինի հատկությամբ: Այդ դեպքում կամ*

$$u(x) \equiv const, \quad x \in Q,$$

կամ

$$\min_{\partial Q} u < u(x) < \max_{\partial Q} u, \quad x \in Q :$$

Իհարկե, տեղի ունի նաև հետևյալ ավելի թույլ պնդումը:

Լեմմա 4.4.3 *Դիցուք Q-ն R_n տարածության սահմանափակ տիրույթ է, $u(x)$ ֆունկցիան պատկանում է $C(\overline{Q})$ և օժտված է միջինի հատկությամբ: Այդ դեպքում*

$$\min_{\partial Q} u \le u(x) \le \max_{\partial Q} u, \quad x \in \overline{Q} :$$

Քանի որ Q տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիան օժտված է միջինի հատկությամբ, ապա Լեմմա 4.4.2-ից և Լեմմա 4.4.3-ից անմիջապես հետևում են հետևյալ պնդումները:

Թեորեմ 4.4.1 (Մեծագույն արժեքի սկզբունքը) *Դիցուք* Q*-ն* R_n *պարածության սահմանափակ տիրույթ է,* $u(x)$ *ֆունկցիան պատկանում է* $C(\overline{Q})$*-ին և հարմոնիկ է: Այդ դեպքում կամ*

$$u(x) \equiv const, \quad x \in Q,$$

կամ

$$\min_{\partial Q} u < u(x) < \max_{\partial Q} u, \quad x \in Q :$$

Թեորեմ 4.4.2 (Մեծագույն արժեքի թույլ սկզբունքը) *Դիցուք* Q*-ն* R_n *պարածության սահմանափակ տիրույթ է,* $u(x)$ *ֆունկցիան պատկանում է* $C(\overline{Q})$ *բազմությանը և հարմոնիկ է: Այդ դեպքում*

$$\min_{\partial Q} u \le u(x) \le \max_{\partial Q} u, \quad x \in \overline{Q} :$$

§ 5. Դիրիխլեի խնդիր: Լուծման միակությունը և անընդհատ կախվածությունը եզրային ֆունկցիայից

Դիցուք Q-ն R_n պարածության սահմանափակ տիրույթ է: $C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ բազմությանը պատկանող $u(x)$ ֆունկցիան կոչվում է

$$\triangle u = f(x), \quad x \in Q, \tag{4.14}$$

$$u\big|_{\partial Q} = \varphi(x), \tag{4.15}$$

Դիրիխլեի խնդրի լուծում ($f(x)$ և $\varphi(x)$ տրված ֆունկցիաներ են), եթե այն Q տիրույթում բավարարում է (4.14) հավասարմանը, իսկ ∂Q եզրի վրա (4.15) եզրային պայմանին: Լուծման սահմանումից ակնհայտորեն հետևում է, որ (4.14), (4.15) խնդրի լուծելիության համար *անհրաժեշտ* է, որ հավասարման աջ մասը և եզրային ֆունկցիան լինեն անընդհատ. $f \in C(Q)$, $\varphi \in C(\partial Q)$:

Թեորեմ 4.4.2 - ից բխում են հետևյալ երկու պնդումները:

Թեորեմ 4.5.1 (Միակության թեորեմ) (4.14), (4.15) *խնդիրը չի կարող ունենալ մեկից ավելի լուծում:*

Ապացույց: Ենթադրենք հակառակը: Դիցուք $u_1(x)$ և $u_2(x)$ ֆունկցիաները (4.14), (4.15) խնդրի լուծումներ են: Այդ դեպքում $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ ֆունկցիան

$$\triangle u = 0, \quad x \in Q,$$

$$u\big|_{\partial Q} = 0,$$

համասեռ խնդրի լուծում է: Քանի որ $u \in C(\overline{Q})$ ֆունկցիան հարմոնիկ է Q-ում և $\max\limits_{\partial Q} u = \min\limits_{\partial Q} u = 0$, ապա ըստ Թեորեմ 4.4.2-ի՝ $u(x) \equiv 0$, $x \in \overline{Q}$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 4.5.2 (Եզրային ֆունկցիայից լուծման անընդհատ կախվածության մասին) *Դիցուք* $u_1(x)$ *և* $u_2(x)$ *ֆունկցիաները*

$$\begin{cases} \triangle u_1 = f(x), \quad x \in Q, \\ u_1\big|_{\partial Q} = \varphi_1(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \triangle u_2 = f(x), \quad x \in Q, \\ u_2\big|_{\partial Q} = \varphi_2(x), \end{cases}$$

խնդիրների լուծումներ են: Այդ դեպքում, եթե որևէ $\varepsilon > 0$ *համար*

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in \partial Q, \tag{4.16}$$

ապա

$$|u_1(x) - u_2(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in \overline{Q}: \tag{4.17}$$

Ապացույց: Դիտարկենք $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ տարբերությունը: $u(x)$ ֆունկցիան

$$\begin{cases} \triangle u = 0, \quad x \in Q, \\ u\big|_{\partial Q} = \varphi(x), \end{cases}$$

խնդրի լուծում է, որտեղ $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$: Ըստ Թեորեմ 4.4.2-ի և (4.16) անհավասարության՝

$$-\varepsilon \le \min_{\partial Q}\varphi \le u(x) \le \max_{\partial Q}\varphi \le \varepsilon, \quad x\in\overline{Q},$$

որտեղից հետևում է (4.17): Թեորեմն ապացուցված է:

Մինչև Դիրիխլեի խնդրի լուծման գոյության հարցի ուսումնասիրությանն անցնելը՝ ներկայացնենք Ադամարի օրինակը, որը ցույց է տալիս, որ Կոշիի խնդիրը Լապլասի հավասարման համար դրված է ոչ կոռեկտ, որովհետև բացակայում է լուծման անընդհատ կախվածությունը սկզբնական ֆունկցիաներից:

Ադամարի օրինակ: Դիտարկենք Կոշիի հետևյալ խնդիրները Լապլասի հավասարման համար՝

$$(K_0)\quad \begin{cases} u_{0tt}+u_{0xx}=0, \quad x\in R_1,\ t>0,\\ u_0\big|_{t=0}=0, \quad x\in R_1,\\ u_{0t}\big|_{t=0}=0, \quad x\in R_1, \end{cases}$$

$$(K_n)\quad \begin{cases} u_{ntt}+u_{nxx}=0, \quad x\in R_1,\ t>0,\\ u_n\big|_{t=0}=0, \quad x\in R_1,\\ u_{nt}\big|_{t=0}=\dfrac{1}{n}\sin nx, \quad x\in R_1: \end{cases}$$

$u_0(x,t)\equiv 0$ և $u_n(x,t)=\dfrac{\operatorname{sh} nt}{n^2}\sin nx$, $n=1,2,...$, $x\in R_1$, $t\ge 0$, ֆունկցիաները համապատասխանաբար (K_0) և (K_n) խնդիրների լուծումներ են: (K_n) խնդրում սկզբնական ֆունկցիան հավասարաչափ ըստ $x\in R_1$ ձգտում է զրոյի, երբ $n\to\infty$, այսինքն՝ (K_0) խնդրի սկզբնական ֆունկցիային: Սակայն, երբ $x\ne\pi j$, $j=0,\pm1,...$, $u_n(x,t)-u_0(x,t)$ տարբերությունը չի ձգտում զրոյի, երբ $n\to\infty$:

§ 6. Ողորկ ֆունկցիայի ներկայացումը գնդում: Գրինի ֆունկցիան գնդի համար

Դիտարկենք $n = 3$ դեպքը: Դիցուք $u \in C^2(|x| \leq R)$: Այդ դեպքում, ըստ (4.8) ներկայացման, ցանկացած x, $|x| < R$, կետի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y| \leq R} \frac{\triangle u(y)}{|x-y|}\, dy + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|x-y|}\, dS_y -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y : \qquad (4.18)$$

Վերցնենք կամայական ξ կետ, որը չի պատկանում $\{|x| \leq R\}$ փակ գնդին. $|\xi| > R$: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$0 = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y| \leq R} \frac{\triangle u(y)}{|\xi - y|}\, dy + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|\xi - y|}\, dS_y -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|\xi - y|} \right) dS_y : \qquad (4.19)$$

Իրոք, (4.19) հավասարությունը ստանալու նպատակով $\{|y| \leq R\}$ գնդում կիրառենք Գրինի (4.3) երկրորդ բանաձևը $u(y)$ և $\dfrac{-1}{4\pi|\xi - y|}$ ֆունկցիաների համար.

$$\int\limits_{|y| \leq R} \left(u(y) \triangle_y \left(\frac{-1}{4\pi|\xi - y|} \right) + \frac{1}{4\pi|\xi - y|} \triangle u(y) \right) dy =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \frac{1}{|\xi - y|} dS_y - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{1}{|\xi - y|} \right) dS_y,$$

և հաշվի առնենք, որ $\dfrac{1}{4\pi|\xi - y|}$ ֆունկցիան հարմոնիկ է $\{|y| < R\}$ գնդում:

Բազմապատկենք (4.19) հավասարությունը կամայական $d(\xi)$ $(|\xi| > R)$ անընդհատ ֆունկցիայով և ստացված հավասարությունը անդամ առ անդամ հանենք (4.18) հավասարությունից: Կստանանք, որ ցանկացած x, $|x| < R$, կետի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|\le R} \left(\frac{d(\xi)}{|\xi - y|} - \frac{1}{|x-y|} \right) \triangle u(y)\, dy +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{d(\xi)}{|\xi - y|} \right) dS_y +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|y|=R} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \left(\frac{d(\xi)}{|\xi - y|} - \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y : \qquad (4.20)$$

Մեր նպատակն է՝ յուրաքանչյուր x, $|x| < R$, կետի համար գտնել այնպիսի ξ, $|\xi| > R$, կետ $(\xi = \xi(x))$ և $d(\xi) = d\left(\xi(x)\right)$ ֆունկցիա, որ $\{|y| = R\}$ սֆերայի վրա տեղի ունենա

$$\frac{1}{|x-y|} \equiv \frac{d(\xi)}{|\xi - y|}, \quad |y| = R, \qquad (4.21)$$

նույնությունը: Այդ դեպքում (4.20) հավասարության աջ մասի երկրորդ գումարելին հավասար կլինի զրոյի:

Փնտրենք $\xi = \xi(x)$ կետը

$$\xi = a(x)\, x$$

տեսքով: Գտնենք $a(x)$ ֆունկցիան: Ըստ (4.21)-ի ունենք

$$|ax - y|^2 \equiv d^2 |x-y|^2, \quad |y| = R,$$

որտեղից

$$(a^2 - d^2)|x|^2 + R^2(1 - d^2) \equiv 2(x, y)(a - d^2), \quad |y| = R :$$

Վերցնելով $a = d^2$, կունենանք

$$d^2(d^2 - 1)|x|^2 + R^2(1 - d^2) \equiv 0, \quad |y| = R,$$

$$(d^2 - 1)\left(d^2|x|^2 - R^2\right) \equiv 0, \quad |y| = R,$$

որտեղից հետևում է, որ

$$d = \frac{R}{|x|}$$

(համաձայն (4.21) պայմանի $d > 0$): Նկատենք, որ $d^2 \equiv 1$ դեպքը մեր պահանջներին չի բավարարում, քանի որ այդ դեպքում ստացվում է $a \equiv 1$, $\xi(x) = x$, հետևաբար $|\xi| = |x| < R$, ինչը հակասում է մեր այն ենթադրությանը, որ $|\xi| > R$: Եվ այսպես, եթե վերցնենք

$$d(\xi(x)) = d(x) = \frac{R}{|x|}, \quad \xi = \frac{R^2}{|x|^2}x$$

(նկատենք, որ այս դեպքում $|\xi| = \dfrac{R^2}{|x|^2}|x| = \dfrac{R^2}{|x|} > R$), ապա (4.21) նույնությունը տեղի ունի: Հետևաբար, ըստ (4.20)-ի, տեղի ունի

$$u(x) = \int\limits_{|y|\leq R} G(x,y)\triangle u(y)\, dy + \int\limits_{|y|=R} P(x,y)u(y)\, dS_y \tag{4.22}$$

հավասարությունը, որը

$$\triangle u = f(x), \quad |x| < R, \tag{4.23}$$

$$u\big|_{|x|=R} = \varphi, \tag{4.24}$$

Դիրիխլեի խնդրի լուծման համար կընդունի հետևյալ տեսքը (այստեղ ենթադրվում է, որ $u \in C^2(|x| \leq R)$)

$$u(x) = \int\limits_{|y|\leq R} G(x,y)f(y)\, dy + \int\limits_{|y|=R} P(x,y)\varphi(y)\, dS_y, \tag{4.25}$$

որտեղ

$$G(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{|x-y|} + R\left(|x|\left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|\right)^{-1}\right], \quad |y| \leq R,\ |x| < R,$$

$$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y}G(x,y), \quad |y| = R,\ |x| < R: \tag{4.26}$$

$G(x,y)$ ֆունկցիան կոչվում է $(4.23), (4.24)$ խնդրի *Գրինի ֆունկցիա*, իսկ $P(x,y)$ ֆունկցիան կոչվում է $(4.23), (4.24)$ խնդրի *Պուասոնի միջուկ*: Պուասոնի միջուկի համար կարելի է ստանալ, որոշ իմաստով, ավելի պարզ տեսք: Համաձայն (4.26)-ի և (4.21)-ի,

$$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial \nu_y}G(x,y) = \left(\nabla_y G(x,y), \frac{y}{R}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(-\nabla_y \frac{1}{|x-y|} + \nabla_y \frac{d}{|\xi - y|}, \frac{y}{R}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{x-y}{|x-y|^3} + \frac{d(\xi - y)}{|\xi - y|^3}, \frac{y}{R}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{x-y}{|x-y|^3} + \frac{\xi - y}{d^2|x-y|^3}, \frac{y}{R}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi|x-y|^3}\left(-x + y + \frac{\frac{R^2}{|x|^2}x - y}{R^2}|x|^2, \frac{y}{R}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi|x-y|^3}\left(y\left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right), \frac{y}{R}\right) =$$

$$= \frac{R^2 - |x|^2}{4\pi R|x-y|^3}, \quad |y| = R,\ |x| < R : \tag{4.27}$$

Կամայական $n \geq 2$ դեպքում $(4.23), (4.24)$ խնդրի Գրինի ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_n}\left(-\dfrac{1}{|x-y|^{n-2}} + \dfrac{\left(\dfrac{R}{|x|}\right)^{n-2}}{\left|\dfrac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^{n-2}}\right), |y| \leq R,\ |x| < R,\ \text{երբ } n > 2, \\ \\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{|x|\left|y - \dfrac{R^2}{|x|^2}x\right|}{R|x-y|}, \quad |y| \leq R,\ |x| < R, \quad \text{երբ} \quad n = 2, \end{cases}$$

իսկ Պուասոնի միջուկը՝

$$P(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R|x-y|^n}, \quad |y| = R,\ |x| < R,$$

որտեղ σ_n միավոր սփերայի մակերևույթի մակերեսն է R_n-ում:

Մենք ցույց տվեցինք, որ եթե $(4.23), (4.24)$ խնդրի լուծումը գոյություն ունի և պատկանում է $C^2(|x| \leq R)$ բազմությանը, ապա այդ լուծումն ունի (4.25) տեսքը: Հիշատակված խնդրի լուծման գոյությունը ապացուցելու համար ցույց կտանք, որ եթե $f(x)$ և $\varphi(x)$ ֆունկցիաները բավարարում են որոշակի պայմանների, ապա (4.25) բանաձևով տրված $u(x)$ ֆունկցիան այդ խնդրի լուծում է: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը, որը ներկայացնում ենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 4.6.1 *Եթե* $f \in C(|x| \le R) \cap C^1(|x| < R)$, $\varphi \in C(|x| = R)$, *ապա* $(4.23), (4.24)$ *Դիրիխլեի խնդրի լուծումը գոյություն ունի և տրվում է* (4.25) *բանաձևով:*

§ 7. Լապլասի հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծման գոյությունը գնդում

Այս պարագրաֆում կապացուցենք Թեորեմ 4.6.1-ը $f(x) \equiv 0$ մասնավոր դեպքում: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 4.7.1 *Եթե* $\varphi \in C(|x| = R)$, *ապա*

$$\triangle u = 0, \quad |x| < R, \tag{4.28}$$

$$u\Big|_{|x|=R} = \varphi, \tag{4.29}$$

Դիրիխլեի խնդրի լուծումը գոյություն ունի և տրվում է

$$u(x) = \int\limits_{|y|=R} P(x,y)\varphi(y)\, dS_y, \quad |x| < R, \tag{4.30}$$

բանաձևով:

Ապացույց: Ապացույցը կատարենք $n = 3$ դեպքի համար: Նախ ցույց տանք, որ $u(x)$ ֆունկցիան պատկանում է $C^2(|x| < R)$ բազմությանը և հարմոնիկ է: (4.27) Պուասոնի միջուկը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$P(x,y) = \frac{R^2 - |(x-y)+y|^2}{4\pi R|x-y|^3} = \frac{R^2 - |x-y|^2 - |y|^2 - 2(x-y,y)}{4\pi R|x-y|^3} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi R|x-y|} - \frac{(x-y,y)}{2\pi R|x-y|^3}, \quad |y| = R,\ |x| < R:$$

Քանի որ, երբ $|y| = R,\ |x| < R$, տեղի ունի

$$\frac{(x-y,y)}{|x-y|^3} = R\left(\nabla_y \frac{1}{|x-y|}, \frac{y}{R}\right) = R\frac{\partial}{\partial \nu_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)$$

հավասարությունը (նկատենք, որ $\nu_y = \dfrac{y}{R}$), ապա

$$P(x,y) = -\frac{1}{4\pi R|x-y|} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \nu_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right), \quad |y| = R,\ |x| < R,$$

և (4.30) բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|y|=R} \frac{\varphi(y)}{|x-y|}\, dS_y - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y|=R} \varphi(y)\frac{\partial}{\partial \nu_y}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dS_y, \quad |x| < R :$$

Ստացված բանաձևը ցույց է տալիս, որ $u(x)$ ֆունկցիան պարզ շերտի և կրկնակի շերտի պոտենցիալների գումար է: Հետևաբար, u-ն պատկանում է $C^\infty(|x| < R)$ բազմությանը և հարմոնիկ է $\{|x| < R\}$ գնդում:

Այժմ ցույց տանք, որ $u(x)$ ֆունկցիան պատկանում է $C(|x| \leq R)$ բազմությանը և բավարարում է (4.29) եզրային պայմանին: Վերցնենք կամայական x^0 կետ, $|x^0| = R$, և ցույց տանք, որ

$$u(x) \to \varphi(x^0), \quad \text{երբ} \quad x \to x^0,\ |x| < R : \tag{4.31}$$

Վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$: Քանի որ $\varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x^0 կետում, ապա գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$, որ

$$|\varphi(y) - \varphi(x^0)| \leq \varepsilon, \quad \text{եթե} \quad |y - x^0| \leq \delta,\ |y| = R : \tag{4.32}$$

(4.22) բանաձևից անմիջապես բխում է (կիրառելով այն $u(x) \equiv 1,\ |x| \leq R$, ֆունկցիայի համար), որ

$$\int\limits_{|y|=R} P(x,y)\, dS_y = 1 :$$

Հետևաբար, $u(x) - \varphi(x^0)$ տարբերությունը ($|x| < R$) կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$u(x) - \varphi(x^0) = \int\limits_{|y|=R} P(x,y)\varphi(y)\, dS_y - \int\limits_{|y|=R} P(x,y)\varphi(x^0)\, dS_y =$$

$$= \int\limits_{|y|=R} P(x,y)\left(\varphi(y)-\varphi(x^0)\right)dS_y =$$

$$= \int\limits_{S_1(\delta)} P(x,y)\left(\varphi(y)-\varphi(x^0)\right)dS_y + \int\limits_{S_2(\delta)} P(x,y)\left(\varphi(y)-\varphi(x^0)\right)dS_y =$$

$$= I_1(x) + I_2(x),$$

որտեղ $S_1(\delta) = \{|y| = R\} \cap \{|y-x^0| \le \delta\}$, $S_2(\delta) = \{|y| = R\} \cap \{|y-x^0| > \delta\}$:

Գնահատենք $I_1(x)$ և $I_2(x)$ ինտեգրալները: Ըստ (4.32)-ի՝ ունենք

$$|I_1(x)| \le \int\limits_{S_1(\delta)} P(x,y)\left|\varphi(y)-\varphi(x^0)\right|dS_y \le \varepsilon \int\limits_{S_1(\delta)} P(x,y)\,dS_y \le$$

$$\le \varepsilon \int\limits_{|y|=R} P(x,y)\,dS_y = \varepsilon, \quad |x| < R \tag{4.33}$$

(օգտվեցինք նաև այն փաստից, որ Պուասոնի միջուկը ոչբացասական է):

Նշանակենք $M = \max\limits_{|x|=R} |\varphi(x)|$:

$$|I_2(x)| \le \int\limits_{S_2(\delta)} P(x,y)\left|\varphi(y)-\varphi(x^0)\right|dS_y \le$$

$$\le 2M \int\limits_{S_2(\delta)} P(x,y)\,dS_y, \quad |x| < R : \tag{4.34}$$

Վերցնենք $\left|x-x^0\right| < \dfrac{\delta}{2}, \quad |x| < R$: Եթե $y \in S_2(\delta)$, ապա

$$|x-y| = \left|(y-x^0)-(x-x^0)\right| \ge \left|y-x^0\right| - \left|x-x^0\right| \ge \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} :$$

(4.34) գնահատականից ստանում ենք

$$|I_2(x)| \le 2M \int\limits_{S_2(\delta)} P(x,y)\,dS_y = 2M \int\limits_{S_2(\delta)} \frac{R^2-|x|^2}{4\pi R|x-y|^3}\,dS_y \le$$

$$\le \frac{M}{2\pi R} \int\limits_{S_2(\delta)} \frac{R^2-|x|^2}{(\delta/2)^3}\,dS_y \le \frac{M(R^2-|x|^2)}{2\pi R(\delta/2)^3} 4\pi R^2, \quad \left|x-x^0\right| < \frac{\delta}{2}, \quad |x| < R :$$

Վերցնելով x^0-ին բավականաչափ մոտ x, $|x| < R$, կստանանք

$$|I_2(x)| \leq \varepsilon : \tag{4.35}$$

(4.33) և (4.35) գնահատականներից ստանում ենք, որ x^0-ին բավականաչափ մոտ x-երի համար ($|x| < R$)

$$|u(x) - \varphi(x^0)| \leq |I_1(x)| + |I_2(x)| \leq 2\varepsilon,$$

որտեղից հետևում է (4.31): Թեորեմն ապացուցված է:

Հաջորդ պարագրաֆները նվիրված են ապացուցված թեորեմի որոշ կարևոր կիրառություններին:

§ 8. Միջինի մասին հակադարձ թեորեմը

Թեորեմ 4.8.1 (Միջինի մասին հակադարձ թեորեմ) *Դիցուք Q-ն R_n տարածության կամայական տիրույթ է, $u(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է Q-ում և օժտված է միջինի հատկությամբ: Այդ դեպքում $u(x)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է Q-ում:*

Ապացույց: Վերցնենք կամայական $x^0 \in Q$ կետ և թող $R > 0$ այնպիսին է, որ x^0 կենտրոնով և R շառավղով փակ գունդը ընկած է Q տիրույթում. $B_R(x^0) = \{|x - x^0| < R\} \Subset Q$: Քանի որ $x^0 \in Q$ կետը կամայական է, ապա թեորեմն ապացուցելու համար բավարար է ապացուցել, որ $u(x)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է $B_R(x^0)$-ում: $v(x)$-ով նշանակենք $B_R(x^0)$ գնդում

$$\triangle v = 0, \quad x \in B_R(x^0),$$

$$v\big|_{\partial B_R(x^0)} = u\big|_{\partial B_R(x^0)},$$

Դիրիխլեի խնդրի լուծումը: Քանի որ $u\big|_{\partial B_R(x^0)} \in C(\partial B_R(x^0))$, ապա ըստ Թեորեմ 4.7.1-ի՝ $v(x)$ լուծումը գոյություն ունի: Դիտարկենք $u(x) - v(x)$, $x \in \overline{B}_R(x^0)$, ֆունկցիան: Այս ֆունկցիան պատկանում է $C(\overline{B}_R(x^0))$ բազմությանը և $B_R(x^0)$

գնդում օժտված է միջինի հատկությամբ, քանի որ $u(x)$ ֆունկցիան օժտված է միջինի հատկությամբ՝ ըստ թեորեմի պայմանի, նաև $v(x)$ ֆունկցիան է օժտված միջինի հատկությամբ, քանի որ հարմոնիկ է: Ըստ Լեմմա 4.4.3-ի՝ տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները.

$$\min_{\partial B_R(x^0)}(u-v) \le u(x)-v(x) \le \max_{\partial B_R(x^0)}(u-v), \quad x \in \overline{B}_R(x^0) :$$

Մյուս կողմից $(u-v)\big|_{\partial B_R(x^0)} \equiv 0$, հետևաբար $\overline{B}_R(x^0)$-ում $u(x) \equiv v(x)$, այսինքն՝ $u(x)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է $B_R(x^0)$ գնդում: Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն: Նկատենք, որ թեորեմի ապացույցի ընթացքում չպահանջվեց Դիրիխլեի խնդրի լուծման բացահայտ տեսքը, այլ պահանջվեց միայն Դիրիխլեի խնդրի լուծման գոյությունը:

Դիտարկում: Դիտարկենք Լապլասի օպերատորի (դիցուք $n=2$) պարզագույն տարբերական մոտարկումը: Բավականաչափ փոքր h-ի դեպքում

$$\triangle u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} \approx \frac{1}{h^2}\left[u(x_1-h,x_2) - 2u(x_1,x_2) + u(x_1+h,x_2)\right] +$$

$$+\frac{1}{h^2}\left[u(x_1,x_2-h) - 2u(x_1,x_2) + u(x_1,x_2+h)\right] :$$

Դա նշանակում է, որ $\triangle u = 0$ Լապլասի հավասարումը փոխարինվում է

$$u(x_1,x_2) = \frac{1}{4}\left[u(x_1-h,x_2) + u(x_1+h,x_2) + u(x_1,x_2-h) + u(x_1,x_2+h)\right]$$

հավասարությամբ, որը ոչ այլ ինչ է, քան միջինի հատկության արտահայտություն, որովհետև $u(x)$ ֆունկցիայի արժեքը (x_1,x_2) կենտրոնական կետում հավասար է այդ կետի (x_1-h,x_2), (x_1+h,x_2), (x_1,x_2-h), (x_1,x_2+h) հարևան չորս կետերում ֆունկցիայի արժեքների միջին թվաբանականին:

§ 9. Վերացնելի եզակիության մասին թեորեմը

Այս պարագրաֆում կապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 4.9.1 (Վերացնելի եզակիության մասին) *Դիցուք* Q*-ն* R_n *տարածության տիրույթ է,* $x^0 \in Q$ *որևէ կետ է, իսկ* $u(x)$ *ֆունկցիան հարմոնիկ է* $Q \setminus \{x^0\}$*-ում: Եթե*

$$u(x) = o\left(U(x - x^0)\right), \quad \textit{երբ} \quad x \to x^0, \tag{4.36}$$

որտեղ U*-ն Լապլասի հավասարման ֆունդամենտալ լուծումն է, ապա* $u(x)$ *ֆունկցիան* x^0 *կետում կարելի է որոշել այնպես, որ ստացված ֆունկցիան լինի հարմոնիկ ամբողջ* Q *տիրույթում:*

$n = 3$ *դեպքում* (4.36) *պայմանն ունի հետևյալ տեսքը,*

$$u(x) = o\left(\frac{1}{|x - x^0|}\right), \quad \textit{երբ} \quad x \to x^0, \tag{4.37}$$

իսկ $n = 2$ *դեպքում*

$$u(x) = o\left(\ln|x - x^0|\right), \quad \textit{երբ} \quad x \to x^0 :$$

Ապացույց: Ապացույցը կատարենք $n = 3$ դեպքի համար: Վերցնենք այնպիսի $R > 0$, որ x^0 կենտրոնով և R շառավղով փակ գունդը ընկած լինի Q տիրույթում. $B_R(x^0) = \{|x - x^0| < R\} \Subset Q$, և դիտարկենք $u(x)$ ֆունկցիան $B_R(x^0) \setminus \{x^0\}$-ում: $v(x)$-ով նշանակենք $B_R(x^0)$ գնդում

$$\triangle v = 0, \quad x \in B_R(x^0),$$

$$v\big|_{\partial B_R(x^0)} = u\big|_{\partial B_R(x^0)}, \tag{4.38}$$

Դիրիխլեի խնդրի լուծումը: $v(x)$ ֆունկցիան գոյություն ունի և պատկանում է $C(\overline{B}_R(x^0))$-ին:

Թեորեմն ապացուցելու համար բավարար է ցույց տալ, որ $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները համընկնում են իրենց որոշման տիրույթների ընդհանուր մասում՝ $\overline{B}_R(x^0) \setminus \{x^0\}$-ում, այսինքն՝ կամայական $x^1 \in B_R(x^0) \setminus \{x^0\}$ կետի համար

$$u(x^1) = v(x^1) : \tag{4.39}$$

Եվ այսպես, դիցուք $x^1 \in B_R(x^0) \setminus \{x^0\}$ կամայական կետ է: Վերցնենք ցանկացած $\varepsilon > 0$ թիվ և $\{\rho < |x-x^0| < R\}$ փիրույթում, որտեղ $0 < \rho < |x^1-x^0|$, դիտարկենք հետևյալ

$$w_\pm(x) = \pm\left(u(x) - v(x)\right) + \varepsilon\frac{|x^1 - x^0|}{|x - x^0|}$$

երկու ֆունկցիաները, որտեղ w_+-ը համապատասխանում է հավասարության աջ մասում $+$ նշանին, w_--ը համապատասխանում է $-$ նշանին: Անկիայտ է, որ $w_+(x)$, $w_-(x)$ ֆունկցիաները հարմոնիկ են $\{\rho < |x-x^0| < R\}$ փիրույթում և $w_\pm \in C(\rho \le |x-x^0| \le R)$:

$\{\rho < |x-x^0| < R\}$ փիրույթի $\{|x-x^0| = R\}$ արտաքին եզրի վրա, ըստ (4.38)-ի,

$$w_\pm(x)\big|_{|x-x^0|=R} = \varepsilon\frac{|x^1-x^0|}{|x-x^0|} > 0 :$$

$\{\rho < |x-x^0| < R\}$ փիրույթի $\{|x-x^0| = \rho\}$ ներքին եզրի վրա, ըստ (4.37)-ի,

$$w_\pm(x)\big|_{|x-x^0|=\rho} = \pm\left(u(x)-v(x)\right)\big|_{|x-x^0|=\rho} + \varepsilon\frac{|x^1-x^0|}{\rho} =$$
$$= \varepsilon\frac{|x^1-x^0|}{\rho} + o\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \text{երբ} \quad \rho \to 0$$

$\Big($քանի որ $v \in C(\overline{B}_R(x^0))$, ապա $v(x) = o\left(\frac{1}{|x-x^0|}\right)$, երբ $x \to x^0\Big)$: Ընտրենք ρ թիվը ($\rho < |x^1 - x^0|$) այնքան փոքր, որ

$$w_\pm(x)\big|_{\partial\{\rho<|x-x^0|<R\}} > 0 :$$

Այդ դեպքում, համաձայն մեծագույն արժեքի սկզբունքի՝

$$w_\pm(x) > 0, \quad \rho \le |x-x^0| \le R,$$

մասնավորապես,

$$w_\pm(x^1) > 0,$$

որտեղից հետևում է, որ

$$|u(x^1) - v(x^1)| < \varepsilon :$$

Քանի որ $\varepsilon > 0$ կամայական է, ապա տեղի ունի (4.39) հավասարությունը: Թեորեմն ապացուցված է:

§ 10. Լիուվիլի թեորեմը

Կասենք, որ ամբողջ պարածության մեջ որոշված $u(x)$ ֆունկցիան *սահմանափակ է վերևից (ներքևից)*, եթե գոյություն ունի այնպիսի M հաստատուն, որ

$$u(x) \leq M \quad (u(x) \geq M)\,, \quad x \in R_n :$$

Թեորեմ 4.10.1 (Լիուվիլի թեորեմը) *Ամբողջ R_n պարածության մեջ որոշված վերևից կամ ներքևից սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիան հաստատուն է:*

Ապացույց: Դիցուք $u(x)$ հարմոնիկ ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից (ներքևից): Այդ դեպքում $M - u(x)$ ֆունկցիան ($u(x) - M$ ֆունկցիան) հարմոնիկ է և ոչբացասական: Ուստի, Լիուվիլի թեորեմը բավարար է ապացուցել միայն մասնավոր դեպքի համար, երբ $u(x) \geq 0$: Ցույց տանք, որ R_n-ում ոչբացասական հարմոնիկ ֆունկցիան հաստատուն է:

Դիցուք R_n-ում հարմոնիկ $u(x)$ ֆունկցիան ոչբացասական է՝ $u(x) \geq 0$: Վերցնենք կամայական $x^0 \in R_n$, $|x^0| \neq 0$, կետ և ցույց տանք, որ

$$u(x^0) = u(0) : \tag{4.40}$$

Դիցուք $R > |x^0|$: Ըստ Թեորեմ 4.7.1-ի ունենք

$$u(x) = \int\limits_{|y|=R} P(x,y)u(y)\,dS_y, \quad |x| < R,$$

մասնավորապես,

$$u(x^0) = \int\limits_{|y|=R} P(x^0,y)u(y)\,dS_y :$$

Պարզության համար ենթադրենք $n = 3$:

Քանի որ $\{|y| = R\}$ սֆերայի y կետերի համար

$$R - |x^0| \leq |x^0 - y| \leq R + |x^0|,$$

ապա
$$\frac{R^2-|x^0|^2}{4\pi R(R+|x^0|)^3} \le P(x^0,y) \le \frac{R^2-|x^0|^2}{4\pi R(R-|x^0|)^3} :$$
Ստացված անհավասարությունները բազմապատկելով $u(y)$-ով ($u(y) \ge 0$) և ինտեգրելով $\{|y|=R\}$ սֆերայով՝ կստանանք
$$\frac{R^2-|x^0|^2}{4\pi R(R+|x^0|)^3}\int\limits_{|y|=R} u(y)\,dS_y \le u(x^0) \le \frac{R^2-|x^0|^2}{4\pi R(R-|x^0|)^3}\int\limits_{|y|=R} u(y)\,dS_y,$$
որտեղից
$$\frac{R(R^2-|x^0|^2)}{(R+|x^0|)^3}u(0) \le u(x^0) \le \frac{R(R^2-|x^0|^2)}{(R-|x^0|)^3}u(0) :$$
Ստացված անհավասարությունները տեղի ունեն ցանկացած $R > |x^0|$ համար: Անցնելով սահմանի, երբ $R\to\infty$, կստանանք (4.40) հավասարությունը: Թեորեմն ապացուցված է:

§ 11. Նեյմանի խնդիրը Լապլասի հավասարման համար գնդում

Այս պարագրաֆում կդիտարկենք Լապլասի հավասարման համար ևս մեկ եզրային խնդիր՝ Նեյմանի խնդիրը (կամ երկրորդ եզրային խնդիրը): Մենք այն կուսումնասիրենք միայն այն դեպքում, երբ տիրույթը գունդ է: Այդ խնդիրը հետևյալն է.
$$\triangle u = 0, \quad |x|<R, \tag{4.41}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{|x|=R} = f, \tag{4.42}$$
որտեղ ν-ն $\{|x|=R\}$ սֆերային տարված $\{|x|<R\}$ գնդի նկատմամբ արտաքին միավոր նորմալն է: Քանի որ կամայական $0<\rho\le R$ համար $\{|x|=\rho\}$ սֆերայի վրա $\nu = \dfrac{x}{\rho}$, ապա
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{|x|=\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\nabla u, x\right)\Big|_{|x|=\rho} = u_r\Big|_{|x|=\rho},$$
մասնավորապես,
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{|x|=R} = \frac{1}{R}\left(\nabla u, x\right)\Big|_{|x|=R} = u_r\Big|_{|x|=R} : \tag{4.43}$$

Կասենք, որ $u(x)$ ֆունկցիան (4.41), (4.42) Նեյմանի խնդրի լուծում է, եթե

$$u \in C^2(|x| < R) \cap C(|x| \leq R) \cap \{(\nabla u, x) \in C(|x| \leq R)\}, \tag{4.44}$$

բավարարում է (4.41) հավասարմանը և (4.42) եզրային պայմանին:

Ակնհայտ է, որ լուծման գոյության համար *անհրաժեշտ* է, որ

$$f \in C(|x| = R) : \tag{4.45}$$

Բացի այդ, ըստ Թեորեմ 4.1.1-ի, ցանկացած $\rho < R$ համար տեղի ունի

$$\int\limits_{|x|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS = \int\limits_{|x|=\rho} \frac{1}{\rho}\,(\nabla u, x)\ dS = 0$$

հավասարությունը: Քանի որ $(\nabla u, x)$-ը անընդհատ է $\{|x| \leq R\}$ գնդում և տեղի ունի (4.42) եզրային պայմանը, ապա վերջին հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ $\rho \to R$, կստանանք լուծման գոյության համար ևս մեկ անհրաժեշտ պայման՝

$$\int\limits_{|x|=R} f\ dS = 0 : \tag{4.46}$$

Հետագայում ցույց կտանք, որ (4.45) և (4.46) պայմանները Նեյմանի խնդրի լուծման գոյության համար ոչ միայն անհրաժեշտ են, այլ նաև բավարար են:

Նախ անդրադառնանք Նեյմանի խնդրի լուծման միակության հարցին: Ակնհայտ է, որ Նեյմանի խնդրի լուծումը միակը չէ, քանի որ եթե $u(x)$-ը լուծում է, ապա $u(x) + C$ ֆունկցիան ևս նույն խնդրի լուծում է, որտեղ C-ն ցանկացած հաստատուն է: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 4.11.1 (Լուծման ընդհանուր տեսքի մասին) *Եթե $u_1(x)$ և $u_2(x)$ ֆունկցիաները միևնույն Նեյմանի խնդրի լուծումներ են, ապա գոյություն ունի այնպիսի C հաստատուն, որ*

$$u_1(x) = u_2(x) + C, \quad |x| < R,$$

այլ խոսքով, Նեյմանի խնդրի լուծումը միակն է հաստատուն գումարելիի ճշտությամբ:

Ապացույց: Եթե $u_1(x)$ և $u_2(x)$ ֆունկցիաները միևնույն Նեյմանի խնդրի լուծումներ են, ապա $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ ֆունկցիան

$$\triangle u = 0, \quad |x| < R,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{|x|=R} = 0, \tag{4.47}$$

համասեռ պայմաններով Նեյմանի խնդրի լուծում է: Ցույց տանք, որ

$$u(x) \equiv C, \quad |x| < R : \tag{4.48}$$

Քանի որ ցանկացած $\rho < R$ դեպքում $u \in C^2(|x| \le \rho)$, ապա ըստ Գրինի առաջին բանաձևի

$$\int\limits_{|x|\le\rho} u\triangle u\, dx = \int\limits_{|x|=\rho} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS - \int\limits_{|x|\le\rho} \nabla u \nabla u\, dx,$$

որտեղից ստանում ենք

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_{|x|=\rho} u(x)(\nabla u, x)\, dS = \int\limits_{|x|\le\rho} |\nabla u|^2\, dx, \quad \rho < R :$$

Քանի որ $u(x)$ և $(\nabla u, x)$ ֆունկցիաները պատկանում են $C(|x| \le R)$ բազմությանը, ապա ըստ (4.47) պայմանի

$$\lim_{\rho\to R}\frac{1}{\rho}\int\limits_{|x|=\rho} u(x)(\nabla u, x)\, dS = \frac{1}{R}\int\limits_{|x|=R} u(x)(\nabla u, x)\, dS = 0,$$

որտեղից հետևում է

$$\lim_{\rho\to R}\int\limits_{|x|\le\rho} |\nabla u|^2\, dx = 0 : \tag{4.49}$$

(4.49) հավասարությունը կարող է տեղի ունենալ միայն այն դեպքում, երբ

$$\int\limits_{|x|\le\rho} |\nabla u|^2\, dx = 0 \quad \text{ցանկացած } \rho < R \text{ համար} : \tag{4.50}$$

(4.50)-ից հետևում է, որ $|\nabla u(x)| \equiv 0$, $|x| < R$, և տեղի ունի (4.48)-ը: Թեորեմն ապացուցված է:

Այժմ անդրադառնանք (4.41), (4.42) Նեյմանի խնդրի լուծման գոյությանը: Նշանակենք $v(x)$-ով

$$\triangle v = 0, \quad |x| < R, \tag{4.51}$$

$$v\Big|_{|x|=R} = f, \tag{4.52}$$

Դիրիխլեի խնդրի լուծումը: Տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 4.11.2 (Գոյության մասին) *Դիցուք տեղի ունեն* (4.45) *և* (4.46) *պայմանները: Այդ դեպքում* (4.41), (4.42) *Նեյմանի խնդրի լուծումը գոյություն ունի և տրվում է*

$$u(x) = R\int_0^1 \frac{v(x\cdot t)}{t}\,dt + const, \quad |x| < R, \tag{4.53}$$

բանաձևով, որտեղ $v(x)$ *ֆունկցիան* (4.51), (4.52) *Դիրիխլեի խնդրի լուծումն է:*

Ապացույց: (4.45) պայմանից հետևում է, որ (4.51), (4.52) Դիրիխլեի խնդրի $v(x)$ լուծումը գոյություն ունի: (4.46) պայմանից հետևում է, որ

$$v(0) = 0 :$$

Իրոք (ենթադրենք $n = 3$), ըստ մակերևութային միջինի մասին թեորեմի, ցանկացած $\rho < R$ դեպքում

$$v(0) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\int\limits_{|x|=\rho} v(x)\,dS = \lim_{\rho\to R}\frac{1}{4\pi\rho^2}\int\limits_{|x|=\rho} v(x)\,dS = \frac{1}{4\pi R^2}\int\limits_{|x|=R} f\,dS = 0 :$$

$v(x)$ ֆունկցիան պատկանում է $C^2(|x| < R)$-ին և ըստ Թեյլորի բանաձևի

$$v(x) = v(0) + (\nabla v(0), x) + o\left(|x|^2\right) = \sum_{i=1}^n C_i x_i + o\left(|x|^2\right),$$

որտեղ $C_i = \dfrac{\partial v(x)}{\partial x_i}\Big|_{x=0}$, $i = 1, ..., n$:

Հետևաբար

$$\frac{v(x\cdot t)}{t} = \sum_{i=1}^n C_i x_i + o\left(|x|^2 t\right)$$

և $t = 0$ դեպքում (4.53) ենթաինտեգրալային արտահայտությունը եզակիություն չունի: Նկատենք, որ եթե $\{|x| \leq \rho\}$ գնդի x կետերի համար դիտարկենք $y = xt$, $0 \leq t \leq 1$, կետերը, ապա y կետերը կփոխվեն նույն $\{|y| \leq \rho\}$ գնդում. $|y| = |x \cdot t| = |x|t \leq \rho t \leq \rho$: Որպես (4.51), (4.52) Դիրիխլեի խնդրի լուծում՝ $v(x)$ ֆունկցիան պատկանում է $C(|x| \leq R)$-ին, հետևաբար (4.53) բանաձևով տրված $u(x)$ ֆունկցիան ևս պատկանում է $C(|x| \leq R)$-ին: Բացի այդ, ցանկացած $\rho < R$ համար $v \in C^2(|x| \leq \rho)$ և

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v(xt)}{t}\right) = \frac{1}{t}\frac{\partial v(y)}{\partial y_i}\Big|_{y=xt} \cdot t = \frac{\partial v(y)}{\partial y_i}\Big|_{y=xt},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{v(xt)}{t}\right) = \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_i \partial y_j}\Big|_{y=xt} \cdot t, \quad i, j = 1, ..., n,$$

հետևաբար, (4.53) բանաձևով տրված $u(x)$ ֆունկցիան ևս պատկանում է $C^2(|x| \leq \rho)$ և

$$\triangle u(x) = R\int_0^1 \triangle_y v(y)\Big|_{y=xt} \cdot t\, dt \equiv 0, \quad |x| \leq \rho :$$

Այսպիսով, $u(x)$ ֆունկցիան պատկանում է $C^2(|x| < R) \cap C(|x| \leq R)$ բազմությանը և հարմոնիկ է $\{|x| < R\}$ գնդում:

Այժմ ցույց տանք, որ $(\nabla u, x)$ ֆունկցիան պատկանում է $C(|x| \leq R)$-ին և տեղի ունի (4.42) եզրային պայմանը: (4.53) բանաձևը գրենք սֆերիկ կոորդինատական համակարգում: Եթե $x = (x_1, x_2, x_3) = (r, \varphi, \theta)$, ապա $y = xt$ կետի սֆերիկ կոորդինատը կլինի (rt, φ, θ): Ուստի, սֆերիկ կոորդինատական համակարգում (4.53) բանաձևը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$u(r, \varphi, \theta) = R\int_0^1 \frac{v(rt, \varphi, \theta)}{t}\, dt + const = R\int_0^r \frac{v(\rho, \varphi, \theta)}{\rho}\, d\rho + const : \qquad (4.54)$$

Քանի որ $v \in C(|x| \leq R)$, ապա, համաձայն (4.54) բանաձևի, $ru_r(\rho, \varphi, \theta)$ ֆունկցիան պատկանում է $C(|x| \leq R)$-ին, $ru_r(\rho, \varphi, \theta) \in C(|x| \leq R)$: Հետևաբար, $(\nabla u, x) \in C(|x| \leq R)$ $(ru_r(\rho, \varphi, \theta) = (\nabla u, x))$ և տեղի ունի (4.42) եզրային պայմանը.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{|x|=R} = u_r\Big|_{|x|=R} = \frac{Rv}{\rho}\Big|_{\rho=R} = v\Big|_{|x|=R} = f \ :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Գրականություն

1. **В.П.Михайлов**, *Лекции по уравнениям математической физики*, Учеб. пособие для вузов, М.: Издательство физико-математической литературы, 2001
2. **В.П.Михайлов**, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, М.: Наука, 1983
3. **А.Н.Тихонов, А.А.Самарский**, *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 1977
4. **И.Г.Петровский**, *Лекции об уравнениях с частными производными*, М.: Наука, 1970
5. **В.С.Владимиров**, *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 1988
6. **В.П.Михайлов, А.К.Гущин**, *Дополнительные главы курса "Уравнения математической физики"*, Лекционные курсы НОЦ, Вып. 7, М.: МИАН, 2007
7. **Л.Д.Кудрявцев**, *Основы математического анализа*, Т. 1-3, М.: Высшая школа, 1988
8. **Г.М.Фихтенгольц**, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Т. 1-3, М.: Наука, 1970
9. **А.М.Мальцев**, *Основы линейной алгебры*, М.: Наука, 1975
10. **Л.С.Понтрягин**, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, М.: Наука, 1982
11. **Բ.Գ. Արարքցյան, Ա.Հ. Հովհաննիսյան, Ռ.Լ.Շահբաղյան**, *Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ*, ԵՊՀ, 1988