

**ՄԵԼՍ ՍԱՀԱԿՅԱՆ**

Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների  
թեկնածու, ԵՊՀ տնտեսագիտության մեջ մաթեմատիկական  
մոդելավորման ամբիոնի պրոֆեսոր  
էլ.փոստ՝ [mels.sahakyan@gmail.com](mailto:mels.sahakyan@gmail.com)

**ԳԱՅԱՆԵ ԹՈՒՄԱՆՅԱՆ**

հայցորդ, ԵՊՀ  
էլ.փոստ՝ [tum.gayane@gmail.com](mailto:tum.gayane@gmail.com)

**ԳՈՎԱԶԴԱՅԻՆ ՏԵՍԱՀՈՒՆՎԱԿՆԵՐԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ ԸՍՏ ԴԵՌՈՒՄՏԱԱԼԻՔՆԵՐԻ**

Հոդվածում ներկայացված է հեռուստաալիքների միջև գովազդային տեսա-  
հոլովակների բաշխման խնդրի երկու մոդելներ և դրանց գործնական օրինակ-  
ների լուծումները:

**Հեռուստաալիքների ընտրության խնդրի դրվածքը**

Ընկերությունը ցանկանում է  $m$  տարբեր հեռուստաալիքների ( $h/w_i \leftrightarrow i$ ,  $i=1,2,\dots,m$ ) միջոցով գովազդել իր արտադրանքը և գովազդման հատկացված  $C$  բյուջեի սահմաններում ստանալ առավելագույն համախառն վարկանիշի աս-  
տիճան, միաժամանակ ապահովելով:

որոշակի հավելյալ եկամուտ, գովազդման համար նախատեսված տեսա-  
հոլովակների որոշակի քանակ:

Ընկերությունը ցանկանում է  $m$  տարբեր հեռուստաալիքների ( $h/w_i \leftrightarrow i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ) միջոցով գովազդել իր արտադրանքը և գովազդման հատկացված  $C$  բյուջեի սահմաններում ստանալ առավելագույն համախառն վարկանիշի աստի-  
ճան, միաժամանակ ապահովելով՝ որոշակի հավելյալ եկամուտ և գովազդման համար նախատեսված տեսա-  
հոլովակների որոշակի քանակ:

**Եզրերի սահմանումները, որոնք օգտագործվում են հոդվածում<sup>1,2</sup>**

Գովազդային ընդմիջում - *այն եթերաժամը, որի ընթացքում կատարվում է գովազդ:*

Սփոթ /Spot/ - *գովազդային ընդմիջման ընթացքում գովազդային տե-  
սահոլովակի մեկ ցուցադրում:*

Սփոթը կարող է լինել տարբեր տևողություն ունեցող (վայրկյան) գովազ-  
դային տեսահոլովակ:

<sup>1</sup> Sissors J., Roger B. Advertising Media Planning, 2010:

<sup>2</sup> Տես՝ Nielsen Media Research - <http://nielsenmedia.com>

Հեռուստաալիքի լսարան – տվյալ հեռուստաալիքը դիտող մարդկանց քանակը:

Պոտենցիալ լսարան – այն մարդկանց քանակն է, ովքեր ունեն հեռուստացույց:

Նպատակային լսարան - այն հեռուստադիտողների բազմությունը, որոնք ունեն համանման պարամետրեր. տարիք, սեռ, սոցիալական կարգավիճակ, սովորություններ, կրթություն և այլն:

Հեռուստաալիքի վարկանիշ (Rating-R) – որոշակի սևեռած եթերաժամի կամ ծրագրի ցուցադրման ընթացքում դիտողների գումարի հարաբերությունը պոտենցիալ լսարանին:

Հեռուստավարկանիշ /TV Rating - TVR/ - Տվյալ ժամանակահատվածի համար դիտարկվող հեռուստաալիքների վարկանիշների գումարը:

Լսարանի մասնաբաժնի վարկանիշ (Share of Audience Rating - Shr) - որոշակի սևեռած եթերաժամերի կամ ծրագրի լսարանի հարաբերությունն է դիտարկվող հեռուստաալիքների վարկանիշների գումարին. Լսարանի մասնաբաժնի վարկանիշը հավասար է հեռուստաալիքի վարկանիշը հարաբերած հեռուստավարկանիշին՝  $Shr = R / TVR$  :

Համախառն վարկանիշ /GRPs (Gross rating points)/ - տվյալ գովազդարշավի ընթացքում հեռուստաալիքներով ցուցադրված գովազդի /հոլովակների/ վարկանիշների գումարն է:

$$GRPs = \sum_{i=1}^m q_i n_i,$$

որտեղ  $q_i$  և  $n_i$  համապատասխանաբար  $i$  -րդ հեռուստաալիքի վարկանիշն է և ցուցադրվող հոլովակների (սպոտերի) քանակը:

Նշենք, որ GRPs-ը կիրառվում է միայն գովազդի վարկանիշը հաշվելու համար:

### Հեռուստաալիքների / $i=1,2,\dots,m$ / էկզոգեն տվյալները

Նշանակենք՝

$q_i$  - եթերի տվյալ ժամանակահատվածի հեռուստաալիքի վարկանիշը

$d_i$  - գովազդի մեկ րոպեի արժեքը (դրամ/)

$r_i$  - գովազդման մեկ րոպեից ակնկալվող եկամուտը (դրամ)

$C$  - գովազդի ընդհանուր բյուջեն (դրամ)

$N$  - գովազդման տեսահոլովակների (սպոտերի) ընդհանուր քանակը

$R$  - ակնկալվող եկամուտ (դրամ)

$t$  – մեկ սպոտի տևողությունը արտահայտված վայրկյաններով:

Խնդրի փոփոխականներն են. յուրաքանչյուր  $h/a$ -ին տրամադրված սպոտերի քանակը՝  $n_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ): Պահանջվում է գտնել սպոտերի՝  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$  այնպիսի բաշխման համակցություն ըստ  $h/a$ -ի, որի դեպքում համախառն վարկանիշը՝ GRPs կլինի առավելագույնը պայմանով, ընդ որում ամբողջ ոչ բացասական  $n_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) թվերը պետք է բավարարեն որոշակի սահմանափակումների:

**Տեսահոլովակների (սպոտերի) ընտրության ամբողջաթիվ գծային ծրագրման մոդել 1**

Նպատակային ֆունկցիա. ընտրված նպատակային լսարանի GRPs-ի մաքսիմացում՝

$$GRPs = \sum_{i=1}^m q_i n_i \rightarrow \max \quad (1)$$

Հետևյալ սահմանափակումների համակարգի առկայությամբ. սահմանափակում սպոտերի ընդհանուր քանակի վրա՝

$$\sum_{i=1}^m n_i = N \quad (2)$$

սահմանափակում գովազդման բյուջեի վրա՝

$$\sum_{i=1}^m d_i n_i * t/60 \leq C \quad (3)$$

սահմանափակում ակնկալվող եկամուտի վրա՝

$$\sum_{i=1}^m r_i n_i * t/60 \geq R \quad (4)$$

սահմանափակումներ փոփոխականների նշանի վրա՝

$$n_i \geq 0, \text{ ամբողջ թվեր են } (i=1,2,\dots,m): \quad (5)$$

Քանի որ գովազդի գները արտահայտված են 1րոպեի արժեքով, ապա (3)-րդ և (4)-րդ սահմանափակումներում սպոտերի քանակը վերածված է ռոպեի՝  $n_i * t / (1 \text{ ռոպե})$  արտահայտված վայրկյանով  $= n_i * \frac{t}{60}$ :  $t$  - ն բաժանում ենք 60-ի, բազմապատկում համապատասխան սպոտերի քանակով և ստանում ընդհանուր գովազդման տևողությունը ռոպեով:

Լուծելով (1) - (5) խնդիրը կստանանք սպոտերի այնպիսի  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$  բաշխում, որի դեպքում GRPs-ը առավելագույնն է:

**Դիտողություն.** Հիշեցնենք, որ ցանկացած գծային ծրագրման խնդրի պարամետրերի արժեքները պետք է լինեն հավաստի (արժանահավաստ): Այդ պարտադիր պայմանը տեղի չունի վերը ներկայացված սպոտերի ընտրության ամբողջաթիվ գծային ծրագրման խնդրի պարամետրերի նկատմամբ, որովհետև դրանք հիմնականում որոշված են վիճակագրական տվյալների հիման վրա, այսինքն դետերմինացված ստույգ արժեքներ չեն և պարունակում են անորոշություն: Հետևաբար խնդրի թույլատրելի լուծումների բազմությունն ունի հավանականային բնույթ:

Անորոշության (հավանականային) պայմաններում օպտիմացման խնդիրներ լուծելու համար կիրառում են ստորև բերված էնթրոպիայի մաքսիմումի սկզբունքը:

**Տեսահոլովակների (սպոտերի) ընտրության ամբողջաթիվ ոչ գծային ծրագրման մոդել 2**

**Էնթրոպիայի մաքսիմումի սկզբունք<sup>1</sup>**

Դիցուք՝  $N$  թվով սպոտերի բազմությունը բաժանվում է՝  $m \geq 2$  ենթաբազմությունների՝ առաջինում  $n_1$  սպոտ, երկրորդում  $n_2$  սպոտ, ...,  $m$ -րդում՝  $n_m$  սպոտ ( $n_1 +$

<sup>1</sup> Enrico Scalas and Ubaldo Garibaldi. A Dynamic Probabilistic Version of the Aoki–Yoshikawa Sectoral Productivity Model // Economics, E-journal, Vol. 3, 2009.

$n_2 + \dots + n_m = N$ ):  $N$  տարրերից  $n_1, n_2, \dots, n_m$  տարրերով (սպոտերով) զուգորդությունների  $W(\{n_i\})$  թիվը հավասար է՝

$$W(\{n_i\}) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

Ընդունենք, որ ցանկացած սպոտ հավասար հնարավորություն ունի ընտրվելու որևէ ենթաբազմության մեջ (( $h/w$ -ի եթեր): Մեր խնդիրն է պարզել, թե ինչպես կբաշխվեն սպոտերը  $h/w$ -ի միջև, երբ դրանց ընտրությունը որևէ  $h/w$  հավասարահավանական է: Դրա պատասխանը 1877թ. տվել է Լյուդվիգ Բոլցմանը<sup>1</sup>: Նա առաջարկել է օգտագործել “most probable occupation vector” գաղափարը, որը համարժեք է ամենահավանական ( $n_1, n_2, \dots, n_m$ ) համակցություն գտնելու խնդրին: Այսինքն հետևյալ խնդրին՝ գտնել  $W(\{n_i\}) \rightarrow \max$ , պայմանով, որ  $n_i \geq 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) փոփոխականները բավարարեն հետևյալ սահմանափակումներին.

$$\sum_{i=1}^m n_i = N,$$

$$\sum_{i=1}^m q_i n_i \geq \text{GRPs}$$

$$\sum_{i=1}^m d_i n_i * t/60 \leq C$$

$$\sum_{i=1}^m r_i n_i * \frac{t}{60} \geq R,$$

որտեղ GRPs ստացված է գծային ծրագրման մոդելի լուծումից:

Համաձայն Ստիրլինգի բանաձևի՝  $\ln n_i! \approx n_i \ln n_i - n_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ): Հարմարության համար մաքսիմալացնենք  $\ln W(\{n_i\})$ ՝ ֆունկցիան: Կիրառելով Ստիրլինգի բանաձևը  $n_i!$ -ի  $n_i \geq 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) թվերի նկատմամբ ստանում ենք՝

$$\ln W(\{n_i\}) \approx \ln N! - \sum_{i=1}^m (n_i \ln n_i - n_i):$$

Նշանակենք  $p_i = \frac{n_i}{N}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ): Պարզ է, որ

$$\ln W(\{n_i\}) \approx \ln N! - \sum_{i=1}^m (n_i \ln n_i - n_i) = \ln N! - \sum_{i=1}^m N(p_i [(\ln p_i + \ln N) - N p_i]),$$

որտեղից հետևում է, որ  $\ln W(\{n_i\})$  մաքսիմացման խնդիրը հանգեց էնթրոպիայի՝  $S(p)$  ֆունկցիայի մաքսիմացմանը՝

$$\ln W \rightarrow \max \approx - \sum_{i=1}^m n_i \ln n_i \rightarrow \max \approx S(p) = - \sum_{i=1}^m p_i \ln p_i \rightarrow \max:$$

Մենք հանգեցինք էնթրոպիայի մաքսիմումի սկզբունքին [Jaynes<sup>2</sup> 1957]:

Տեղին է նշել, որ գիտական գրականությունում, կախված քննարկվող խնդրի բնույթից, էնթրոպիայի

$S(p)$  անորոշության ֆունկցիան կրում է նաև հետևյալ անվանումները՝ բազմազանության, կառուցվածքային, օգտակարության, կոմպրոմիսային<sup>3,1,2</sup>:

<sup>1</sup> J.N.Kapur, H.K.Kesavan. Entropy, Optimization, Principles with Application / Academic Press, 1992.

<sup>2</sup> Jaynes E. T. Information Theory and Statistical Mechanics. II // Physical Review, vol. 108, no. 2, pp. 171-190; October 15, 1957. - <http://bayes.wustl.edu/ej/articles/theory.1.pdf>

<sup>3</sup> Саакян М. А., Прогнозирование наиболее вероятного распределения национального экономического потенциала // Труды конференции “Айк” // Ереван, 1995 (октябрь).

Ամբողջաթիվ ոչ գծային ծրագրման մոդել (էնթրոպիայի մաքսիմումի սկզբունքի կիրառում):

Գտնել սպոտերի ամենահավանական բաշխումը ըստ հ/ա-ի՝

$$H(n) = -\sum_{i=1}^m n_i \ln n_i \rightarrow \max \quad (1.1)$$

Հետևյալ պայմանների առկայությամբ.

Ապահովել (1)- (5) խնդրի նպատակային ֆունկցիայի՝ GRPs լավագույն արժեքը՝

$$\sum_{i=1}^m q_i n_i \geq \text{GRPs} \quad (1.2)$$

Ապահովել գովազդման սպոտերի ընդհանուր քանակը՝

$$\sum_{i=1}^m n_i = N \quad (1.3)$$

Բավարարել գովազդման բյուջեի սահմանափակմանը՝

$$\sum_{i=1}^m d_i n_i * t/60 \leq C \quad (1.4)$$

Ապահովել որոշակի եկամուտ՝

$$\sum_{i=1}^m r_i n_i * t/60 \geq R \quad (1.5)$$

Փոփոխականների ամբողջաթիվ և ոչ բացասական լինելը՝

$$n_i \geq 0, (i=1,2,\dots,m): \quad (1.6)$$

Լուծելով (1.1)-(1.6) խնդիրը գտնում ենք  $n_i \geq 0, (i=1,2,\dots,m)$  թվերի ամենահավանական համակցությունը, այսինքն ընկերության հ/ա-ի միջև սպոտերի ամենահավանական բաշխումը, որն ապահովում է նաև GRPs առավելագույն աստիճանը:

### Գործնական օրինակների լուծումներ. սկզբնական տվյալներ<sup>3</sup>

Ընկերությունը արտադրանքը գովազդելու համար դիմել է երկու հեռուստա-ալիքների: Խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ տվյալները բերված են աղյուսակ 1-ում:

<sup>1</sup> Саакян М. А., Киракосян Ш. В., Энтропийный подход исследования экономических систем // Проблемы развития и размещения производительных сил в союзной республике: Сборник научных трудов НИИЭП при Госплане Арм.ССР / Ереван, 1983.

<sup>2</sup> Опойцев В. И., Нелинейная системостатика / М., Наука, 1986.

<sup>3</sup> Ընկերության անվանումը մրցակցային գաղտնիությունից ելնելով չի նշվում:

**Աղյուսակ 1**

Գովազդի մոդել 1-ի գործակիցների բովանդակությունը	h/w i = 1 Գործ. արժեքը	h/w i = 2 Գործ. արժեքը
18:00 - 24:00 եթերաժամի հեռուստաալիքի վարկանիշը	q <sub>1</sub> =7.4	q <sub>2</sub> = 0.5
Գովազդման 1 ռոպ. արժեքը՝ d (դրամ)	d <sub>1</sub> =120000	d <sub>2</sub> =24000
1 ռոպ. ակնկալվող եկամուտը՝ r (դրամ)	r <sub>1</sub> =200000	r <sub>2</sub> = 60000
Գովազդման բյուջեն՝ C (դրամ)	5100000	
Գովազդման սպոտերի ընդհանուր քանակ՝ N, (րոպե)	110	
Ակնկալվող եկամուտը՝ R, (ՀՀ դրամ)	9500000	
Գովազդվող սպոտիտևողությունը (վայրկյան)	t = 60	

**Ամբողջաթիվ գծային ծրագրման՝ մոդել 1-ի գործնական լուծման օրինակ<sup>1</sup>**

Լուծելով ամբողջաթիվ գծային ծրագրման խնդիրը (աղյուսակ 1-ում բերված տվյալներով)

ստանում ենք՝ n<sub>1</sub>= 25, n<sub>2</sub>= 85; GRPs = 227.5:

Չեռևաբար առաջին հ/կ-ին պետք է գովազդին տրամադրի 25 անգամ 60 վ. տևողությամբ հոլովակ,

երկրորդ հ/կ-ն 85 անգամ մեկ ռոպե տևողությամբ հոլովակ և լսարանի առավելագույն ընկալման ցուցանիշն է՝ GRPs=227.5 միավոր:

Չողվածի ծավալի սահմանափակումը թույլ չի տալիս ներկայացնել մոդելավորման արդյունքների ամբողջ փաթեթը: Մենք կքննարկենք ընդամենը երեք դիտարկում:

Աղյուսակ 2-ում բերված են սպոտերի ընդհանուր թվի փոփոխության հաշվարկների արդյունքները (մնացած պայմանները չեն փոխվում): Հաշվարկները ցույց են տալիս, որ առաջին հ/ա-ի սպոտերի քանակը լավագույնն է նաև ընդհանուր սպոտերի քանակի բաշխման տեսանկյունից, օրինակ, եթե առաջին հ/ա-ով ցուցադրվեր 21-ից ոչ ավել սպոտ, ապա GRPs 27.6% նվազում է:

**Աղյուսակ 2**

# Spots	n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	GRPs	GRPs տարբերություն -%
104	24	80	217.6	
109	25	84	227	
<b>110</b>	<b>25</b>	<b>85</b>	<b>227.5</b>	
111	25	86	228	
112	25	87	228.5	
113	25	88	229	
110 /n <sub>1</sub> ≤ 21/	21	89	199.9	- 27.6
110 /n <sub>1</sub> ≤ 26/	25.4	84.6	230.26	2.76
110 /n <sub>1</sub> ≤ 30/...	25.4	84.6	230.26	2.76

<sup>1</sup> Սահակյան Մ., Թումանյան Գ. Ձեռնարկության գովազդի մաթեմատիկական մոդել // Հայաստան. Ֆինանսներ և էկոնոմիկա, 2010, 10.

21-ից ոչ ավել սպոտ, ապա GRPs 27.6% նվազում է: Երբ  $26 \leq n_1 \leq 30$ , ապա լուծումը փոխվում և GRPs աճում է ընդամենը 2.7%, սակայն այս դեպքում լուծումները ամբողջաթիվ չեն, իսկ ամբողջաթիվ լինելու դեպքում GRPs միայն նվազում է:

Եթե խնդրի 6-րդ սահմանափակման պահանջը հանենք սահմանափակումների համակարգից, ապա լուծումը չի փոխվում, հետևաբար այն ավելորդ է:

Պարզվում է, որ եթե գովազդման բյուջեն նվազեցվի 50000 դրամի չափով, ապա լավագույն լուծումը չի փոխվում:

### Ամբողջաթիվ ոչ գծային ծրագրման՝ մոդել 2-ի գործնական օրինակի լուծում

Լուծելով ամբողջաթիվ ոչ գծային ծրագրման խնդիրը (աղյուսակ 1-ում բերված տվյալներով) ստանում ենք նույն պատասխանը՝  $n_1 = 25$ ,  $n_2 = 85$ ; (1.2) պայմանը վերածվում է հավասարման և  $GRPs = 227.5$ :

Ստացվում է, որ ամբողջաթիվ գծային ծրագրման և ոչ գծային ծրագրման (էնթրոպիայի մաքսիմումի սկզբունքի կիրառությամբ) խնդիրների լուծումները համընկնում են: Հետևաբար մենք հանգում ենք հետաքրքիր եզրակացության՝ մոդել 1-ի լուծումը նաև օժտված է ամենահավանական լինելու հատկությամբ: Տեղին է նշել, որ նման արդյունք ստացել են մատրիցային խաղերի լուծումների նկատմամբ<sup>1</sup>:

### ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում մոդելավորվում է հեռուստաալիքների միջև գովազդային տեսառկումների բաշխումը ամբողջաթիվ գծային ծրագրավորման ու էնտրոպիայի մաքսիմալացման սկզբունքի հիման վրա, լուծելով գործնական խնդիրներ:

### АННОТАЦИЯ

#### СААКЯН М., ТУМАНЯН Г. - ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕКЛАМНЫХ ТЕЛЕРОЛИКОВ ПО ТЕЛЕКАНАЛАМИ

В статье моделируется распределение рекламных телероликов по каналам телевидения, на основе целочисленного линейного программирования и принципа максимума энтропии, с решением практических задач.

### SUMMARY

#### SAHAKYAN M., TUMANYAN G. - ALLOCATION OF TV COMMERCIALS BETWEEN CHANNELS

In the article commercials allocation problem between TV channels is modeled using integer linear programming and entropy maximization principle and solving practical problems.

<sup>1</sup> Chandan Bikash Dasg and Sankar Kumar Roy. An Approach to Solve Two-Person Matrix Game via Entropy // Advanced Modeling and Optimization, Volume 11, Number 4, 2009.