ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1992 Естественные науки

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

УДК 518.9

Օ.Ս.ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ՆԵՇԻ ԱՐԲԻՏՐԱԺԱՅԻՆ ՍԽԵՄԱՅԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԽՆԴՐՈՒՄ

Դիցուք ղեկավարման պրոցեսի դինամիկան նկարագրվում է հետևյալ վեկտորական դիֆերենցիալ հավասարումով.

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in R^n, \quad u \in U \subset compR^n,$$

u - ն արտաքին ազդեցությունների իմաստ արտահայտող ղեկավարող պարամետրն է, որի միջոցով իրականանում է ղեկավարման պրոցեսը: Այն ընտրվում է անընդհատ ըստ ժամանակի, և արդյունքում ստացված $u(t) \subset U, t \in [t_0,T]$, ֆունկցիան չափելի է ըստ t - ի: Ենթադրենք նաև, որ ցանկացած չափելի u(t) ղեկավարման համար

$$\dot{x} = f(x,u(t)) \tag{1}$$

համակարգի լուծման գոյության, միակության, շարունակելիության պայմանները ապահոված են $[t_0,T]$ ժամանակահատվածում և $x(t_0) = x_0$ սկզբնական պայմանի դեպքում: Ամեն մի ծրագրային $u(t), t \in [t_0,T]$, ղեկավարումը որոշում է որոշակի այլընտրական $x(t), t \in [t_0,T]$, շարժում, որպես $x(t_0) = x_0$ սկզբնական պայմանով ստացված (1) հավասարման լուծում:

$C^{T-t_0}(x_0)$ - ով նշանակենք (1) համակարգի հասանելիության բազմությունը: Դա հենց x_0 սկզբնական վիճակից սկիզբ առնող (1) համակարգի հետագծերի վերջնակետերի բազմությունն է $\{x(T)\}$ բոլոր հնարավոր $u(t), t \in [t_0,T]$, ծրագրային ղեկավարումների դեպքում:

Դիցուք X - ը (1) ղեկավարվող պրոցեսի հնարավոր ելքերի բազմությունն է: Այդ ելքերից յուրաքանչյուրը $x \in X$, գնահատվում է $H(x) = \{H_1(x), \ldots, H_m(x)\}$ վեկտորական հայտանիշով:

Ենթադրենք ելքի գերադասելիության աստիճանը աճում է H վեկտորի բաղադրիչների աճին զուգընթաց: $\{H\} \in R^n$ վեկտորների բազմության մեջ մտցնենք ոչ խիստ գերադասման առնչություն $\geq$, կասենք, որ $H' = \{H_i'\} \geq H'' = \{H_i''\}$, եթե $H_i' \geq H_i''$, $i = 1,2,\ldots,m$, բոլոր վեկտորների համար: Բոլոր հնարավոր $x \in X$ - երի համար նշանակենք $\kappa = \{H(x) : x \in X\}$ որպես գնահատականների բազմություն:

$H^* \in \kappa$ վեկտորական գնահատականը կոչվում է մեծագույն ըստ $\geq$ առնչության, κ - ի նկատմամբ, եթե գոյություն չունի այնպիսի գնահատական, որ $H \geq H^*$:

Մեծագույն ըստ $\geq$ գնահատականի կոչվում է օպտիմալ գնահատական ըստ Պարետոյի, իսկ համապատասխան x^* լուծումը օպտիմալ ըստ

Պարետոյի [1]; $\hat{\kappa}(\hat{\kappa} \subset \kappa)$ - ով նշանակենք վերոհիշյալ գնահատականի ըստ $\geq$ մեծագունության պայմանին բավարարող գնահատականների բազմությունը:
Բազմահայտանիշային օպտիմացման հիմնական խնդիրն է բոլոր լուծումների բազմությունից առանձնացնել օպտիմալ լուծումը: Բնական է, որ լավագույններից մեկը հարկ է համարել նաև այն դեպքը, երբ այդ լուծումը օպտիմալ է ըստ Պարետոյի:
Օպտիմալ լուծում ընտրելու մեթոդներից մեկը հանդիսանում են այսպես կոչված արբիտրաժային սխեմաները:
Բոլոր հնարավոր գնահատականների κ բազմությունը ենթադրվում է ուռուցիկ և կոմպակտ R^n ում: Քննարկենք տվյալ բազմահայտանիշային խնդրի լուծման համար լավացման ենթակա մի ելակետային $x^0 \in X$ լուծում, որը կանվանենք "կոնսերվատիվ" լուծում: Օգտավետության վեկտորի H արժեքը $H(x_0) = \{H_1(x_0), \ldots, H_m(x_0)\}$ $x^0 \in X$ կետում կանվանենք "ստատուս քվո" կետ: Արբիտրաժային սխեմա ասելով հասկանանք φ կանոն, որն ամեն մի $(\kappa, H(x^0))$ զույգի համապատասխանության մեջ է դնում որոշակի $(\bar{H}, \bar{\kappa}) = \varphi(\kappa, H(x^0))$ զույգի հետ, որտեղ $\bar{H} \in \bar{\kappa}, \bar{x} \in X$ և $\bar{H} = H(\bar{x})$ ($\bar{x}$ - ը մեկնաբանվում է որպես օպտիմալ լուծում): [2] աշխատանքում արբիտրաժային սխեմայի համար ձևակերպվում են աքսիոմներ, որոնց պետք է բավարարի φ կանոնը:
Տեղի ունի այսպիսի պնդում. գոյություն ունի բոլոր արբիտրաժային սխեմաների համար որոշված միակ φ կանոն, որն էլ որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$\varphi(\kappa, H(x^0)) = \left\{(\bar{H}, \bar{x}) \middle| \max_{\substack{H \geq H(x^0) \\ H \in \kappa}} g(H, \kappa, H(x^0)) = g(\bar{H}, \kappa, H(x^0)), \right. \tag{2}$$

որտեղ $g(H, \kappa, H(x^0)) = \prod_i^m (H_i - H_i(x_0))$: (1) հավասարումով նկարագրվող դինամիկ խնդիրների համար կարևոր է օպտիմալության ընտրված սկզբունքի դինամիկ կայունության հարցը [3]: x_0 սկզբնական պայմանից և պրոցեսի $T - t_0$ տևողությունից կախված $\Gamma(x_0, T - t_0)$ բազմահայտանիշային օպտիմացման դինամիկ խնդիրը նշանակենք $\Gamma(x_0, T - t)$, $(t_0 \leq t \leq T)$ - ով [3]:
Դիցուք $(\bar{H}, \bar{x})$ - ը $\Gamma(x_0, T - t_0)$ խնդրում էֆեկտիվ կետի ընտրությունն է համաձայն φ [2] արբիտրաժային սխեմայի, այն պայմանով, որ կոնսերվատիվ լուծումը $x^0(x_0, T - t_0) \in C^{T-t_0}(x_0)$ կետն է:
Ենթադրենք $x^*(t)$ - ը x_0 - և $\bar{x}(x_0, T - t_0)$ կետին միացնող օպտիմալ հետագիծն է: Դիտարկենք $\Gamma(x^*_{(t)}, T - t)$, $t_0 \leq t \leq T$ ընթացիկ խնդրի արբիտրաժային սխեման:
Ենթադրենք $(\bar{H}(x^*_{(t)}, T - t), \bar{x}(x^*(t), T - t))$ - ը արբիտրաժային սխեմայով թելադրվող ընտրությունն է: Դինամիկ կայունություն նշանակում է հետևյալ պայմանի տեղի ունենալը.

$$\bar{x}(x^*(t), T - t) = \bar{x}(x_0, T - t) \tag{3}$$

բոլոր $t \in [t_0, T]$ - երի համար [3]:
Նախնական վերլուծությունը և ունեցած հետազոտությունը ցույց են տալիս, որ (3) առնչությունը տեղի ունի խիստ հազվադեպ: Ի հաստատումն դրա, մի խնդրի համար ապացուցենք, որ դինամիկ կայունություն հաստատվում է եզակի դեպքերում:
Դիտարկենք երկու խաղացողների խաղ որպես երկհայտանիշային խնդիր, որի դինամիկան նկարագրվում է

$$\dot{x} = u_1 + u_2 \tag{4}$$

հավասարումով, որտեղ $x \in R^2$, $|u_1| \leq r/2, |u_2| \leq r/2, r = const, r > 0$:

Ենթադրենք, որ $u_i(i = 1,2)$ պարամետրը ընտրվում է անկախ ըստ ժամանակի, և արդյունքում ստացված $u_i(t), i = 1,2,\ t \in [t_0,T]$, ֆունկցիաները չափելի են ըստ t - ի: Ենթադրենք որ $t_0 = 0$ - ն խաղի սկիզբն է, իսկ $T = 1$ -ը՝ վերջը: R^2 - ում տրված են $O(0,0)$ սկզբնակետը և խաղացողների $M_1(0,a), M_2(b,0), (a,b > r)$ նպատակակետերը:

Խաղացողների շահույթները համարենք $H_i(x(T)) = -\rho^2(M_i, x(T))$ ֆունկցիաները, որտեղ $\rho(x(T),M) = \| x(T) - M \|$: (4) համակարգի համար $C^T(t_0,x_0)$ հասանելիության բազմությունը կլինի r շառավղով շրջանագիծ, որն էլ նշանակենք $O_2(0,0)$ - ով: Պարետո - օպտիմալ բազմությանն այստեղ կհամապատասխանի $A(0,r)$ և $B(r,0)$ կետերով շրջափակված $O_2(0,0)$ շրջանագծի աղեղը [1]: Այս բազմությունը նշանակենք $P(AB)$ - ով:

Նեշի արբիտրաժային սխեման [2] հանդիսանում է $P(AB)$ տերմինալ կետը Պարետո-օպտիմալ բազմությունից առանձնացող միջոց: Արբիտրաժային սխեմայի դինամիկ կայունության ուսումնասիրության համար անհրաժեշտ է որոշակիացնել դրված խնդրի "ստատուս քվո" կետի ըմբռնումը: "Ստատուս-քվո" կետին այստեղ համապատասխանում են ըստ առաջին և ըստ երկրորդ հայտանիշների երաշխավորված շահույթները:

Ենթադրենք $M \in P(AB)$ կետը $\Gamma(x_0, T-t_0)$ խնդրում φ (2) արբիտրաժային սխեմայի համապատասխան էֆեկտիվ կետն է, որն էլ որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$\varphi(\kappa(x_0,T), H(x_0,T)) = \max_{\substack{H \geq H(x(T),t_0,x_0) \\ H \in P(AB)}} \prod_{i=1}^{2} (H_i - H_i(x_0,T)),$$

որտեղ $H(x_0,T)$ - ը "ստատուս-քվո" կետն է, տվյալ դեպքում՝ $H(x_0,T) = \{|M_i 0|^2\}$:

Դիտարկվող խնդրում այն համապատասխանում է

$$f(M) = (|M_1 0|^2 - |M_1 M|^2)(|M_2 0|^2 - |M_2 M|^2) = \max_{D \in P(AB)} (|M_1 0|^2 - |M_1 D|^2)\cdot$$

$$\cdot(|M_2 0|^2 - |M_2 D|^2) = \max_{D \in P(AB)} (2ar \sin\alpha - r^2)(2br \cos\alpha - r^2)$$

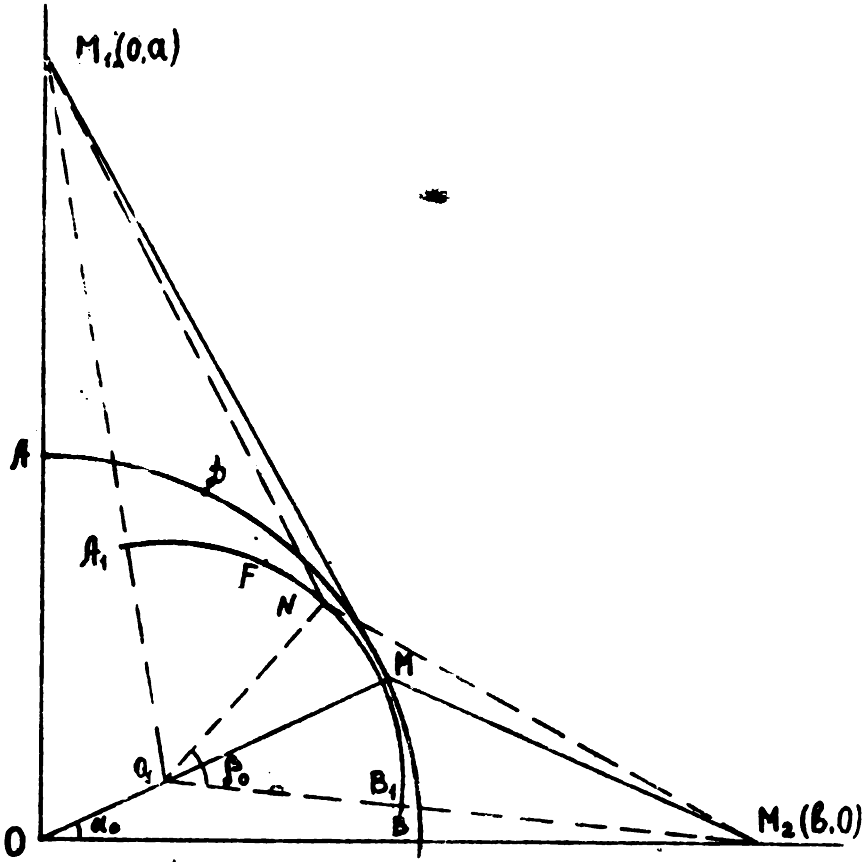
պայմանին, որտեղ α - ով նշանակված է $\angle DOM_2$ - ը (տես նկ.): M կետի համար անկյուն $\alpha = \alpha_0$, որն էլ որոշվում է $f_\alpha'(D) = 0$ պայմանից: $0M$ հատվածի վրա ստացված լուծման $x(t) = 0M,\ t \in [0,1]$ դինամիկ կայունության ուսումնասիրության համար վերցնենք որևէ 0_1 կետ, որտեղ $0 < |00_1| < |0M|$: Նշանակենք $x = |00_1|$ - ով: Այժմ որպես սկզբնակետ վերցնենք $0_1 \in [0M]$ - ը: Գտնենք էֆեկտիվ կետը՝ համաձայն Նեշի արբիտրաժային սխեմայի: Այս դեպքում Պարետո-օպտիմալ բազմությունը նշանակենք $P(A_1,B_1)$ - ով: Դիցուք F - ը $P(A_1,B_1)$ - ից որևէ կետ է, իսկ β-ն՝ 0_1F և 0_1M_2 ուղղություններով կազմված անկյունը (նկար):

N - ով նշանակենք $P(A_1,B_1)$ բազմության էֆեկտիվ կետը, որը որոշվում է համաձայն արբիտրաժային սխեմայի հետևյալ կերպ.

$$g(N) = (|M_1 0_1|^2 - |M_1 N|^2)(|M_2 0_1|^2 - |M_2 N|^2) =$$

$$= \max_{F \in P(A_1,B_1)} (|M_1 0_1|^2 - |M_1 F|^2)(|M_2 0_1|^2 - |M_2 F|^2) :$$

Նկատենք, որ տվյալ դեպքում "ստատուս -քվո" կետը $H(x(t),T-t) = \{|M_i 0_1|^2\}$ - ն է:



Դիցուք N կետի համար $\beta = \beta_0$, որն էլ բավարարում է $g'_\beta(\cdot) = 0$ պայմանին:

Նեշի արբիտրաժային սխեմայի դինամիկ կայունության համար անհրաժեշտ է N կետի համընկնելը M - ին, որը տեղի կունենա $\beta_0 = \alpha_0$ դեպքում: Վերջինիս իրականացման համար էլ բավարար է հետևյալ համակարգի լուծելիությունը.

$$\begin{cases} f'_\alpha(\cdot)|_{\alpha=\alpha_0} & = 0 \\ g'_\beta(\cdot)|_{\beta=\alpha_0} & = 0 \end{cases},$$

որը համարժեք է հետևյալ համակարգին

$$\begin{cases} r(b\sin\alpha_0 - a\cos\alpha_0) + 2ab(\cos^2\alpha_0 - \sin^2\alpha_0) & = 0 \\ (r+x)(b\sin\alpha_0 - a\cos\alpha_0) + 2ab(\cos^2\alpha_0 - \sin^2\alpha_0) & = 0 \end{cases};$$

Համակարգը համատեղելի է $\alpha_0 = \arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ դեպքում, երբ $x \neq 0$: Սա էլ հենց այն եզակի դեպքն է, երբ ուսումնասիրվող խնդրում տեղի ունի արբիտրաժային սխեմայի դինամիկ կայունություն:

Տեսական մեխանիկայի ամբիոն

Ստացվել է 13.03.1991

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Петросян Л.А., Томский Г.В.** Динамические игры и их приложения. – Л., 1982, 252 с.
2. **Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г.** Введение в прикладную теорию игр. – М., 1981, 336 с.
3. **Петросян Л.А.,Захаров И.И.** Введение в математическую экологию. Л., 1986, 224 с.

О.С.МИКАЕЛЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ АРБИТРАЖНОЙ СХЕМЫ НЭША В ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается одна кооперативная дифференциальная игра двух лиц. В качестве принципа оптимальности применяется арбитражная схема Нэша - способ выделения одного решения среди оптимальных по Парето решений. При рассмотрении динамическихили дифференциальных игр возникает проблема динамической устойчивости. В работе приведен анализ динамической устойчивости арбитражной схемы для поставленной задачи, т.е. в дифференциальной игре с двумя целевыми точками.

Исследование показало, что, как и следовало ожидать из общетеоретических соображений, арбитражная схема динамически неустойчива и устойчивость имеет место лишь для некоторой специальной комбинации параметров задачи.

O.S. MICHAELIAN

THE INVESTIGATION OF NASH'S ARBITRAGE SCHEME IN A DYNAMIC PROBLEM

Summary

A cooperative differential game of two persons is discussed in this paper. Nash's arbitrage scheme is used as a principle of optimization - a method to choose one solution among optimal solutions according to Pareto. While considering dynamic or differential games the problem of dynamic stability occurs. In the paper analysis of dynamic stability of arbitrage scheme is carried out for the given problem, i.e. in differential games with two aim points.

The investigation has shown that, as it was obvious from general - theoretical points of view, the arbitrage scheme is dynamically non - stable, and the stability exists only for a special combination of parameters of the problem.