ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1992 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

В.С. САРКИСЯН, М.С. ГАБРИЕЛЯН, Ю.Дж. ЮСИФ

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ОРТОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассматривается задача об оптимальной стабилизации колебаниями шарнирно опертой по краям прямоугольной ортотропной пластинки на упругом основании. Пластинка стабилизируется при помощи нормально действующих управляющих воздействий. Задача решается методом Фурье с оптимальным стабилизированием каждой собственной амплитуды [1].

§1. Рассмотрим задачу об оптимальной стабилизации ортотропной прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по краям на упругом основании, со сторонами $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$. Пусть на пластинку (по нормали к ее поверхности) действует управляющая нагрузка $q(x,y,t)$, принадлежащая классу L_2 на $[0;a] \times [0;b] \times [0;\infty)$. Тогда прогиб пластинки $W(x,y,t)$ определяется из следующего уравнения [2,3]:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho h}\left[D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right] = \frac{1}{h\rho}(q - KW), \quad (1.1)$$

где D_i $(i = 1,2,3)$, K—упругие постоянные, h—толщина, а ρ—плотность пластинки. Начальные и краевые условия для этой задачи будут

$$W = f(x,y); \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \varphi(x,y) \quad \text{при} \quad t = 0,$$

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = a, \quad (1.2)$$

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = b.$$

Качество стабилизации характеризуется минимизацией следующего функционала:

$$J = \frac{h\rho}{2} \int_0^\infty\int_0^a\int_0^b \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 dxdydt + \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^a\int_0^b \left[D_1\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_3 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \right.$$

$$+D_2\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\Big)^2\, dxdydt + \frac{\mathcal{H}}{h\rho}\int_0\int_0\int_0 (q - KW)^2 dxdydt, \qquad (1.3)$$

где $\mathcal{H} > 0$—произвольная постоянная.

Для решения поставленной задачи функции $W(t,x,y)$, $q(t,x,y)$, $f(x, y)$ и $\varphi(x,y)$ представим в виде следующих двойных рядов:

$$W(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{kn}(t)\sin\lambda_k x \sin\mu_n y,$$

$$q(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(t)\sin\lambda_k x \sin\mu_n y,$$

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\sin\lambda_k x \sin\mu_n y, \qquad (1.4)$$

$$\varphi(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{kn}\sin\lambda_k x \sin\mu_n y,$$

где $\lambda_k = k\pi/a$; $\mu_n = n\pi/b$.

Следует отметить, что представления (1.4) удовлетворяют граничным условиям (1.2). Учитывая ортогональность и полноту системы функций $\{\sin\lambda_k x \sin\mu_n y\}$ на множестве $[0;a] \times [0;b]$ уравнение (1.1) эквивалентно заменяем системой уравнений

$$T''_{kn} + s_{kn}T_{kn} = \frac{1}{2}\mu u_{kn}, \quad k,n = 1,2,..., \qquad (1.5)$$

где

$$s_{kn} = \frac{1}{\rho h}(\lambda_k^4 D_1 + 2D_3\lambda_k^2\mu_n^2 + D_2\mu_n^4 + K), \quad \mu = \frac{2}{\rho h}.$$

Начальные условия примут вид

$$T_{kn}(0) = a_{kn}; \quad T'_{kn}(0) = b_{kn}, \quad k,n = 1,2,..., \qquad (1.6)$$

а каждое слагаемое минимизируемого функционала (1.3) будет

$$J_{kn} = \int_0^{\infty}[(T'_{kn})^2 + H_{kn}T_{kn}^2 - LT_{kn}u_{kn} + Mu_{kn}^2]dt, \qquad (1.7)$$

где

$$H_{kn} = \frac{1}{\rho h}\Big(D_1\lambda_k^4 + 2D_3\lambda_k^2\mu_n^2 + D_2\mu_n^4 + \frac{\mathcal{H}}{\rho h}K^2\Big),\ L = \frac{2\mathcal{H}}{\rho^2 h^2}K,\ M = \frac{\mathcal{H}}{\rho^2 h^2}.$$

При этом $J = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_{kn}$, где $\lambda = ab\rho h/8$. Следует отметить, что в (1.3) каждое слагаемое (J_{kn} (1.7)) не зависит от другого, и положительная величина, следовательно, J (1.3) получит минимальное значение, если каждое из J_{kn} получает минимальное значение, причем этот минимум ограничен снизу. Имея в виду вышесказанное, можем утверждать, что решение поставленной задачи приводится к задаче аналитического конструирования оптимального регулятора [4] для каждого (k,n), $k,n = 1,2,\ldots$. Так как система уравнений (1.5) линейная, то целесообразно функцию Ляпунова искать в виде

$$V_{kn} = A_{kn}T_{kn}^2 + 2B_{kn}T_{kn}T_{kn}' + C_{kn}(T_{kn}')^2, \tag{1.8}$$

тогда уравнение Ляпунова-Беллмана будет

$$2A_{kn}T_{kn}T_{kn}' + 2B_{kn}(T_{kn}')^2 + 2B_{kn}T_{kn}\Big(\frac{1}{2}\mu u_{kn} - s_{kn}T_{kn}\Big) +$$

$$+2C_{kn}T_{kn}'\Big(\frac{1}{2}\mu u_{kn} - s_{kn}T_{kn}\Big) + (T_{kn}')^2 + H_{kn}T_{kn}^2 - hT_{kn}u_{kn} + Mu_{kn}^2 = 0 \tag{1.9}$$

и

$$\mu B_{kn}T_{kn} + \mu C_{kn}T_{kn}' - hT_{kn} + 2Mu_{kn} = 0. \tag{1.10}$$

Определяя u_{kn} из (1.10), подставляя в (1.9) и выравнивая коэффициенты при T_{kn}^2, $(T_{kn}')^2$ и $T_{kn}\cdot T_{kn}'$, получаем систему квадратных уравнений относительно A_{kn}, B_{kn} и C_{kn}. Решая эти уравнения, получим

$$B_{kn} = \frac{1}{\mu^2}\Big[\mu L - 4Ms_{kn} + \sqrt{(\mu L - 4Ms_{kn})^2 + \mu^2(4MH_{kn} - L^2)}\Big],$$

$$C_{kn} = \frac{2\sqrt{M}}{\mu}\sqrt{2B_{kn}+1};\quad A_{kn} = C_{kn}\Big(s_{kn} + \frac{B_{kn} - L}{4M}\mu\Big), \tag{1.11}$$

$$u_{kn} = -\frac{1}{2M}\Big[(\mu B_{kn} - L)T_{kn} + C_{kn}\mu T_{kn}'\Big].$$

Следует отметить, что при решении этих уравнений знаки перед радикалами выбираются так, чтобы коэффициенты A_{kn} и C_{kn} были положительными. Для того, чтобы квадратичная форма V_{kn} (1.8) была определенно положительной, необходимо еще, чтобы выполнялось условие

$$A_{kn}C_{kn} - B_{kn}^2 = (2B_{kn}+1)\Big(\frac{4Ms_{kn}}{\mu^2} + B_{kn} - \frac{L}{\mu}\Big) - B_{kn}^2 =$$

$$= B_{kn}^2 + B_{kn} + (2B+1)\frac{1}{\mu}\Big(\frac{4Ms_{kn}}{\mu} - L\Big) =$$

$$= B_{kn}^2 + B_{kn} + \frac{1}{\mu}(2B+1)\Big(\frac{4\mathcal{H}s_{kn}}{\mu\rho^2h^2} - \frac{2\mathcal{H}\widetilde{K}}{\rho^2h^2}\Big) =$$

$$= B_{kn}^2 + B_{kn} + \frac{2\mathcal{H}}{\mu\rho^2h^2}(2B+1)\Big(\frac{2s_{kn}}{\mu} - \widetilde{K}\Big) =$$

$$= B_{kn}^2 + B_{kn} + \frac{2\mathcal{H}}{\mu\rho^2h^2}(2B+1)(\lambda_k^4D_1 + 2D_3\lambda_k^2\mu_n^2 +$$

$$+D_2\mu_n^4) > 0 \quad (B_{kn} > 0).$$

Таким образом, форма V_{kn} (1.8) при определенных наверху A_{kn}, B_{kn} и C_{kn} является определенно положительной. С другой стороны, нетрудно проверить, что квадратичная форма dV_{kn}/dt (составленная в силу системы (1.5) при U_{kn} (1.11)) является определенно положительной. Таким образом, согласно теореме Ляпунова-Беллмана система (1.5) оптимально стабилизируется управляющим воздействием $u_{kn}(t)$ (1.11).

Для определения функций u_{kn} как функции от времени нужно интегрировать систему (1.5) при u_{kn} (1.11) и начальных условиях (1.6). Решение системы (1.5) будет

$$T_{kn}(t) = e^{-p_{kn}t}\Big(\frac{b_{kn} + a_{kn}p_{kn}}{\omega_{kn}}\sin\omega_{kn}t + a_{kn}\cos\omega_{kn}t\Big), \tag{1.12}$$

где $p_{kn} = \frac{C_{kn}\mu^2}{8M} > 0$; $\omega_{kn}^2 = \frac{\mu^2 B_{kn}}{8M} - \frac{1}{16M}(\mu^2 + 4\mu L - 16Ms_{kn}) > 0$.

Подставляя значения T_{kn} и T'_{kn} в (1.11), получим

$$u_{kn}(t) = -e^{-p_{kn}t}\Big\{\frac{1}{2M\omega_{kn}}[(b_{kn} + a_{kn}p_{kn})(B_{kn}\mu - L - C_{kn}p_{kn}\mu)-$$

$$-\mu C_{kn}a_{kn}\omega_{kn}^2]\sin\omega_{kn}t + \frac{1}{2M}[\mu B_{kn}a_{kn} - La_{kn} + \mu C_{kn}B_{kn}]\cos\omega_{kn}t\Big\}. \tag{1.13}$$

Таким образом оптимальные значения $W(t,x,y)$ и $q(t,x,y)$ (1.4) определены.

§2. Докажем равномерную сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}^2(t), \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

и ограниченность величины минимизируемого функционала

$$\min J = \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{kn}a_{kn}^2 + 2B_{kn}a_{kn}b_{kn} + C_{kn}b_{kn}^2). \tag{2.2}$$

Для доказательства равномерной по $t \geq 0$ сходимости ряда (2.1) достаточно показать, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{\omega_{kn}}[(b_{kn} + a_{kn}p_{kn})(B_{kn}\mu - L - C_{kn}p_{kn}\mu)-$$

$$-\mu C_{kn}a_{kn}\omega_{kn}^2]\Big\}^2, \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[\mu B_{kn}a_{kn} - La_{kn} + \mu C_{kn}b_{kn}]^2$$

сходятся.

Так как $\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}$; $\frac{\partial^4 W}{\partial x^3\partial y}$; $\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}$; $\frac{\partial^4 W}{\partial x\partial y^3}$; $\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ принадлежат, по крайней мере, классу L_2 на прямоугольнике $(x,y) \in [0,a]\times[0,b]$ равномерно по t $(t \geq 0)$, то ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(k^4 a_{kn})^2;\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(k^3 n a_{kn})^2;\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(k^2 n^2 a_{kn})^2;\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(k n^3 a_{kn})^2;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(n^4 a_{kn})^2;\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(k^2 b_{kn})^2;\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(k n b_{kn})^2;\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 b_{kn})^2 \tag{2.4}$$

должны сходиться [5]. Сходимость рядов (2.2) и (2.3) вытекает из условий (2.4), выполнение которых естественно предполагать, исходя из физических соображений. Следовательно, равномерная сходимость ряда (2.1) при условиях (2.4) установлена.

Таким образом, определенная функция $q(t, x, y)$ оптимально стабилизирует колебательное движение пластинки при минимизации функционала J (1.3).

Кафедра механики сплошной среды,
Кафедра теоретической механики ЕГУ,

Мансурский университет, Египет

Поступила 3.04.1992

ЛИТЕРАТУРА

1. Габриелян М.С. О стабилизации механической системой мощности континуума.—Уч.записки ЕГУ, 1975, №2.
2. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки.—ОГИЗ, М.:Гостехиздат, 1947.
3. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела.—Ер.:Изд-во ЕГУ, 1976.
4. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов.—Автоматика и телемеханика, 1960, т.21, №4,5,6; 1961, т.22, №4.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функционального анализа.—М.:Наука, 1976.

Վ.Ս.ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Մ.Ս.ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Յու.Ջ.ՅՈՒՍԻՖ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԴՐՎԱԾ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՍՏԱԲԻԼԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է առաձգական հիմքի վրա դրված և հոդակապերով եզրերում ամրացված առաձգական օրթոտրոպ սալի տատանումների օպտիմալ ստաբիլացման խնդիրը: Սալի վրա ազդում է նրա նորմալով ուղղված ստաբիլացնող ազդեցությունը: Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի եղանակով՝ ստաբիլացնելով ամեն մի սեփական տատանումների ամպլիտուդան:

V.S. SARKISSIAN, M.V. GABRIELIAN, Y.G. YUSIF

ON THE OPTIMAL STABILIZATION OF ORTHOTROP RECTANGULAR PLATE PUT ON THE ELASTIC BASES

Summary

It is studied the probeem of optimae stabieization of eeastic orthotrop hinged-supported peate vibrations put on the eeastic basis. Its normaeey directed stabieizing infeuence has effects on the peate. The probeem is soeved by means of Foure method stabieizing the ampei tude of each of its own vibra+ions.