ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Բնական գիտություններ 1, 1992 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

М.В. БЕЛУБЕКЯН, С.В. САРКИСЯН

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН

Путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластинки предложен вариант уравнений теории гибких пластин. На основе полученных уравнений решается задача нелинейных колебаний пластинки-полосы.

Известные уравнения нелинейных колебаний пластинок имеют один недостаток. При рассмотрении одномерной задачи (колебания пластинки-полосы) и при пренебрежении продольными инерционными членами уравнения становятся линейными [1,2]. Есть и другие модификации с расчетом, чтобы уравнения стали нелинейными [3,4]. Здесь путем уточнения условий на лицевых поверхностях пластинки предложены нелинейные одномерные уравнения.

1. Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν. Пусть пластинка в невозмущенном состоянии занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. На лицевых поверхностях пластинки имеем следующие граничные условия

$$\vec{\sigma}_i \vec{n} = 0, \tag{1.1}$$

где $\vec{n}$—нормаль к возмущенной поверхности пластинки, $\vec{\sigma}_i$ $(i = 1, 2, 3)$—векторы, компонентами которых являются компоненты тензора напряжений

$$\vec{\sigma}_i = \sigma_{i1}\hat{i} + \sigma_{i2}\hat{j} + \sigma_{i3}\hat{k}. \tag{1.2}$$

Принимая уравнения возмущенных лицевых поверхностей в виде

$$z = \pm h + u_3(x, y, \pm h, t), \tag{1.3}$$

для нормалей получим следующие выражения:

$$\vec{n} = \left(\mp\frac{\partial u_3}{\partial x}\hat{i} \mp \frac{\partial u_3}{\partial y}\hat{j} \mp \hat{k}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

при $z = \pm h + u_3(x, y, \pm h, t)$. Здесь $u_3(x, y, z, t)$—компонента вектора перемещения $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ точек пластинки.

Из условия (1.1) согласно (1.2) и (1.4) будем иметь

$$\sigma_{i3} = \sigma_{i1}\frac{\partial u_3}{\partial x} + \sigma_{i2}\frac{\partial u_3}{\partial y} \quad \text{при} \quad z = \pm h + u_3(x, y, \pm h, t). \tag{1.5}$$

Условие для напряжения σ_{33} можно переписать в следующем виде:

$$\sigma_{33} = \sigma_{11}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 + 2\sigma_{12}\frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial y} + \sigma_{22}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2$$

$$\text{при} \quad z = \pm h + u_3(x, y, \pm h, t).$$

Как видно, для напряжения σ_{33} получается кубическая нелинейность, и этим оправдано пренебрежение σ_{33} в законе Гука. Аналогичный вариант уточнений условий на лицевых поверхностях пластин переменной толщины предложен в [5].

Для получения уравнений нелинейных колебаний пластинки примем гипотезу недеформируемых нормалей [1]. В этом случае граничные условия (1.5) принимают вид

$$\sigma_{13} = \sigma_{11}\frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_{12}\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{21}\frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_{22}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{11}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2\sigma_{12}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_{22}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \tag{1.6}$$

$$\text{при} \quad z = \pm h + w(x, y, t),$$

где $w(x, y, t)$—перемещение точек срединной поверхности пластинки по направлению z.

2. Определим соотношения между деформациями и перемещениями срединной поверхности пластинки. На основе гипотезы о недеформируемых нормалях и следуя нелинейной теории пластин, в выражениях, связывающих компоненты тензора деформаций ε_{ij} и вектора перемещения [1,2], пренебрегая нелинейными членами, в которых есть произведение производных перемещений $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ (перемещения точек срединной поверхности пластинки по направлениям x, y), а также члены с z^2, придем к более простым соотношениям между деформациями и перемещениями:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right) - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Соотношения (2.1) совпадают с соотношениями, приведенными в [1,2].

Перейдем к определению напряженного состояния. Примем, что материал пластинки подчиняется закону Гука. Согласно (2.1) для напряжений σ_{11}, σ_{22} и σ_{12} будем иметь

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right],$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right], \tag{2.2}$$

$$\sigma_{12} = G\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} - 2z\frac{\partial\ w}{\partial x\partial y}\ ,\quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Из (2.2) можно получить значения σ_{11}, σ_{22} и σ_{12} при $z = \pm h + w$. Имея эти значения согласно (1.6), при этом оставляя только квадратичные нелинейности и пренебрегая нелинейностями, где сомножители—производные u и v, получим значения напряжений: σ_{13}, σ_{23}, σ_{33} при $z = \pm h + w$:

$$\sigma_{13} = \mp\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial w}{\partial x} \mp 2hG\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\sigma_{23} = \mp 2hG\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} \mp \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{2.3}$$

$$\sigma_{33} = 0.$$

Получим уравнения движения пластинки в перемещениях. Поступая обычным образом, вместо напряжений введем в рассмотрение статически эквивалентные им внутренние силы и моменты, выражения которых согласно (2.2) будут иметь вид

$$T_1 = \int_{-h+w}^{h+w}\sigma_{11}dz = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \underline{w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \nu\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \underline{w\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}\right]\right\},$$

$$T_2 = \int_{-h+w}^{h+w}\sigma_{22}dz = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \underline{w\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} + \nu\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \underline{w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}\right]\right\},$$

$$S = \int_{-h+w}^{h+w}\sigma_{12}dz = 2hG\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \underline{2w\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}}\right), \tag{2.4}$$

$$M_1 = \int_{-h+w}^{h+w}z\sigma_{11}dz = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \underline{\frac{2Eh}{1-\nu^2}w\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)},$$

$$M_2 = \int_{-h+w}^{h+w}z\sigma_{22}dz = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \underline{\frac{2Eh}{1-\nu^2}w\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)},$$

$$H = \int_{-h+w}^{h+w}z\sigma_{12}dz = -\frac{4h^3G}{3}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \underline{2hGw\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}.$$

Подставляя внутренние силы и моменты из (2.4) в осредненные уравнения движения пластинки и учитывая (2.3), получим следующие уравнения движения пластинки в перемещениях:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\\
&+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\underline{\frac{\partial}{\partial x}\left[w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]}-\underline{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y}\left(w\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)}-\\
&-\underline{\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)}-\underline{(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}}=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\\
&-\underline{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right)},\\
&\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\\
&+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\underline{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)}-\\
&-\underline{\frac{\partial}{\partial y}\left[w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]}-\underline{(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}}-\\
&-\underline{\frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)}=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\underline{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w\frac{\partial w}{\partial y}\right)},\qquad (2.5)\\
&\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]-\\
&-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]-\underline{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[w\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]}-\\
&-\underline{(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[w\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]}-\underline{\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[w\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]}+\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\\
&+\underline{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(uw)+\frac{\partial}{\partial y}(vw)\right]}-\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0.
\end{aligned}
$$

В уравнениях (2.4),(2.5) подчеркнутые части представляют собой новые нелинейные члены, обусловленные уточнением условий на лицевых поверхностях пластинки.

Уравнения (2.5) описывают движения пластинки. К ним должны быть присоединены граничные и начальные условия.

3. Рассмотрим задачу колебаний шарнирно-опертой пластинки, один из размеров которой значительно превышает второй размер. При рассмотрении одномерной задачи по работе [1] уравнения становятся линейными. Здесь же мы исследуем эту задачу на основе уравнений (2.5). Уравнения движения для такой пластинки будут иметь вид

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right),
$$

$$\frac{h^2}{3}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(w\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{3.1}$$

В (3.1) отброшены инерционные члены, обусловленные перемещением $u(x,t)$. К этим уравнениям присоединим граничные условия

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad T_1 = 0 \text{ при } x = 0; a. \tag{3.2}$$

Интегрируя первое уравнение (3.1), с учетом (3.2) можно определить

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C + w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\rho(1-\nu^2)}{2E}\frac{\partial^2 w^2}{\partial t^2}, \tag{3.3}$$

где

$$C = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2_{x=0}. \tag{3.4}$$

Теперь подставляя значения $\partial u/\partial x$ из (3.3) во второе уравнение (3.1) и пренебрегая кубическими нелинейностями, для $w(x,t)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{6C}{h^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{3.5}$$

$$k^2 = \frac{3\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}.$$

Представим прогиб $w(x,t)$ выражением

$$w(x,t) = f(t)\sin\lambda x, \quad \lambda = \frac{\pi}{a}, \tag{3.6}$$

которое удовлетворяет граничным условиям (3.2). Подставляя (3.6) в (3.5) и (3.4), придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \omega_0^2 F(f) = 0, \tag{3.7}$$

где $\omega_0^2 = \frac{\lambda^4}{k^2} = \frac{Eh^2\lambda^4}{3\rho(1-\nu^2)}$, $F(f) = f(t) + \alpha f^3(t)$, $\alpha = -3h^{-2}$.

Применим к уравнению (3.7) метод гармонического баланса [1]. Выберем решение уравнения в форме

$$f(t) = B\cos\omega t. \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в уравнение (3.7) и разлагая $F(t)$ в ряд по косинусам (при этом ограничимся в разложении первым членом), придем к уравнению, выражающему зависимость между частотой нелинейных колебаний ω и амплитудой B:

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{3}{4}\alpha B^2\right). \tag{3.9}$$

Сравнивая (3.9) с аналогичной зависимостью, приведенной в [1], можно заметить отличие знака нелинейного члена. Такое отличие связано с уточнением условий на лицевых поверхностях пластинки. Отличие знака нелинейного члена может привести к тому, что частота нелинейных колебаний пластинки обратится в нуль. Для устранения этого несоответствия следует удерживать все кубические нелинейные члены.

В заключение отметим, что такое отличие знака нелинейного члена получено и при удержании инерционного члена, обусловленного перемещением $u(x,t)$ [4].

Кафедра механики сплошной среды *Поступила 17.12.1991*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вольмир А.С.** Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М.: Наука, 1972, 432 с.
2. **Доннелл Л.Г.** Балки, пластины и оболочки.—М.:Наука, 1982, 568 с.
3. **Berger H.M.** A new approach to the analysis of large deflection of plates.—J Appl. Mech., 1955, v.22.
4. **Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А.** О дисперсионных уравнениях гибких пластин и цилиндрической оболочки.—Изв.АН Арм.ССР, Механика, 1988, т.41, №3, с.3-5.
5. **Киракосян Р.М.** К определению напряжений поперечного направления ортотропной идеально-пластической пластинки переменной толщины.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т.43, №2, с.29-37.

Մ.Վ.ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Ս.Վ.ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՍԱԼԵՐԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ ՃՇԳՐՏՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Սալի դիմային մակերևույթների վրա գործող պայմանների ճշգրտմամբ առաջարկված է ճկուն սալերի տեսության հավասարումների մի տարբերակ: Ստացված հավասարումների հիման վրա լուծվում է սալ - շերտի ոչ գծային տատանման խնդիրը:

M.V. BELUBEKIAN, S.V. SARKISSIAN

ON THE IMPROVING OF THE PLATE NON-LINEAR VIBRATIONS EQUATIONS

S u m m a r y

By means of improving of the facial planes boundary conditions a version of equations of flexible plate theory is suggested. On the basis of these equations the problem of non-linear cylindrical-form vibration of the plate is solved.