ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1992 Естественные науки

Математика

УДК 513.8

М.И. КАРАХАНЯН

О СУБНОРМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В C^*-АЛГЕБРЕ

Исходя из дилатационной теоремы, действующей в гильбертовых A-модулях, вводится понятие субнормального элемента в C^*-алгебре и дается его характеристика на языке положительной определенности.

Пусть A есть C^*-алгебра и X-левый A-модуль, где алгебра A действует на X по правилу $(x,a) \to x \circ a$, $x \in X$, $a \in A$. Предполагается, что все модули левые и являются векторными пространствами над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел, так что $\lambda(x \circ a) = (\lambda x) \circ a = x \circ \lambda a$, $x \in X$, $a \in A$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

Левый A-модуль X, снабженный сопряженно билинейным отображением $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to A$, удовлетворяющий условиям
(i) $\langle x,x \rangle \geq 0$ и $\langle x,x \rangle = 0$, если $x = 0$;
(ii) $\langle y,x \rangle = \langle x,y \rangle^*$;
(iii) $\langle x \circ a, y \rangle = \langle x,y \rangle a$, $x,y \in X$, $a \in A$,
называется предгильбертовым A-модулем.

В предгильбертовом A-модуле X определим норму $\|\cdot\|_X$ как $\|x\|_X = \|\langle x,x \rangle\|_A^{1/2}$ (см. [1]). Если предгильбертов A-модуль X полон относительно нормы $\|\cdot\|_X$, тогда X называется гильбертовым A-модулем.

Если , например, J—замкнутый левый идеал A, тогда J превращается в гильбертов A-модуль, если $\langle x,y \rangle = y^*x$; $x,y \in X$.

Пусть $B(X)$—множество всех ограниченных линейных операторов на X и $\mathcal{U}(X) = \{T \in B(X)$, для которых существует $T^* \in B(X)$, что $\langle Tx,y \rangle = \langle x,T^*y \rangle$; $x,y \in X\}$. Отметим (см. [1]), что для каждого $T \in \mathcal{U}(X)$ существует единственный $T^* \in \mathcal{U}(X)$. В случае, когда X есть гильбертов A-модуль, тогда $\mathcal{U}(X)$ есть C^*-алгебра относительно инволюции $T \to T^*$ и нормы $\|\cdot\|_X$ (см. [1]).

Пусть Γ есть $*$-полугруппа, т.е. система элементов с определенными в ней двумя операциями, ассоциативной операцией умножения $(\xi,\eta) \to \xi\eta$ и операцией $\xi \to \xi^*$, удовлетворяющей правилам $\xi^{**} = \xi$, $(\xi\eta)^* = \eta^*\xi^*$. Будем предполагать, что в Γ есть "единичный" элемент $\varepsilon \in \Gamma$ такой, что $\varepsilon^* = \varepsilon$, $\varepsilon\xi = \xi\varepsilon = \xi$, где $\xi \in \Gamma$.

Отображение $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(X)$ называется представлением $*$-полугруппы Γ в гильбертовом A-модуле X, если

$$\pi(\varepsilon) = 1_X, \quad \pi(\xi\eta) = \pi(\xi)\pi(\eta), \quad \pi(\xi^*) = \pi(\xi)^*.$$

Если для некоторого $\xi \in \Gamma$

1) $\xi^*\xi = \xi\xi^*$, то тогда $\pi(\xi)$—нормальный оператор,

2) $\xi = \xi^*$, то $\pi(\xi)$—эрмитов оператор,

3) $\xi = \xi^* = \xi^2$, то $\pi(\xi)$—оператор ортогонального проектирования,

4) $\xi\xi^* = \xi^*\xi = \varepsilon$, то $\pi(\xi)$—унитарный оператор.

Обозначим через $V(\Gamma, X)$ множество всех отображений $f : \Gamma \to X$, где $f(\xi)$ будет обозначать "компоненту" с индексом ξ. $V(\Gamma, X)$ есть левый A-модуль, если $(f \circ a)(\xi) = f(\xi) \circ a$, где $a \in A$, $f \in V(\Gamma, X)$.

Пусть $F(\Gamma, X) = \{f \in V(\Gamma, X) : f(\xi) = 0$ за исключением конечного $\xi \in \Gamma\}$.

Отображение $\varphi : \Gamma \to \mathcal{U}(X)$ называется <u>положительно определенным</u> (П.О.), если для каждого $f \in F(\Gamma, X)$

$$\sum_{\xi,\eta} \langle \varphi(\eta^*\xi) f(\xi), f(\eta) \rangle \geq 0.$$

Нетрудно видеть, что если отображение $\varphi : \Gamma \to \mathcal{U}(X)$ есть П.О., то $\varphi(\xi^*) = \varphi(\xi)^*$ для каждого $\xi \in \Gamma$.

Будем говорить, что (П.О.) отображение $\varphi : \Gamma \to \mathcal{U}(X)$ удовлетворяет <u>условию ограниченности</u> (У.О.), если существует функция $c : \Gamma \to [0, \infty)$ такая, что для каждого $\alpha \in \Gamma$ и $f \in F(\Gamma, X)$

$$\sum_{\xi,\eta} \langle \varphi(\eta^* \alpha^* \alpha \xi) f(\xi), f(\eta) \rangle \leq C(\alpha) \sum_{\xi,\eta} \langle \varphi(\eta^*\xi) f(\xi), f(\eta) \rangle.$$

Если Γ есть группа G, тогда условие П.О. гарантирует У.О., так как $c(\alpha) \equiv 1$.

Заметим, что для $T \in \mathcal{U}(X)$ условие $T \geq 0$ как элемент C^*-алгебры $\mathcal{U}(X)$ равносильно тому, что $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ для каждого $x \in X$ (см. [1,2]). Напомним, что отображение $T : X \to Y$ называется модульным отображением, если $T(x \circ a) = (Tx) \circ a$; $x \in X$, $a \in A$; T называется изометрическим вложением, если T—линейное модульное отображение, удовлетворяющее условию $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$; $x, y \in X$. Если изометрическое вложение есть отображение "на", то X и Y называются изоморфными.

Для дальнейшего нам понадобится следующая важная и известная (см. [1–4]) дилатационная теорема для гильбертовых A-модулей.

Теорема 1. Пусть $\varphi : \Gamma \to \mathcal{U}(X)$ удовлетворяет условиям П.О. и У.О. Тогда существует гильбертов A-модуль Y; ограниченные модульные отображения $R : X \to Y$, $Q : Y \to X$ и представление $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(y)$ такие, что $\varphi(\xi) = Q\pi(\xi)R$, причем множество $\{\pi(\xi)Rx : x \in X, \xi \in \Gamma\}$ всюду плотно в Y (условие минимальности дилатации $\{Y, \pi\}$). Если $\varphi(\varepsilon) = 1_X$, тогда $R : X \to Y$ есть изометрическое вложение и при отождествлении X и $R(X)$, оператор Q есть проектор в $\mathcal{U}(Y)$.

Пользуясь схемой Б. Секефальви-Надя (см. [3]), мы приведем, на наш взгляд, более прозрачное доказательство вышеприведенной теоремы, чем в [1,2,4].

Доказательство В A-модуле $V(\Gamma, X)$рассмотрим подмодули $F(\Gamma, X)$ и $L(\Gamma, X) = \{g \in V(\Gamma, X)$, для которых существует $f \in F(\Gamma, X)$, что $g(\eta) = \sum_{\xi} \varphi(\eta^*\xi) f(\xi)$ для всех $\eta \in \Gamma\}$. Связь между f и g будем обозначать $g = \hat{f}$.

В A-модуле $L(\Gamma, X)$ определим сопряженно билинейное отображение по формуле: если $g, g' \in L(\Gamma, X)$, т.е. $g = \hat{f}$, $g' = \hat{f}'$, то

$$[g,g'] = \sum_{\eta}\langle g(\eta), f'(\eta)\rangle = \sum_{\xi,\eta}\langle \varphi(\eta^*\xi)f(\xi), f'(\eta)\rangle =$$

$$= \sum_{\xi}\langle f(\xi), g'(\xi)\rangle = \sum_{\xi,\eta}\langle f(\xi), \varphi(\xi^*\eta)f'(\eta)\rangle. \tag{1}$$

Из (1) следует, что эта формула корректна и не зависит от выбора f в представлении g и f' в представлении g', т.е. форма $[g, g']$ определяется по g и g' однозначно. Очевидно, что $[g', g] = [g, g']^*$, $[g, g] = \sum_{\xi,\eta}\langle \varphi(\eta^*\xi)f(\xi),\ f(\eta)\rangle \geq 0$ и линейна по первой переменной.

Пусть $\Psi \in S(A)$, где $S(A)$ есть множество состояний на A, тогда

$$|\Psi([g,g'])|^2 \leq \Psi([g,g])\Psi([g',g']).$$

Поэтому если $[g, g] = 0$, то $[g, g'] = 0$ для всех $g' \in L(\Gamma, X)$, а из формулы (1) вытекает, что это возможно только при $g = 0$.

Таким образом, $L(\Gamma, X)$ есть предгильбертов A-модуль. Пополняя $L(\Gamma, X)$, получим гильбертов A-модуль Y.

Исходный A-модуль X погружается в $L(\Gamma, X)$ как подпространство, если $(R_0x)(\xi) = \varphi(\xi^*)x$. Отметим, что $R_0x = \hat{\delta}_x$, где $\delta_x(\xi) = \begin{cases} x, & \xi = \varepsilon \\ 0, & \xi \neq \varepsilon \end{cases}$.

Нетрудно видеть, что $R_0(\lambda x) = \lambda R_0(x)$, $R_0(x + x') = R_0(x) + R_0(x')$, $((R_0x)\circ a)(\xi) = \varphi(\xi^*)x \circ a = (R_0x)(\xi)\circ a$, $[R_0(x),\ R_0(x')] = \sum_{\xi,\eta}\langle \varphi(\eta^*\xi)\delta_x(\xi),\ \delta_{x'}(\eta)\rangle = \langle \varphi(\varepsilon)x,\ x'\rangle$.

Если $\varphi(\varepsilon) = 1_X$, то $[R_0(x),\ R_0(x')] = \langle x, x'\rangle$, т.е. $R_0 : X \to L(\Gamma, X)$ есть изометрическое вложение.

Вычислим проекцию $Q_0 : L(\Gamma, X) \to X$. Пусть $g \in L(\Gamma, X)$, $x \in X$, тогда $\langle Q_0(g),\ x\rangle = [g,\ \delta_x] = \sum_{\xi,\eta}\langle \varphi(\eta^*\xi)f(\xi),\ \delta_x(\eta)\rangle = \langle \sum_{\xi}\varphi(\xi)f(\xi),\ x\rangle$.

Таким образом, если $g = \hat{f}$, то $Q_0(g) = \sum_{\xi}\varphi(\xi)f(\xi) \in X$ и нетрудно видеть, что $\langle Q_0(g),\ Q_0(g')\rangle = [g, g']$. Кроме того, имеем $[R_0(x),\ R_0(x')] = \langle R_0^*R_0x,\ x'\rangle = \langle x,\ x'\rangle$, с другой стороны, $\langle Q_0R_0x,\ x'\rangle = [R_0x,\ \delta_x] = [\delta_x,\ \delta_{x'}] = \sum_{\xi,\eta}\langle \varphi(\eta^*\xi)\delta_x(\xi),\ \delta_{x'}(\eta)\rangle = \langle \varphi(\varepsilon)x,\ x'\rangle$, т.е. $Q_0R_0 = \varphi(\varepsilon)$ и в случае $\varphi(\varepsilon) = 1_X$, $Q_0R_0 = 1_X = R_0^*R_0$. Таким образом, $R_0^* = Q_0$.

Устроим представление $\pi_0 : \Gamma \to \mathcal{U}(L(\Gamma, X))$. Пусть $g \in L(\Gamma, X)$, т.е. $g = \hat{f}$, тогда для $\alpha \in \Gamma$ $g(\alpha^*\eta) = \sum_{\xi}\varphi(\eta^*\alpha\xi)f(\xi) = \sum_{\zeta}\varphi(\eta^*\zeta)f^{(\alpha)}(\zeta)$, где $f^{(\alpha)}(\zeta) = \sum_{\alpha\xi=\zeta} f(\xi)$. Ясно, что $f^{(\alpha)} \in F(\Gamma, X)$ и значит $g^{(\alpha)} \in L(\Gamma, X)$, где $g^{(\alpha)}(\eta) = g(\alpha^*\eta)$. Определим $\pi_0(\alpha)g(\eta) = g^{(\alpha)}(\eta) = g(\alpha^*\eta)$, тогда $\pi_0 : \Gamma \to \mathcal{U}(L(\Gamma, X))$ и $\pi_0(\varepsilon) = 1_L$. Кроме того, $\pi_0(\alpha)\pi_0(\beta)g(\eta) = \pi_0(\alpha)(g(\beta^*\eta)) = g(\beta^*\alpha^*\eta) = g[(\alpha\beta)^*\eta] = \pi_0(\alpha\beta)g(\eta)$.

Пусть $g, g' \in L(\Gamma, X)$, тогда $[\pi_0(\alpha)g, g'] = \sum_{\eta}\langle g(\alpha^*\eta),\ f'(\eta)\rangle = \sum_{\xi,\eta}\langle \varphi(\eta^*\alpha\xi) f(\xi),\ f'(\eta)\rangle = \sum_{\xi,\eta}\langle f(\xi), \varphi(\xi^*\alpha^*\eta)f'(\eta)\rangle = [g,\ \pi_0(\alpha^*)g']$, кроме того, $[\pi_0(\alpha)g,$

$\pi_0(\alpha)g] = [\pi_0(\alpha^*)\pi_0(\alpha)g,\ g] = [\pi_0(\alpha^*\alpha)g,\ g] = \sum_{\xi,\eta}\langle\varphi(\eta^*\alpha^*\alpha\xi)f(\xi),\ f(\eta)\rangle \le$ $\le c(\alpha)\sum_{\xi,\eta}\langle\varphi(\eta^*\xi)f(\xi), f(\eta)\rangle = c(\alpha)[g,g]$, откуда $\|\pi_0(\alpha)g\|^2 \le c(\alpha)\|g\|^2$, т.е. $\|\pi_0(\alpha)\| \le \sqrt{c(\alpha)}$. Для $x,y \in X$ $\langle Q_0\pi_0(\alpha)R_0x,y\rangle = [\pi_0(\alpha)R_0x,\ R_0y] = [\pi_0(\alpha)\hat{\delta}_x, \hat{\delta}_y] = \sum_{\xi,\eta}\langle\varphi(\eta^*\alpha\xi)\delta_x(\xi),\ \delta_y(\eta)\rangle = \langle\varphi(\alpha)x,y\rangle$, таким образом, $Q_0\pi_0(\alpha)R_0 = \varphi(\alpha)$.

Так как $L(\Gamma,X)$ плотно в Y, то Q_0, R_0 и π_0 имеют единственное продолжение на все Y, которые соответственно обозначим через Q, R и π, которые удовлетворяют условиям теоремы 1. Теорема доказана.

Заметим, что если

1) $\varphi(\xi\alpha\eta) = \varphi(\xi\beta\eta)+\varphi(\xi\gamma\eta)$ выполняется для фиксированных $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ и всех $\xi,\eta \in \Gamma$, то $\pi(\alpha) = \pi(\beta) + \pi(\gamma)$;
2) $\varphi(\xi\alpha_n\eta) \to \varphi(\xi\alpha\eta)$ для фиксированных $\alpha_n,\alpha \in \Gamma$ и для всех $\xi,\eta \in \Gamma$ и, кроме того, $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, c(\alpha_n) < \infty$, то $\pi(\alpha_n) \to \pi(\alpha)$.

Пусть $\mathcal{K}$ –пространство с мерой, так что $\mathcal{K}$—измеримое множество, и пусть $\Sigma(\mathcal{K})$ есть множество всех измеримых множеств $\mathcal{K}$, тогда $\Sigma(\mathcal{K})$ есть $*$-полугруппа относительно операций $M_1M_2 = M_1 \cap M_2$, $M = M^*$, $\varepsilon = \mathcal{K}$, где M, M_1, $M_2 \in \Sigma(\mathcal{K})$. Функцию $\nu : \Sigma(\mathcal{K}) \to \mathcal{U}_+(X)$ назовем операторной мерой, если для каждого $x \in X$ функции $\nu_x : \Sigma(\mathcal{K}) \to A$ по формуле $\nu_x(M) = \langle\nu(M)x,x\rangle$ есть "положительная" мера и $\nu\mathcal{K} = 1_X$.

Пользуясь теоремой 1, получаем следующее обобщение теоремы Наймарка (см. [5]).

Теорема 2. Пусть ν—операторная мера на $\mathcal{K}$, действующая в X. Тогда существует гильбертов A-модуль Y; ограниченное изометрическое модульное отображение $R : X \to Y$, проектор $Q : Y \to X$ и "спектральная" мера $\pi : \Sigma(\mathcal{K}) \to \mathcal{U}(Y)$ такие, что $\nu(M) = Q\pi(M)R$, где $M \in \Sigma(\mathcal{K})$.

Теорема 3. Пусть G—локально компактная абелева группа, а $\varphi : G \to \mathcal{U}(X)$ есть A-слабо непрерывное отображение с условием $\varphi(l) = 1_X$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) φ является положительно определенным;

(ii) существует единственная операторная мера $\nu : \Sigma(\widehat{G}) \to \mathcal{U}_+(X)$, где $\widehat{G}$ есть группа характеров группы G, что $\varphi(\lambda) = \int_{\widehat{G}} \chi(\lambda)d\nu(\chi)$;

(iii) существует гильбертов A-модуль Y; строго непрерывное унитарное представление $u : G \to \mathcal{U}(Y)$, изометрическое вложение $R : X \to Y$ и проектор $Q : Y \to X$ такие, что $\varphi(\lambda) = Qu(\lambda)R$;

(iv) для каждого $x \in X$ функция $\langle x,\varphi(\lambda)x\rangle$ является положительно определенной.

Определение 1. Оператор $C \in \mathcal{U}(X)$ назовем субнормальным, если существует гильбертов A-модуль Y и нормальный оператор $N \in \mathcal{U}(Y)$ такой, что для всех $l,k \in \mathbf{Z}_+$ имеем $C^{*l}C^k = QN^{*l}N^kR$.

Вышеуказанная теорема является обобщением теоремы Б. Брема (см. [6]).

Теорема 4. Пусть $C \in \mathcal{U}(X)$ и $\varphi(\lambda) = \exp(-\bar{\lambda}C^*)\exp(\lambda C)$. Для того, чтобы оператор C был субнормальным, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi :\mathbf{C}\to \mathcal{U}(X)$ был положительно определенным.

Доказательство. Пусть C субнормален и N его нормальное расширение на гильбертов A-модуль Y, т.е. $N \in \mathcal{U}(Y)$, $N^*N = N^*N$ и для всех $l,k \in \mathbf{Z}_+$, $C^{*l}C^k = QN^{*l}N^kR$. Так как $N^lRx = C^lx$, $l \in \mathbf{Z}_+$, то $\exp(\lambda N)Rx = \exp(\lambda C)x$ для $x \in X$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Более того, $\langle x,\varphi(\lambda)x\rangle =$

$= \langle x, \exp(-\bar{\lambda}C^*)\exp(\lambda C)x\rangle = \langle \exp(-\lambda C)x,\ \exp(\lambda C)x\rangle = \langle \exp(-\lambda N)Rx,$ $\exp(\lambda N)Rx\rangle = \langle \exp(\bar{\lambda}N^* - \lambda N)Rx,\ Rx\rangle = \int e^{\lambda\bar{z}-\lambda z} d\langle \pi(z)Rx,\ Rx\rangle$, где $\langle NRx,\ Rx\rangle = \int z d\langle \pi(z)Rx,\ Rx\rangle$.

Пусть $\lambda = \sigma + i\tau$, $z = s + it$. Рассмотрим $\langle x,\ \varphi(\lambda)x\rangle = \int e^{-2i(\tau s+\sigma t)} d\langle \pi(z) Rx, Rx\rangle$, которое является преобразованием Фурье "положительной" меры и поэтому является П.О.

В силу теоремы 3 φ является П.О. отображением в $\mathbf{C}$, так как $\varphi(0) = 1_X$ и φ является A-слабо непрерывным.

Обратно. Предположим, что отображение φ удовлетворяет условию П.О. Так как $\varphi(0) = 1_X$, то опять по теореме 3 существует гильбертов A-модуль Y; унитарное представление $u : \mathbf{C} \to \mathcal{U}(Y)$ такое, что $\varphi(\lambda) = Qu(\lambda)R$, где $R : X \to Y$ есть изометрическое вложение, а $Q : Y \to X$ есть проектор.

Если $\lambda = \sigma + i\tau$, то для каждого $x \in X$, $\psi(\sigma,\tau) = \langle x,\ \varphi(\sigma + i\tau)x\rangle$ есть целая функция экспоненциального типа. Так как

$$\|\langle x, \varphi(\lambda)x\rangle\| = \|\langle \exp(-\lambda C)x, \exp(\lambda C)x\rangle\| \le \|\exp(-\lambda C)\| \cdot$$

$$\cdot \|\exp(\lambda C)\|\ \|x\|^2 \le e^{2|\lambda|\ \|C\|}\|x\|^2 \le e^{2(|\sigma|+|\tau|)\|C\|}\|x\|^2,$$

то

$$\varlimsup_{\sigma,\tau\to\infty} \frac{\ln \|\langle x, \varphi(\sigma + i\tau)x\rangle\|}{|\sigma| + |\tau|} \le 2\|C\|_X.$$

Следовательно, по теореме Шварца (см. [7]), мера ν_x, для которой $\langle x,$ $\varphi(\lambda)x\rangle$ является преобразованием Фурье, имеет носитель, который находится в квадрате $\mathcal{F} = \{z = s + it \in \mathbf{C}\colon |s| \le 2\|C\|_X,\ |t| \le 2\|C\|_X\}$ для каждого $x \in X$. Отсюда следует, что носитель операторной меры ν, для которой φ является "преобразованием" Фурье, т.е. для которой $\varphi(\lambda) = \int e^{-i(\sigma s+\tau t)} d\nu(z)$, содержится в $\mathcal{F}$.

Если теперь смотреть на $\mathcal{F}$ как на пространство с мерой, на котором определена ν, то, по теореме 2, $\nu(M) = Q\pi(M)R$, где $\pi : \Sigma(\mathcal{F}) \to \mathcal{U}(Y)$—"спектральная" мера.

Тогда для унитарного представления u, связанного с φ связкой $\varphi(\lambda) = Qu(\lambda)R$, мы имеем $u(\lambda) = \int e^{-i(\sigma s+t\tau)} d\pi(z)$, где $\pi(\mathbf{C}\backslash\mathcal{F}) = 0$. Пусть $H = \int t d\pi(z)$, $K = \int s d\pi(z)$, тогда $H, K \in \mathcal{U}(Y)$, $[H,K] = HK - KH = 0$ и $u(\lambda) = \exp[-i(\sigma K + \tau H)]$. Поскольку $\varphi(\lambda) = \exp(-\bar{\lambda}C^*)\exp(\lambda C) = 1_X + (\lambda C - \bar{\lambda}C^*) + \frac{1}{2}(\bar{\lambda}^2 C^{*2} - 2|\lambda|^2 C^* C + \lambda^2 C^2) + \cdots$ и $u(\lambda) = \exp[-i(\sigma K + \tau H)] = 1_Y - i(\sigma K + \tau H) - \frac{1}{2}(\sigma^2 K^2 + 2\sigma\tau HK + \tau^2 H^2) + \cdots$ и $\varphi(\lambda) = Qu(\lambda)R$ для всех $\lambda = \sigma + i\tau$, то имеем

$$\begin{cases} C - C^* = -iQKR \\ C + C^* = -iQHR \end{cases}, \tag{2}$$

$$\begin{cases} -C^{*2} + 2C^*C - C^2 = QK^2R \\ C^{*2} + 2C^*C + C^2 = QH^2R \end{cases} \tag{3}$$

и т.д.

Складывая соотношения в (2) и соответственно в (3), получаем $-2C = Q(H + iK)R$ и $4C^*C = Q(H^2 + K^2)R = Q(H - iK)(H + iK)R$. Если $H_1 = -H/2$, $K_1 = -K/2$ и $N = H_1 + iK_1$, то $C = QNR$, $C^* = QN^*R$, $C^*C = QN^*NR$ и т.д.

Таким образом, сравнивая соответствующие коэффициенты, мы при помощи алгебраических действий получаем необходимые соотношения. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим частный случай вышеуказанной схемы, связанной с дилатационной теоремой 1 (см. [1]). Пусть A есть C^*-алгебра с единицей, тогда A сам есть гильбертов A-модуль с A-значным скалярным произведением $\langle x, y\rangle = y^*x$, $x, y \in X$.

Пусть $\mathcal{U}(A) = \{\mathcal{L}_x : x \in A$, где $\mathcal{L}_x(y) = xy$, $y \in A\}$. Очевидно, что $\|\mathcal{L}_x\| = \|x\|$ и отображение $\mathcal{L} : A \to \mathcal{U}(A)$ есть $*$-изоморфизм. Отметим, что если Γ есть $*$-алгебра и $\theta : \Gamma \to A$ есть вполне положительное отображение (см. Pashke [1]), то отображение $\psi : \Gamma \to \mathcal{U}(A)$, определенное по формуле $\psi(\xi) = \mathcal{L}_{\theta(\xi)}$, является (П.О.). Так как $\mathcal{U}(X)$ есть C^*-алгебра с единицей, то $\mathcal{U}(X)$ есть гильбертов $\mathcal{U}(X)$-модуль, как выше. Для П.О. отображения $\varphi : \Gamma \to \mathcal{U}(X)$ определим отображение $\Phi : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathcal{U}(X))$ по формуле $\Phi(\xi) = \mathcal{L}_{\varphi}(\xi)$, $\xi \in \Gamma$.

Пользуясь теоремой 1, получаем следующий известный вариант (см. [2,4]) дилатационной теоремы.

Теорема 1'. Пусть $\varphi : \Gamma \to \mathcal{U}(X)$ удовлетворяет условиям П.О.и У.О. Тогда существует гильбертов $\mathcal{U}(X)$-модуль Y; представление $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(Y)$ и элемент $z \in Y$ такие, что $\varphi(\xi) = \langle \pi(\xi)z, z\rangle$, $\xi \in \Gamma$. Более того, если $f(\xi) = \pi(\xi)z$, тогда $\varphi(\eta^*\xi) = \langle f(\xi), f(\eta)\rangle$ и линейная оболочка $\{f(\xi) \circ a : \xi \in \Gamma, a \in \mathcal{U}(X)\}$ всюду плотна в Y.

Если $x, y \in X$, то они порождают элемент $x \otimes y \in \mathcal{U}(X)$, который действует по формуле $(x \otimes y)(w) = x\langle w, y\rangle$, $w \in X$.

Пусть $z = R1_X$ обозначим $p = z \otimes z$, тогда $\langle z, z\rangle = \langle \pi(\varepsilon)z, z\rangle = \varphi(\varepsilon) = 1_X$ и $p \in \mathcal{U}(Y)$ есть проектор.

Рассмотрим отображение $j(a) = (z \circ a) \otimes z$, $a \in \mathcal{U}(X)$, тогда j есть $*$-изоморфизм $\mathcal{U}(X)$ на $p\mathcal{U}(Y)p$ и для каждого $\xi \in \Gamma$

$$j\varphi(\xi) = (z \circ \varphi(\xi)) \otimes z = p\pi(\xi)p.$$

Следствие 1. Пусть отображение $\varphi : \Gamma \to \mathcal{U}(Y)$ удовлетворяет условиям П.О. и У.О. и $\varphi(\varepsilon) = 1_X$. Тогда существует гильбертов $\mathcal{U}(X)$-модуль Y; проектор $p \in \mathcal{U}(Y)$, представление $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(Y)$ и $*$-изоморфизм $j : \mathcal{U}(X) \to p\mathcal{U}(Y)p$ такие, что $j\varphi(\xi) = p\pi(\xi)p$, $\xi \in \Gamma$, причем линейная оболочка $\{\pi(\xi)a : \xi \in \Gamma, a \in \mathcal{U}(X)\}$ всюду плотна в Y.

Определение 2. Оператор $C \in \mathcal{U}(X)$ назовем субнормальным, если существует гильбертов $\mathcal{U}(X)$-модуль Y, нормальный оператор $N \in \mathcal{U}(Y)$ такой, что для всех $l, k \in \mathbf{Z}_+$ имеем $jC^{*l}C^k = pN^{*l}N^kp$.

Используя теорему 1 и соответствующие теоремам 2 и 3 результаты, получаем следующий результат.

Теорема 4'. Пусть $C \in \mathcal{U}(X)$ и $\varphi(\lambda) = \exp(-\bar{\lambda}C^*)\exp(\lambda C)$. Для того, чтобы оператор C был субнормальным в смысле определения 2, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi : \mathbf{C} \to \mathcal{U}(X)$ удовлетворял условию (П.О.).

Используя теорему 4', получаем.

Следствие 2. Пусть A есть C^*-алгебра с единицей и элемент $c \in A$ такой, что функция $\varphi(\lambda) = \exp(-\bar{\lambda}C^*)\exp(\lambda C)$ является вполне положительно определенным отображением $\mathbf{C}$ в A. Тогда существуют C^*-алгебра $\mathcal{B}$, содержащая A, нормальный элемент $n \in \mathcal{B}$, проектор $p \in \mathcal{B}$ такой, что для всех $l, k \in \mathbf{Z}_+$, $c^{*l}c^k = pn^{*l}n^kp$.

Кафедра дифференциальных уравнений

Поступила 19.03.1991

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pashke W.L.** Inner product modules over B^*-algebras.— Trans.of the Amer. Math. Soc., 1973, v.182, pp.443-468.
2. **Itou S.** A note on dilations in modules over C^*-algebras.— J.London Math.Soc., 1980, v.(2), 22, pp.117-126.
3. **Секефальви-Надь Б.** Продолжение операторов в гильбертовом пространстве с выходом из пространства.—Математика: Периодич.сб.переводов иностр.статей. М.:Мир, 1965, т.9, N6.
4. **Наймарк М.А.** Нормированные кольца.—М.:Наука, 1968.
5. **Neumark M.A.** On representation of additive operator set functions.— DAN SSSR, 1943, v.41, pp.359-361.
6. **Bram J.** Subnormal operators.—Trans.of the Amer.Math.Soc., 1954, v.11, pp.75-94.
7. **Shwartz L.** Theorie des distributions. T.2, Actualités Scientifiques et Industrielles, Paris, 1955,v.122.

Մ.Ի.ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

C^* - ՀԱՆՐԱՀԱՇՎՈՒՄ ՍՈՒԲՆՈՐՄԱԼ ՏԱՐՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում, ելնելով դիլատացիոն թեորեմից, որը գործում է հիլբերտյան մոդուլներում, մտց վում է սուբնորմալ տարրի գաղափարը և տրվում է նրա բնութագիրը դրական որոշելիության լեզվով:

M.I. KARAKHANIAN

ON THE SUBNORMAL ELEMENTS IN C^*-ALGEBRAS

S u m m a r y

The subnormal element concept is introduced in C^*-algebra and characterised in terms of positive definition based on the dilatation theoreme holding on the Hilbert A-modules.