

О РЕГУЛЯРНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ КОНУСАХ

Р. А. ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *khachatryan.rafik@gmail.com*

Аннотация. В статье приведено достаточное условие, при котором пересечение регулярных касательных конусов является касательным конусом. Построены регулярные касательные конусы и шатры для множеств, задаваемых локально липшицевыми функциями. Конусы описываются в терминах K -обобщенных производных.

MSC2010 number: 26E25; 49J52; 46J05.

Ключевые слова: субдифференциал; шатер; касательный конус.

1. КАСАТЕЛЬНЫЕ КОНУСЫ

В работах (см. [3], [5] - [7]) исследуются наиболее известные в литературе различные типы касательных конусов (контингентный, нижний, касательный конус Кларка) как для выпуклых, так и для невыпуклых множеств. Это вызвано тем, что если некоторый из этих типов конусов оказывается выпуклым, то это позволяет изучать невыпуклые экстремальные задачи методами выпуклого анализа [3, 5, 7].

В работе [6] Е. С. Половинкиным определены и изучены другие асимптотические касательные конусы к невыпуклым множествам. В частности, введено понятие регулярного касательного конуса, развивающее понятия шатра Болтянского [1, 2].

В настоящей статье с помощью понятия регулярного касательного конуса введено понятие K - обобщенной производной локально липшицевой функции. В этих терминах построены выпуклые касательные конусы к множествам, задаваемым ограничениями типа равенств и неравенств. Сформулированы необходимые условия экстремума в негладких экстремальных задачах.

В дальнейшем $\langle a, b \rangle$ – скалярное произведение векторов $a, b \in R^n$. $A \overset{\bullet}{-} B \equiv \{x \in R^n / x + B \subseteq A\}$ – геометрическая разность множеств A и B (см. [4]).

В [4] (гл. 3, п. 24, лемма 24.3) доказано, что для всякого замкнутого конуса K множество $K \overset{\bullet}{-} K$ является его выпуклым замкнутым подконусом.

Определение 1.1. [6]. Нижним касательным конусом ко множеству M в точке $x_0 \in M$ называется множество вида

$$T_M(x_0) := \{\bar{x} \in R^n : \lim_{\lambda \downarrow 0} d(\bar{x}, \lambda^{-1}(M - x_0)) = 0\}.$$

Иными словами, $\bar{x} \in T_M(x_0)$ в том и только в том случае, если для любой последовательности положительных чисел $\{\lambda_k\}$, сходящихся к нулю, найдется последовательность точек $\{\bar{x}_k\}$, сходящаяся к точке \bar{x} , и такая, что справедливо включение $x_0 + \lambda_k \bar{x}_k \in M$ для любого $k \in N$.

Определение 1.2 (6). Пусть $f : R^n \rightarrow R$ — локально липшицева функция и $M \equiv \text{epi}(f) = \{(\alpha, x) \in R^{n+1} / \alpha \geq f(x)\}$. Пусть $K \subseteq T_M(x_0, f(x_0))$ — выпуклый замкнутый конус, а $f'_K(x_0, \bar{x})$ — положительно однородная выпуклая функция, надграфиком которой является конус K . Функция $f'_K(x_0, \bar{x})$ называется обобщенной K -производной функции f в точке x_0 по направлениям, а K -субдифференциалом функции f в точке x_0 называется множество

$$\partial_K f(x_0) \equiv \{x^* \in R^n : f'_K(x_0, \bar{x}) \geq \langle x^*, \bar{x} \rangle \quad \forall \bar{x} \in R^n\}.$$

Если $K = T_M(x_0, f(x_0)) \overset{\bullet}{-} T_M(x_0, f(x_0))$, то обозначим $f'_K(x_0, \bar{x}) = f'_{AL}(x_0, \bar{x})$. Тогда $\partial_K f(x_0)$ называется нижним асимптотическим субдифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается через $\partial_{AL} f(x_0)$ (см. [6]).

Определение 1.3. [8]. Обобщенная производная Мишеля-Пено функции f по направлению \bar{x} , обозначаемая $f'_{MP}(x_0, \bar{x})$, определяется так:

$$f'_{MP}(x_0, \bar{x}) = \sup_{w \in R^n} \{ \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda(\bar{x} + w)) - f(x_0 + \lambda w)}{\lambda} \}.$$

Определение 1.4. [8]. Субдифференциалом Мишеля-Пено для локально липшицевой функции f в точке x_0 называется множество

$$\partial_{MP} f(x_0) = \{x^* \in R^n / f'_{MP}(x_0, \bar{x}) \geq \langle x^*, \bar{x} \rangle \quad \forall \bar{x} \in R^n\}.$$

Определение 1.5. [7]. Пусть $f(x)$ — произвольная функция. Положим

$$F(x_0, \bar{x}) = \lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, \lambda \downarrow 0} \sup \frac{f(x_0 + \lambda \bar{y}) - f(x_0)}{\lambda}.$$

Положительно однородная выпуклая, замкнутая по \bar{x} функция $h(x_0, \bar{x})$ называется верхней выпуклой аппроксимацией функции f в точке x_0 , если

$$h(x_0, \bar{x}) \geq F(x_0, \bar{x}), \quad \bar{x} \in R^n.$$

Отметим, что обобщенная производная $f'_C(x_0, \bar{x})$ Ф. Кларка (см. [3], гл. 1, п.2.1) и производная $f'_{MP}(x_0, \bar{x})$ Мишеля- Пено являются верхними выпуклыми аппроксимациями локально липшицевой функции f в точке x_0 .

Определение 1.6. [7]. *Выпуклый конус $K_M(x_0)$ называется конусом касательных направлений множества M в точке x_0 , если из включения $\bar{x} \in K_M(x_0)$ следует, что существует такая функция $\varphi(\lambda)$, что*

$$x_0 + \lambda\bar{x} + \varphi(\lambda) \in M$$

при достаточно малых $\lambda \geq 0$ и $\lambda^{-1}\varphi(\lambda) \rightarrow 0$, когда $\lambda \downarrow 0$.

Определение 1.7. [6]. *Выпуклый замкнутый конус $K \subseteq T_M(x_0)$ называется регулярным касательным конусом ко множеству M в точке x_0 , если существуют числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и отображение $\varphi(\cdot, \cdot) : (0, \delta_1] \times (K \cap B_{\delta_2}(0)) \rightarrow R^n$ такие, что*

$$x_0 + \lambda\bar{x} + \varphi(\lambda, \bar{x}) \in M \quad \forall \lambda \in (0, \delta_1], \quad \bar{x} \in K \cap B_{\delta_2}(0),$$

а для функции

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \sup\{\lambda^{-1}\|\varphi(\lambda, \bar{x})\| : \bar{x} \in K \cap B_{\delta_2}(0)\}$$

справедливо равенство $\lim_{\lambda \downarrow 0} \tilde{\varphi}(\lambda) = 0$. Кроме этого, если при любом $\lambda \in (0, \delta_1]$ отображение $\varphi(\lambda, \cdot)$ непрерывно на $K \cap B_{\delta_2}(0)$, то K называется непрерывным регулярным конусом.

Определение 1.8. [1]. *Выпуклый конус $K \subseteq T_M(x_0)$ называется шатром множества M в точке $x_0 \in M$, если существует отображение r , определенное в некоторой окрестности $B_\delta(0)$ нуля, такое, что*

$$x_0 + \bar{x} + r(\bar{x}) \in M, \quad \text{если } \bar{x} \in K \cap B_\delta(0) \text{ и } \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0 \text{ при } \bar{x} \rightarrow 0.$$

Очевидно, что если K – шатер, то он и регулярный касательный конус.

Предложение 1.1. Пусть $f(x)$ — липшицева функция в окрестности $B_\delta(x_0)$ точки x_0 . Тогда существует такая непрерывная функция $r(\bar{x}) \geq 0$, определенная в окрестности $B_\delta(0)$ нуля такая, что

$$(1.1) \quad f(x_0 + \bar{x}) \leq f(x_0) + f'_{AL}(x_0, \bar{x}) + r(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in B_\delta(0),$$

причем $\lim_{\bar{x} \rightarrow 0} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} = 0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $f'_{AL}(x_0, \bar{x})$ является верхней выпуклой аппроксимацией функции $f(x)$ в точке x_0 , поскольку тогда неравенство (1.1) непосредственно следует из леммы 3.5 [7] (гл. 5, п.3). В [6] показано следующее представление:

$$f'_{AL}(x_0, \bar{x}) = \sup_{w \in R^n} \{f'_L(x_0, \bar{x} + w) - f'_L(x_0, w)\},$$

где

$$f'_L(x_0, u) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)}{\lambda}.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} & \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda \bar{x}) - f(x_0)}{\lambda} = \\ & = \lim_{\bar{y} \rightarrow \bar{x}, \lambda \downarrow 0} \sup \frac{f(x_0 + \lambda \bar{y}) - f(x_0)}{\lambda} = F(x_0, \bar{x}) \leq f'_{AL}(x_0, \bar{x}) = h(x_0, \bar{x}). \end{aligned}$$

Предложение 1.2. [6] (см. теорема 25.2, гл. 3, п. 25). Пусть $f(x)$ липшицева функция в некоторой окрестности $B_\delta(0)$ точки x_0 , а $f'_K(x_0, \bar{x})$ — некоторая ее обобщенная K -производная в точке x_0 .

Тогда

(1) существует функция $r(\cdot, \cdot) : (0, \delta] \times B_1(0) \rightarrow R_+$ такая, что

$$(1.2) \quad f(x_0 + \lambda \bar{x}) \leq f(x_0) + \lambda f'_K(x_0, \bar{x}) + r(\lambda, \bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in B_1(0), \lambda \in (0, \delta].$$

(2) При фиксированном $\lambda \in (0, \delta]$ функция $r(\lambda, \cdot)$ непрерывна на $B_1(0)$.

(3) Для функции $\tilde{r}(\lambda) = \sup\{\lambda^{-1}r(\lambda, \bar{x}) : \bar{x} \in B_1(0)\}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \tilde{r}(\lambda) = 0.$$

Теорема 1.1. Пусть x_0 — точка минимума локально липшицевой функции $f(x)$ на множестве M . Пусть $\partial_K f(x_0)$ — K -субдифференциал функции f , а $K_M(x_0)$ —

выпуклый конус касательных направлений для M в точке x_0 . Тогда

$$\partial_K f(x_0) \cap K_M^*(x_0) \neq \emptyset,$$

где $K_M^*(x_0) = \{x^* \in R^n : \langle x^*, \bar{x} \rangle \geq 0 \forall \bar{x} \in K_M(x_0)\}$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда согласно теореме отделимости выпуклых множеств существует вектор $e \neq 0$, $\|e\| < 1$ такой, что

$$f'_K(x_0, e) < 0, \quad e \in K_M(x_0).$$

Тогда существует функция $\varphi(\lambda, e) = o(\lambda)$ такая, что

$$x_0 + \lambda e + \varphi(\lambda, e) \in M \text{ при малых } \lambda > 0.$$

Так как существует число $C > 0$ такое, что

$$\|f'_K(x_0, \bar{x})\| \leq C\|\bar{x}\| \quad \forall \bar{x} \in R^n,$$

то в силу неравенства (1.2), для достаточно малых $\lambda > 0$ имеем

$$\begin{aligned} f(x_0 + \lambda e + \varphi(\lambda, e)) &\leq f(x_0) + \lambda[f'_K(x_0, e + \frac{\varphi(\lambda, e)}{\lambda}) + \frac{r(\lambda, e + \frac{\varphi(\lambda, e)}{\lambda})}{\lambda}] \leq \\ &\leq f(x_0) + \lambda[f'_K(x_0, e) + \frac{C\|\varphi(\lambda, e)\|}{\lambda} + \sup_{u \in B_1(0)} \frac{r(\lambda, u)}{\lambda}] < f(x_0). \end{aligned}$$

Это противоречие, поскольку x_0 — точка минимума функции f на M . \square

В дальнейшем нам понадобится следующий результат.

Предложение 1.3. [10]. Пусть $a : R^n \rightarrow 2^{R^m}$ многозначное отображение, графиком которого является такой выпуклый замкнутый конус, что $\text{dom}(a) = R^n$. Тогда существует положительно однородное и липшицево отображение $P : R^n \rightarrow R^m$ такое, что $P(x) \in a(x) \quad \forall x \in R^n$.

2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ КОНУСОВ

Теорема 2.1. (о пересечении регулярных касательных конусов). Пусть выпуклые замкнутые конусы K_1 и K_2 являются непрерывными регулярными конусами касательных направлений соответственно для множеств $M_1 \subseteq R^n$ и $M_2 \subseteq R^n$ в точке $x_0 \in M_1 \cap M_2$. Предположим также, что $K_1 - K_2 = R^n$. Тогда конус $Q \equiv K_1 \cap K_2$ является регулярным касательным конусом к множеству $M \equiv M_1 \cap M_2$ в точке x_0 .

Доказательство. Сначала покажем, что существуют положительно однородные и липшицевые отображения $P_1 : R^n \rightarrow K_1$, $P_2 : R^n \rightarrow K_2$ такие, что для любого $x \in R^n$ имеет место равенство

$$(2.1) \quad x = P_1(x) - P_2(x)$$

Положим

$$a(x) := \{y \in K_1 : (y - x) \in K_2\}.$$

Поскольку $R^n = K_1 - K_2$, то график многозначного отображения a является выпуклый замкнутый конус и $dom(a) = R^n$. Поэтому, согласно предложению 1.3 существует положительно однородное и липшицевое отображение $P_1 : R^n \rightarrow K_1$ такое, что

$$P_1(x) \in a(x), \quad \|P_1(x)\| \leq C_1 \|x\|, \quad x \in R^n,$$

где C_1 — некоторое число. Положим $P_2(x) = P_1(x) - x$ и заметим, что

$$P_2(x) \in K_2, \quad \|P_2(x)\| \leq (C_1 + 1)\|x\| \leq C_2 \|\bar{x}\| \quad \forall x \in R^n,$$

где $C_2 = C_1 + 1$. Поскольку K_1 и K_2 являются непрерывными регулярными конусами, то существуют такие отображения

$$(2.2) \quad \Psi_i(\lambda, \bar{x}) = x_0 + \lambda \bar{x} + \varphi_i(\lambda, \bar{x}), \quad i = 1, 2,$$

что $\Psi_i(\lambda, \bar{x}) \in M_i \quad \forall \bar{x} \in Q \cap B_1(0)$, $\lambda \in (0, 1]$, где φ_i ($i = 1, 2$) удовлетворяют условиям определения непрерывного регулярного конуса 1.5. Не нарушая общности, предположим также, что для обоих конусов (см. определения 1.7) $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Теперь при фиксированном $\bar{x} \in Q$ рассмотрим систему уравнений, записав ее в векторной форме:

$$(2.3) \quad g(\bar{x}, \lambda, y) = \Psi_1(\lambda, \bar{x} + P_1(\frac{y}{\lambda})) - \Psi_2(\lambda, \bar{x} + P_2(\frac{y}{\lambda})) = 0.$$

Используя (2.2), уравнение (2.3) можно переписать в виде:

$$g(\bar{x}, \lambda, y) = y + \varphi_1(\lambda, \bar{x} + P_1(\frac{y}{\lambda})) - \varphi_2(\lambda, \bar{x} + P_2(\frac{y}{\lambda})) = 0.$$

Фиксируем $\bar{x} \in Q$ и рассмотрим на шаре $\|y\| \leq \lambda/(2C_2)$ отображение

$$\Phi(\bar{x}, \lambda, y) \equiv \varphi_2(\lambda, \bar{x} + P_2(\frac{y}{\lambda})) - \varphi_1(\lambda, \bar{x} + P_1(\frac{y}{\lambda})).$$

При любых фиксированных λ и \bar{x} отображение $\Phi(\bar{x}, \lambda, \cdot)$ является непрерывным оператором, поскольку таковыми являются отображения $\varphi_1(\lambda, \cdot)$, $\varphi_2(\lambda, \cdot)$, P_1 , P_2 .

Покажем, что при достаточно малых λ отображение $\Phi(\bar{x}, \lambda, \cdot)$ имеет неподвижную точку на некотором шаре с центром в точке ноль. Пусть теперь $\|\bar{x}\| \leq 1/2$ и $\|y\| \leq \lambda/(2C_2)$. Тогда

$$\|\bar{x} + P_i\left(\frac{y}{\lambda}\right)\| \leq 1, \quad i = 1, 2.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\|\varphi_2(\lambda, \bar{x} + P_2(\frac{y}{\lambda})) - \varphi_1(\lambda, \bar{x} + P_1(\frac{y}{\lambda}))\|}{\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2}} \leq \\ & \leq \frac{\|\varphi_2(\lambda, \bar{x} + P_2(\frac{y}{\lambda}))\|}{\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2}} + \frac{\|\varphi_1(\lambda, \bar{x} + P_1(\frac{y}{\lambda}))\|}{\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2}} \leq \\ & \leq \sup_{u \in Q \cap B_1(0)} \frac{\|\varphi_1(\lambda, u)\|}{\lambda} + \sup_{u \in Q \cap B_1(0)} \frac{\|\varphi_2(\lambda, u)\|}{\lambda} = \tilde{\varphi}_1(\lambda) + \tilde{\varphi}_2(\lambda) \equiv \tilde{q}(\lambda). \end{aligned}$$

Из определения 1.5, следует, что $\tilde{q}(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Таким образом, доказано, что

$$\|\Phi(\bar{x}, \lambda, y)\| \leq \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2}.$$

Положим

$$\tau(\lambda) = \inf\{\tau > 0 : \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \tau^2} \leq \tau\}.$$

Так как при достаточно малых $\lambda > 0$ имеет место неравенство

$$\tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2} = \sqrt{2}\lambda\tilde{q}(\lambda) \leq \lambda \quad \text{то} \quad \tau(\lambda) \leq \lambda.$$

По определению точной нижней грани для каждого λ существует $\tau^*(\lambda)$ такое, что

$$(2.4) \quad \tau(\lambda) \leq \tau^*(\lambda) \leq \tau(\lambda) + \lambda^2, \quad \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + (\tau^*(\lambda))^2} \leq \tau^*(\lambda).$$

Покажем, что $\frac{\tau^*(\lambda)}{\lambda} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Так как $\tau(\lambda) \leq \lambda$ и $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \alpha + \beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то из определения $\tau(\lambda)$ получаем

$$\tau(\lambda) - \lambda^2 \leq \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + (\tau(\lambda) - \lambda^2)^2} \leq \tilde{q}(\lambda)(\lambda + |\tau(\lambda) - \lambda^2|) \leq 3\lambda\tilde{q}(\lambda).$$

Поэтому $\frac{\tau(\lambda)}{\lambda} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Но тогда из (2.4) следует, что $\frac{\tau^*(\lambda)}{\lambda} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Теперь, если $\|y\| \leq \tau^*(\lambda) \leq \lambda/(2C_2)$, то согласно неравенству (2.4) имеем

$$\|\Phi(\bar{x}, \lambda, y)\| \leq \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \|y\|^2} \leq \tilde{q}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + (\tau^*(\lambda))^2} \leq \tau^*(\lambda).$$

Таким образом, непрерывное отображение $\Phi(\bar{x}, \lambda, \cdot)$ отображает шар $\|y\| \leq \tau^*(\lambda)$ в себя. Значит, по теореме Брауера отображение $\Phi(\bar{x}, \lambda, \cdot)$ имеет неподвижную точку в этом шаре, т.е. существует отображение $y(\lambda, \bar{x})$ такое, что

$$\Phi(\bar{x}, \lambda, y(\lambda, \bar{x})) = y(\lambda, \bar{x}), \quad \|y(\lambda, \bar{x})\| \leq \tau^*(\lambda).$$

Следовательно,

$$\sup_{u \in Q \cap B_{1/2}(0)} \frac{\|y(\lambda, u)\|}{\lambda} \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow 0.$$

Таким образом, $\Phi(\bar{x}, \lambda, y(\lambda, \bar{x})) = y(\lambda, \bar{x})$. Окончательно из (2.3) получим, что для $\bar{x} \in Q$, $\|\bar{x}\| \leq 1/2$ и для достаточно малых $\lambda > 0$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} x_0 + \lambda\bar{x} + P_1(y(\lambda, \bar{x})) + \varphi_1(\lambda, \bar{x} + P_1(\frac{y(\lambda, \bar{x})}{\lambda})) &= \\ &= x_0 + \lambda\bar{x} + P_2(y(\lambda, \bar{x})) + \varphi_2(\lambda, \bar{x} + P_2(\frac{y(\lambda, \bar{x})}{\lambda})). \end{aligned}$$

Поскольку K_1, K_2 — выпуклые конусы, то для малых $\lambda > 0$,

$$(\bar{x} + P_1(\frac{y(\lambda, \bar{x})}{\lambda})) \in K_1 \cap B_1(0), \quad (\bar{x} + P_2(\frac{y(\lambda, \bar{x})}{\lambda})) \in K_2 \cap B_1(0).$$

Поэтому, для малых $\lambda > 0$ имеем

$$\begin{aligned} x_0 + \lambda\bar{x} + P_1(y(\lambda, \bar{x})) + \varphi_1(\lambda, \bar{x} + P_1(\frac{y(\lambda, \bar{x})}{\lambda})) &= \\ &= x_0 + \lambda\bar{x} + P_2(y(\lambda, \bar{x})) + \varphi_2(\lambda, \bar{x} + P_2(\frac{y(\lambda, \bar{x})}{\lambda})) \in M_1 \cap M_2. \end{aligned}$$

Положим

$$\varphi(\lambda, \bar{x}) = P_1(y(\lambda, \bar{x})) + \varphi_1(\lambda, \bar{x} + P_1(\frac{y(\lambda, \bar{x})}{\lambda})).$$

Очевидно, что

$$\sup_{u \in Q \cap B_{1/2}(0)} \frac{\|\varphi(\lambda, u)\|}{\lambda} \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow 0,$$

и если $\bar{x} \in Q \cap B_{1/2}(0)$, то для достаточно малых $\lambda > 0$ справедливо включение

$$x_0 + \lambda\bar{x} + \varphi(\lambda, \bar{x}) \in M. \quad \square$$

Замечание 2.1. Функция $\varphi(\lambda, \cdot)$ может не быть непрерывной, и поэтому Q , вообще говоря, не есть непрерывный регулярный касательный конус к M в точке x_0 .

Замечание 2.2. В [9] построен пример двух замкнутых множеств $M_1 \subseteq R^4$ и $M_2 \subseteq R^4$ и касательных конусов K_1, K_2 , таких, что

1. конус K_1 является шатром к M_1 в точке $0 \in M_1$;
2. K_2 является конусом Кларка для M_2 в точке $0 \in M_2$;
3. $K_1 \cap K_2 \neq \{0\}$, $K_1 - K_2 = R^4$.

Но $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

Это означает, что пересечение двух нижних касательных конусов к двум разным множествам в одной общей точке этих множеств может и не быть нижним касательным конусом пересечения множеств в этой точке.

Теперь построим регулярные конусы касательных направлений и шатры ко множеству вида $M = \{x \in R^n : g(x) \leq 0\}$.

Теорема 2.2. Пусть $g(x)$ — локально липшицева функция и для точки x_0 выполнены следующие условия: $g(x_0) = 0$ и $0 \notin \partial_K g(x_0)$. Положим

$$P_M(x_0) = \{\bar{x} \in R^n : g'_K(x_0, \bar{x}) \leq 0\}.$$

Тогда выпуклый конус $P_M(x_0)$ является регулярным конусом касательных направлений ко множеству M в точке x_0 .

Доказательство. Поскольку $0 \notin \partial_K g(x_0)$, то существует вектор w такой, что $g'_K(x_0, w) < 0$. Не нарушая общности, предположим, что $g'_K(x_0, w) = -1$. Пусть $\gamma > 0$. В силу неравенства 1.2, если $\bar{x} \in P_\Omega(x_0)$, $\|\bar{x}\| \leq 1/2$, $\gamma \leq \|w\|\lambda/2$, то для достаточно малых $\lambda > 0$ имеем

$$\begin{aligned} g(x_0 + \lambda(\bar{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w)) &\leq g(x_0) + \lambda g'_K(x_0, \bar{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w) + r(\lambda, \bar{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w) \leq \\ &\leq -\gamma + r(\lambda, \bar{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w). \end{aligned}$$

Для фиксированных \bar{x} и λ функцию $f(\bar{x}, \lambda, \gamma) = r(\lambda, \bar{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w)$ непрерывна по γ . Покажем, что она имеет неподвижную точку на некотором отрезке $[0, \nu(\lambda)]$, где

$\nu(\lambda) = o(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Имеем $\|\bar{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w\| \leq 1$. Поэтому

$$\frac{r(\lambda, \bar{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w)}{\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}} \leq \frac{r(\lambda, \bar{x} + \frac{\gamma}{\lambda}w)}{\lambda} \leq \sup_{u \in B_1(0)} \frac{r(\lambda, u)}{\lambda} \equiv \tilde{r}(\lambda) \rightarrow 0.$$

Отсюда

$$0 \leq f(\bar{x}, \lambda, \gamma) \leq \tilde{r}(\lambda)\sqrt{\lambda^2 + \gamma^2}.$$

Теперь, проводя доказательство аналогично теореме 2.1, получаем, что существует функция $\gamma(\lambda, \bar{x})$ такая, что $f(\bar{x}, \lambda, \gamma(\lambda, \bar{x})) = \gamma(\lambda, \bar{x})$, причем

$$\sup_{u \in P_\Omega(x_0) \cap B_{1/2}(0)} \frac{\|\gamma(\lambda, u)\|}{\lambda} = o(\lambda).$$

Значит, $g(x_0 + \lambda\bar{x} + \gamma(\lambda, \bar{x})w) \leq 0$. Положим $\varphi(\lambda, \bar{x}) = \gamma(\lambda, \bar{x})w$. Ясно, что

$$\sup_{u \in P_\Omega(x_0) \cap B_{1/2}(0)} \frac{\|\varphi(\lambda, u)\|}{\lambda} = o(\lambda).$$

Теорема 2.2 доказана.

Следствие 2.1. Пусть существуют векторы e_1 и e_2 такие, что

$$(2.5) \quad g'_K(x_0, e_1) < 0, \quad (-g)'_K(x_0, e_2) < 0$$

Тогда выпуклый конус $K_\Omega(x_0) = \{\bar{x} \in R^n : g'_K(x_0, \bar{x}) \leq 0, \quad (-g)'_K(x_0, \bar{x}) \leq 0\}$ является регулярным конусом касательных направлений для множества $\Omega = \{x \in R^n : g(x) = 0\}$ в точке x_0 .

Доказательство. По теореме 2.2 существуют число $\delta > 0$ и отображения $\varphi_1(\lambda, \bar{x})$, $\varphi_2(\lambda, \bar{x})$, удовлетворяющие условиям определения 1.5 и такие, что для $\bar{x} \in K_\Omega(x_0) \cap B_\delta(0)$ и малых $\lambda > 0$ имеют место следующие неравенства:

$$g(x_0 + \lambda\bar{x} + \varphi_1(\lambda, \bar{x})) \leq 0, \quad g(x_0 + \lambda\bar{x} + \varphi_2(\lambda, \bar{x})) \geq 0.$$

Отсюда найдется такое число $\theta(\lambda) \in [0, 1]$, что

$$g(x_0 + \lambda\bar{x} + \theta(\lambda)\varphi_1(\lambda, \bar{x}) + (1 - \theta(\lambda))\varphi_2(\lambda, \bar{x})) = 0.$$

Положив $\varphi(\lambda, \bar{x}) = \theta(\lambda)\varphi_1(\lambda, \bar{x}) + (1 - \theta(\lambda))\varphi_2(\lambda, \bar{x})$, получим $g(x_0 + \lambda\bar{x} + \varphi(\lambda, \bar{x})) = 0$, а также

$$\sup_{u \in K_\Omega(x_0) \cap B_\delta(0)} \frac{\|\varphi(\lambda, u)\|}{\lambda} \equiv \tilde{\varphi}(\lambda) \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow 0. \quad \square$$

Замечание 2.3. Если $g'_K(x_0, \bar{x}) = g'_{MP}(x_0, \bar{x})$, то известно [8], что

$$g'_{MP}(x_0, -\bar{x}) = (-g)'_{MP}(x_0, \bar{x}).$$

Тогда в (2.5) можно выбрать $e_2 = -e_1$. В этом случае подпространство

$$K_\Omega(x_0) = \{\bar{x} \in R^n : g'_{MP}(x_0, \bar{x}) \leq 0, g'_{MP}(x_0, -\bar{x}) \leq 0\}$$

является регулярным касательным конусом к Ω в точке x_0 . Аналогично, используя неравенство (1.1), можно доказать следующий результат.

Теорема 2.3. Пусть g — локально липшицева функция и для точки x_0 выполнены условия $g(x_0) = 0, 0 \notin \partial_{AL}g(x_0)$. Тогда выпуклый конус

$$P_M(x_0) = \{\bar{x} \in R^n : g'_{AL}(x_0, \bar{x}) \leq 0\}$$

является шатром к множеству $M = \{x \in R^n : g(x) \leq 0\}$ в точке x_0 .

3. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ МИНИМУМА В ТЕРМИНАХ K -СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$(3.1) \quad f_0(x) \rightarrow \min, x \in \bigcap_{i=1}^k M_i,$$

где $M_i = \{x \in R^n : f_i(x) \leq 0\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, а f_i ($i = 1, \dots, k$) — локально липшицевы функции.

Теорема 3.1. Пусть x_0 — решение задачи (3.1). Тогда существуют числа $\lambda_0 \geq 0, \lambda_i \geq 0, i \in I(x_0) \equiv \{i \in [1; k] : f_i(x_0) = 0\}$ не равные одновременно нулю, такие, что

$$0 \in \lambda_0 \partial_K f_0(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i \partial_K f_i(x_0),$$

где ∂_K — знак K -субдифференциала.

Доказательство. Предположим противное:

$$0 \notin \lambda_0 \partial_K f_0(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i \partial_K f_i(x_0).$$

Это означает, что существует такой вектор e , что для любых λ_0, λ_i чисел, из которых не все равны нулю, выполняется неравенство

$$\lambda_0 f'_{0K}(x_0, e) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i f'_{iK}(x_0, e) < 0.$$

Отсюда следует, что $f'_{0K}(x_0, e) < 0, f'_{iK}(x_0, e) < 0, i \in I(x_0)$. Согласно предложению 1.2, существуют функции $r_i(\lambda, \bar{x})$ такие, что

$$f_i(x_0 + \lambda \bar{x}) \leq f_i(x_0) + \lambda f'_{iK}(x_0, \bar{x}) + r_i(\lambda, \bar{x}),$$

причем $\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1} r_i(\lambda, \bar{x}) = 0, \forall \bar{x} \in B_1(0)$. Следовательно для достаточно малых $\lambda > 0$ $f_0(x_0 + \lambda e) < f_0(x_0), f_i(x_0 + \lambda e) < f_i(x_0) = 0, i \in I(x_0)$. Таким образом при малых $\lambda > 0$ точка $x_0 + \lambda e$ удовлетворяет всем ограничениям, так как в силу непрерывности $f_i(x)$ для достаточно малых $\lambda > 0$ $f_i(x_0 + \lambda e) < 0, i \notin I(x_0)$, а также $f_0(x_0 + \lambda e) < f_0(x_0)$. Это противоречит тому, что x_0 — решение задачи. \square

Теорема 3.2. Пусть x_0 — точка минимума локально липшицевой функции f на множестве $\Omega = \{x \in R^n : g(x) = 0\}$. Пусть выполнены предположения следствия 2.1. Тогда

$$(3.1) \quad 0 \in \partial_K f(x_0) + cl\{con\partial_K g(x_0) + con\partial_K(-g)(x_0)\}.$$

Здесь $cl\{M\}$ — замыкание множества $M \subseteq R^n$.

Доказательство. Согласно следствию 2.1 $K_\Omega(x_0)$ является конусом касательных направлений к множеству M в точке x_0 . Поэтому, в силу теоремы 1.1 имеем

$$(3.2) \quad \partial_K f(x_0) \cap K_\Omega^*(x_0) \neq \emptyset.$$

Поскольку $K_\Omega^* = cl\{con\partial_K g(x_0) + con\partial_K(-g)(x_0)\}$, то из (3.2) немедленно следует включение (3.1). \square

Следствие 3.1. Если $\partial_K g(x_0) \equiv \partial_{MP} g(x_0)$ и $\partial_K f(x_0) \equiv \partial_{AL} f(x_0)$, то $K_\Omega^*(x_0) = cl\{con\partial_{MP} g(x_0) - con\partial_{MP} g(x_0)\} \equiv Lin\partial_{MP} g(x_0)$, а необходимое условие (3.1) принимает следующий вид $0 \in \partial_{AL} f(x_0) + Lin\partial_{MP} g(x_0)$.

Abstract. The paper contains a sufficient condition for an intersection of regular tangent cones to be a tangent cone. Regular tangent cones and tents for sets given

by locally Lipschitz functions are constructed. The cones are described in terms of generalized K -derivatives.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Г. Болтянский, *Оптимальное Управление Дискретными Системами*, М. Наука (1973).
- [2] В. Г. Болтянский, “Метод шатров в теории экстремальных задач”, *Успехи мат. наук*, **30**, no. 3, 3 – 55 (1975).
- [3] Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Мир, М. (1988).
- [4] Е. С. Половинкин, *Элементы Теории Многозначных Отображений*, М. Изд-во МФТИ (1982).
- [5] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы Выпуклого и Сильно Выпуклого Анализа*, Физматлит, М. (2004).
- [6] Е. С. Половинкин, *Многозначный Анализ и Дифференциальные Включения*, М., Физматлит (2014).
- [7] Б. Н. Пшеничный, *Выпуклый Анализ и Экстремальные Задачи*, М., Наука (1980).
- [8] P. Michel, J.- P. Penot, “Calcul sous-differentiel pour les fonctions lipschitziennes et non lipschitziennes”, *C. R. Acad. Sc. Paris. Ser.I*, **291**, 269 – 272 (1984).
- [9] A. Bressan, “On the intersection of a Clarke cone with a Boltianskii cone”, *SIAM J. Cotrol Optim.*, **45**, no. 6, 2054 – 2064 (2007).
- [10] R. A. Khachatryan, “On set-valued mappings with starlike graphs”, *Journal of Contenporary Matematical Analysis*, **47**, no. 1, 28 – 44 (2012).

Поступила 29 января 2016