ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1992 Естественные науки

Математика

УДК 517.98

С.А.М. ХАССАН

МНОГОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА С ПЕРЕМЕННЫМИ СИМВОЛАМИ

В статье обобщаются результаты работ Р.Л. Шахбагяна [1, 2] по разрешимости интегральных уравнений (1) на случай более широкого класса ядер, а именно устанавливается фредгольмовость исследуемого класса операторов.

1^0. В полупространстве $R^n_+ = \{x \in R^n, x_n > 0\}$ рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\mathcal{K}u \equiv u(x) - \int\limits_{R^n_+} K(x, x-y)u(y)dy = f(x), \quad x \in R^n_+. \tag{1}$$

2^0. В этом n^0 приводятся условия, которым удовлетворяют ядра рассматриваемых операторов.

Пусть функция $K(x,z)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) существует неотрицательная функция $h(z)$, принадлежащая пространству $L_1(R^n)$, такая, что

$$|K(x,z)| \le h(z) \tag{2}$$

для всех $x \in R^n_+$, $z \in R^n$;

б) существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} K(x,z) = K_0(z), \tag{3}$$

где $K_0 \in L_1(R^n)$,

$$1 - \widetilde{K}_0(\xi) \neq 0 \text{ при всех } \xi \in R^n$$

(через $\widetilde{K}_0(\xi)$ обозначено преобразование Фурье функции $K_0(z)$). Предполагается выполненной оценка

$$|K(x,z) - K_0(z)| \le \frac{Ch_1(z)}{|x|^m} \text{ при } |x| \ge l, \tag{4}$$

где $C > 0$—некоторая константа, а

$$h_1(z) = h(z) + |K_0(z)|, \quad m > 0\text{—любое;}$$

в) функция $K(x, z)$ равномерно непрерывна относительно x в метрике пространства $L_1(R^n_+)$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int\limits_{R^n} |K(x+h, z) - K(x, z)|dz < \varepsilon \ \text{ при } \ |h| < \delta;$$

г) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int\limits_{R^n} |K(x, z+h) - K(x, z)|dz < \varepsilon \ \text{ при всех } x \in R^+_n, \ \ |h| < \delta.$$

3^0. Введем функциональные пространства, в которых изучается разрешимость уравнения (1).

Обозначим через $E = E(R^n_+)$ одно из следующих пространств:

$$L^+_p (p \geq 1), \ \ C^0_+ \subset C_+ \subset M^u_+ \subset M^c_+ \subset M_+,$$

где $L^+_p = L_p(R^n_+)$, M_+—пространство, сопряженное к пространству L^+_1, состоящее из всех ограниченных функций, M^c_+ и M^u_+—подпространства пространства M_+. Первое из них состоит из всех непрерывных функций, а второе—из всех равномерно непрерывных функций. C_+ обозначает пространство непрерывных функций, имеющих предел на бесконечности. Подпространство всех функций из C_+, стремящихся к нулю на бесконечности, обозначим через C^0_+.

4^0. В этом пункте будет сформулирован и доказан основной результат статьи.

Теорема. Пусть ядро $K(x, z)$ уравнения (1) удовлетворяет условиям а)–г). Тогда оператор K, действующий в пространстве $E(R^n_+)$, является фредгольмовым оператором.

Доказательство. Для простоты проведем доказательство теоремы в случае пространства $L_p(R^n_+)$ $(p > 1)$, после чего совершенно очевидным становится доказательство теоремы в случае пространства E. Итак, пусть $u \in L_p(R^n_+)$ и $f \in L_p(R^n_+)$. Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$u(x) - \int\limits_{R^n_+} [K(x, x-y) - K_0(x-y)]u(y)dy - \int\limits_{R^n_+} K_0(x-y)u(y)dy = f(x), \ x \in R^n_+. \tag{1*}$$

Введем обозначения

$$A_0 u(x) = \int\limits_{R^n_+} K_0(x-y)u(y)dy,$$

$$A_1 u(x) = \int\limits_{R^n_+} [K(x, x-y) - K_0(x-y)]u(y)dy.$$

Как доказано в работе [2] (теорема 1), оператор $(E - A_0)$ (E—оператор тождественного преобразования), действующий в пространстве $L_p(R^n_+)$, в силу условия б) теоремы обратим.

Рассмотрим оператор

$$A_1u(x) = \int_{R^n_+} K_1(x, x-y)u(y)dy,$$

где $K_1(x,z) = K(x,z) - K_0(z)$. В силу условия б)

$$K_1(x,z) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \longrightarrow \infty.$$

Пусть

$$S_l^+ = \{x \in R^n_+, |x| \le l\}.$$

Обозначим через $\chi(x)$ характеристическую функцию полушара S_l^+, т.е.

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in S_l^+, \\ 0, & x \notin S_l^+. \end{cases}$$

Тогда оператор A_1 очевидно представим в виде

$$A_1u(x) = \chi(x)\int_{R^n_+} K_1(x, x-y)u(y)dy + (1-\chi(x))\int_{R^n_+} K_1(x,x-y)u(y)dy.$$

Обозначим

$$A_1'u(x) = \chi(x)\int_{R^n_+} K_1(x,x-y)u(y)dy, \quad |x| \le l,$$

$$A_1''u(x) = (1-\chi(x))\int_{R^n_+} K_1(x,x-y)u(y)dy, \quad |x| > l.$$

Имеем $A_1u(x) = A_1'u(x) + A_1''u(x)$.

Докажем сначала, что оператор A_1'' имеет малую норму. С этой целью оценим его норму. Имеем

$$\left|A_1''u(x)\right| \le \int_{R^n_+} \left|K_1(x,x-y)\right||u(y)|dy.$$

Поскольку $A_1''u(x) \equiv 0$ при $|x| < l$, то, полагая в неравенстве (4) $m = n + 1/p$, получаем

$$\left|A_1''u(x)\right| \le \frac{C}{|x|^{\frac{n+1}{p}}}\int_{R^n_+} |h_1(x-y)||u(y)|dy,$$

откуда

$$\int_{R^n_+} \left|A_1''u(x)\right|^p dx = \int_{x \notin S_l^+} \left|A_1''u(x)\right|^p dx \le$$

$$\le C^p \int\limits_{x\notin S_l^+} \frac{}{|x|^{n+1}} \int\limits_{R^n_+} |h_1(x-y)||u(y)|dy \quad dx.$$

В силу неравенства Минковского[1] имеем

$$\int\limits_{x\notin S_l^+} \left|A_1''u(x)\right|^p dx \le C^p \left\|h_1\right\|^p_{L_1(R^n_+)} \left\|u\right\|^p_{L_p(R^n_+)} \int\limits_{x\notin S_l^+} \frac{dx}{|x|^{n+1}}.$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует $l_0 > 0$ такое, что

$$\int\limits_{x\notin S_{l_0}^+} \frac{dx}{|x|^{n+1}} < \varepsilon.$$

Тогда

$$\int\limits_{R^n_+} \left|A_1''u(x)\right|^p dx \le \varepsilon C^p \left\|h_1\right\|^p_{L_1(R^n_+)} \left\|u\right\|^p_{L_p(R^n_+)}$$

или

$$\left\{\int\limits_{R^n_+} \left|A_1''u(x)\right|^p dx\right\}^{1/p} \le \varepsilon_1 \|u\|_{L_p(R^n_+)},$$

где обозначено

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^{\frac{1}{p}} C \|h_1\|_{L_1(R^n_+)}.$$

Окончательно получаем, что

$$\|A_1''u\|_{L_p(R^n_+)} \le \varepsilon_1 \|u\|_{L_p(R^n_+)}.$$

Докажем теперь, что оператор A_1' вполне непрерывен в пространстве $L_p(R^n_+)$. Согласно известному критерию (см., напр., [3]) надо доказать, что оператор A_1' переводит ограниченное множество пространства $L_p(R^n_+)$ в равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное множество в $L_p(R^n_+)$.

С этой целью рассмотрим множество функций $\{u(x)\}$, $u \in L_p(R^n_+)$

$$\|u\|_{L_p(R^n_+)} \le M, \qquad (5)$$

где $M > 0$—некоторая константа.

Оценим $A_1'u(x)$. Поскольку $\chi(x) \equiv 0$ при $x \notin S_{l_0}^+$, то, обозначив $K_2(z) = \max\limits_{x\in S_l^+} |K_1(x,z)|$, имеем

$$\left|A_1'u(x)\right| \le \int\limits_{R^n_+} K_2(x-y)|u(y)|dy,$$

откуда, применяя вновь неравенства Минковского, получим

$$\|A_1'u\|_{L_p(R^n_+)} \le \|K_2\|_{L_1(R^n)} \|u\|_{L_p(R^n_+)} \le \|K_2\|_{L_1(R^n)} \cdot M = M_1,$$

[1] Имеется в виду следующее неравенство: если $f \in L_1$, $g \in L_p$, то $\|f * g\|_{L_p} \le \|f\|_{L_1}\|g\|_{L_p}$.

и равномерная ограниченность семейства $\{A_1 u\}$ доказана.

Перейдем к доказательству равностепенной непрерывности множества $\{A'_1 u\}$.

С этой целью рассмотрим разность

$$v(x+h) - v(x) = A'_1 u(x+h) - A'_1 u(x) =$$

$$= \chi(x) \int_{R^n_+} [K_1(x+h, x+h-y) - K_1(x, x-y)] u(y) dy.$$

Преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$v(x+h) - v(x) = \chi(x) \int_{R^n_+} [K_1(x+h, x+h-y) - K_1(x, x+h-y)] u(y) dy +$$

$$+ \chi(x) \int_{R^n_+} [K_1(x, x+h-y) - K_1(x, x-y)] u(y) dy = J_1(x) + J_2(x), \quad (6)$$

$$|J_1(x)| \leq \int_{R^n_+} |K_1(x+h, x+h-y) - K_1(x, x+h-y)| |u(y)| dy \leq$$

$$\leq \int_{R^n_+} |K_1(x+h, z) - K_1(x, z)| |u(x+h-z)| dz \leq$$

$$\leq \int_{R^n_+} |K_1(x+h, z) - K_1(x, z)| |u(x+h-z)| dz. \quad (7)$$

Из (7) в силу условия в) и неравенства (5) легко следует оценка

$$\|J_1\|_{L_p(R^n_+)} \leq \varepsilon \|u\|_{L_p(R^n_+)} \leq \varepsilon M \quad (8)$$

при $|h| < \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$.

Наконец оценим $J_2(x)$. Имеем

$$|J_2(x)| \leq \int_{R^n_+} |K_1(x, x+h-y) - K_1(x, x-y)| |u(y)| dy \leq$$

$$\leq \int_{R^n_+} |K_1(x, z+h) - K_1(x, z)| |u(x-z)| dz. \quad (9)$$

Отсюда в силу условия г) теоремы

$$\|J_2(x)\|_{L_p(S_l^+)} \leq \int_{R^n} |K(x, z+h) - K(x, z)| \, \|u\|_{L_p(R^n_+)} dz \leq$$

$$\leq \varepsilon \|u\|_{L_p(R^n_+)} \leq \varepsilon M \quad (10)$$

при $|h| < \delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$. Если теперь взять в качестве $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, то при $|h| < \delta = \delta(\varepsilon)$ из (8) и (10) получим

$$\|v(x+h) - v(x)\|_{L_p(S^+_{l_0})} \leq 2\varepsilon M = \varepsilon_1,$$

что свидетельствует о том, что семейство функций $\{v(x) = A'_1 u(x)\}$ равностепенно непрерывно. Таким образом, мы доказали, что оператор A'_1, действующий в пространстве $L_p(R^n_+)$, вполне непрерывен.

Таким образом, мы получим, что оператор $\mathcal{K}$ представим в виде суммы обратимого, вполне непрерывного и оператора, имеющего достаточно малую норму, откуда в силу известной теоремы И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна [4] следует, что оператор $\mathcal{K}$ фредгольмов.

Теорема доказана.

Следствие. Индекс оператора $\mathcal{K}$ равен нулю.

Кафедра теории оптимального управления и приближенных методов ЕГУ *Поступила 17.12.1990*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шахбагян Р.Л.** Интегральные уравнения в полупространстве.—ДАН Арм. ССР, 1966, т.X, N1, с.9-14.
2. **Шахбагян Р.Л.** Интегральные уравнения в свертках с переменным символом.—ИАН Арм. ССР, сер.матем., 1968, т.3, N1, с.52-57.
3. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа.—М., 1951.
4. **Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.** Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов.—МН, т.XIII, 1958, вып.2(80), с.3-72.

Ս.Ա.Մ.ՀԱՍԱՆ

ՎԻՆԵՐ - ՀՈՊՖԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՍԻՄՎՈԼՆԵՐՈՎ ԲԱԶՄԱՉԱՓ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածը նվիրված է փոփոխական սիմվոլներով բազմաչափ Վիներ - Հոպֆի ինտեգրալ հավասարումների մի դասի հետազոտմանը:

Բավական ընդհանուր պայմանների դեպքում, որոնք դրված են ուսումնասիրվող օպերատորների կորիզների վրա, ապացուցվում է նրանց ֆրեդհոլմությունը մի շարք ֆունկցիոնալ տարածություններում:

S.A.M. HASSAN

WEENER-HOPF MULTIDIMENSIONAL EQUATIONS WITH VARIABLE SYMBOLS

Summary

The article is devoted to the research of a class of multipoly-dimensional equations of Weener-Hopf: at general assumtions imposed on the kernel of operators in question, their Friedholmity in the row of functional spaces is proved.