НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Труды IV международной конференции
21-26 сентября 2015, Цахкадзор, Армения

ЕРЕВАН – 2015

УДК 531.534:06
ББК 22.2
А 437

Институт механики НАН РА
Институт проблем механики им А.Ю.Ишлинского РАН
Национальный комитет по теоретической и прикладной механики Армении
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Национальный университет архитектуры и строительства Армении

А 437 АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ: Труды IV международной конференции, 21-26 сентября 2015, Цахкадзор, Армения. – Ер.: Национальный университет архитектуры и строительства Армении, 2015.-528 с.

В сборник включены доклады, представленные на IV-ую международную конференцию «Актуальные проблемы механики сплошной среды».

УДК 531.534:06
ББК 22.2

ISBN 978-9939-63-259-9

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՀՈԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ԱՐԴԻ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԸ

IV միջազգային գիտաժողովի նյութեր
21-26 սեպտեմբերի 2015թ., Ծաղկաձոր, Հայաստան

ԵՐԵՎԱՆ – 2015

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
INSTITUTE OF MECHANICS

TOPICAL PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS

Proceedings of IV International Conference
21-26 September 2015, Tsakhkadzor, Armenia

YEREVAN – 2015

ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ СДВИГА НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В СОСТАВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Григорян Э.Х., Агаян К.Л., Джилавян С.А., Казарян А.А.

Рассматривается задача дифракции поверхностной электроупругой волны сдвига в пространстве, состоящем из диэлектрического и пьезоэлектрического полупространств. Между двумя полупространствами существует полубесконечная трещина, а на остальной части контактной плоскости имеют место условия полного электромеханичес-кого контакта. Используя интегральное преобразование Фурье, задача дифракции распространяющейся волны сводится к решению функционального уравнения типа Римана на действительной оси, которое решается методом факторизации. Дифракция поверхностной электроупругой сдвиговой волны на полубесконечной трещине приводит к распространению локализованных волн, обусловленных пьезоэффектом и наличием полубесконечной трещины.

Составное электроупругое пространство отнесено к прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, при этом, среда, обладающая свойством пьезоэффекта, занимает полупространство $y>0$, а упругая диэлектрическая среда – полупространство $y<0$. Пьезоэлектрическое полупространство-пьезоэлектрик гексагональной симметрии класса 6mm с совпадающей с осью Oz главной осью кристалла, в плоскости Oxz при $x<0$ без акустического контакта граничит с диэлектрическим полупространством. В этой же плоскости контакта при $x>0$ ($y=0, -\infty<z<\infty$) между полупространствами осуществляется электромеханический полный контакт. Можно принять, что рассматриваемая составная среда имеет полубесконечную трещину в плоскости Oxz при $x<0$.

Из бесконечности ($x<0$) в пьезоэлектрическом полупространстве по направлению оси Ox распространяется электроупругая поверхностная сдвиговая волна, обусловленная наличием пьезоэффекта в полупространстве $y>0$ [1]

$$\begin{aligned} u_z^{\infty}(x,y,t) &= w_{\infty}(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \\ \Phi^{\infty}(x,y,t) &= \Phi_{\infty}(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \end{aligned} \tag{1}$$

а в диэлектрическом полупространстве ($y<0$)

$$\Phi_1^{\infty}(x,y,t) = \Phi_{1\infty}(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}, \tag{2}$$

здесь ω – частота колебаний, t – параметр времени.

Амплитудные составляющие перемещения и электрических потенциалов имеют вид:

$$\begin{aligned} w_{\infty}(x,y) &= e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,y} e^{i\sigma_1 x}, \quad y>0 \\ \Phi_{\infty}(x,y) &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left(e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}\,y} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}} e^{-\sigma_1 y}\right) e^{i\sigma_1 x}, \quad y>0 \\ \Phi_{1\infty}(x,y) &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}} e^{\sigma_1 y} e^{i\sigma_1 x}, \quad y<0 \end{aligned} \tag{3}$$

В этих соотношениях e_{15}, ε_{11} – пьезоэлектрическая и диэлектрическая постоянные пьезоэлектрика, ε_0 – диэлектрическая постоянная среды $y<0$, σ_1 – волновое число падающей поверхностной волны [2,3]

$$\sigma_1 = \frac{k(\varepsilon_0+\varepsilon_{11})(1+\chi)}{\sqrt{(1+\chi)^2(\varepsilon_0+\varepsilon_{11})^2-\varepsilon_0^2\chi^2}} > k, \tag{4}$$

$k=\omega/c$, $c=\sqrt{c_{44}(1+\chi)/\rho}$, c_{44} – упругая постоянная пьезоэлектрика, а ρ – плотность, $\chi = e_{15}^2/\varepsilon_{11}c_{44}$ – коэффициент электромеханической связи.

Рассматривается обусловленная наличием полубесконечной трещины дифракция сдвиговой электроупругой волны (1), (2) в составном пространстве пьезоэлектрик-диэлектрик. Среда находится в условиях антиплоской деформации. Задача заключается в определении элекроупругого волнового поля в полупространствах и, учитывая гармоническую зависимость от времени (временной множитель $e^{-i\omega t}$) всех составляющих волнового поля, решается в амплитудах. Для определения амплитудных функций перемещений $w(x,y), w_1(x,y)$ и электрических потенциалов $\Phi(x,y), \Phi_1(x,y)$ в полупространствах имеем следующие уравнения [1,2,3]:

$$\Delta w + k^2 w = 0\,, \quad y > 0$$

$$\varepsilon_{11}\Delta\Phi + e_{15}k^2 w = 0\,, \quad y > 0 \tag{5}$$

$$\Delta w_1 + k_1^2 w_1 = 0\,, \quad y < 0$$

$$\Delta\Phi_1 = 0\,, \quad y < 0 \tag{6}$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\,,\ k_1 = \frac{\omega}{c_1}\,,\ c_1 = \sqrt{\frac{c_{44}^{(1)}}{\rho_1}}\,,$$

$c_{44}^{(1)}$ – упругая постоянная сдвига диэлектрической среды, а ρ_1 – плотность.

Полупространства контактируют по плоскости $y = 0$, следовательно, решения уравнений (5), (6) должны удовлетворять условиям безакустического контакта при $x < 0$ и условиям полного контакта при $x > 0$. Для характеристических функций электрического поля имеют место условия непрерывности по плоскости $y = 0$. Амплитуды электрических потенциалов и составляющих векторов электрических индукций $D_2(x,y)$, $\mathrm{D}_2^{(1)}(x,y)$ удовлетворяют следующим контактным условиям:

$$\Phi(x,+0) = \Phi_1(x,-0)\,,\ D_2(x,+0) = \mathrm{D}_2^{(1)}(x,-0)\,,\ -\infty < x < \infty \tag{7}$$

где $D_2(x,y) = \mathrm{e}_{15}\dfrac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11}\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\,,\ y > 0$

$$D_2^{(1)}(x,y) = -\varepsilon_0\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\,,\ y < 0 \tag{8}$$

На берегах трещины амплитуды напряжений в пьезоэлектрике и в диэлектрике $\sigma_{yz}(x,y)$, $\sigma_{yz}^{(1)}(x,y)$ удовлетворяют условиям

$$\sigma_{yz}(x,+0) = 0\,,\ \sigma_{yz}^{(1)}(x,-0) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0\,, \tag{9}$$

разница перемещений пока неопредел/нная величина

$$w(x,+0) - w_1(x,-0) = w_0(x) \quad \text{при} \quad x < 0 \tag{10}$$

Контактные условия между полупространствами при $x > 0$ примут вид

$$\sigma_{yz}(x,+0) = \sigma_{yz}(x,-0) = q_0(x) \quad \text{при} \quad x > 0\,,$$

$$w(x,+0) = w_1(x,-0) \quad \text{при} \quad x > 0 \tag{11}$$

Для напряжений имеем формулы:

$$\sigma_{yz}(x,y) = \mathrm{c}_{44}\frac{\partial w}{\partial y} + e_{15}\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad \text{при} \quad y > 0\,,$$

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x,y) = \mathrm{c}_{44}^{(1)}\frac{\partial w_1}{\partial y} \quad \text{при} \quad y < 0 \tag{12}$$

Введём функции

$$c_{44}q_+(x) = \mathrm{q}_0(x)\theta(x)\,,\ \psi_-(x) = w_0(x)\theta(-x)\,, \tag{13}$$

где $\theta(x)$ – известная функция Хевисайда, т.е. $q_+(x) = 0$ при $x < 0$, $\psi_-(x) = 0$ при $x > 0$. $\mathrm{c}_{44}\,q_+(x)$ – напряжение при $y = 0$, $\psi_-(x)$ предстаяляет разницу перемещений на $y = \pm 0$.

Условия на контактной плоскости (9), (10), (11) представляются в виде

$$c_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial \Phi}{\partial y}=c_{44}^{(1)}\frac{\partial w_1}{\partial y}=c_{44}q_+(x) \quad \text{при} \quad y=0,$$

$$w(x,+0)-w_1(x,-0)=\psi_-(x) \qquad (14)$$

Задача определения электроупругого волнового поля в составном пространстве при дифракции поверхностной электроупругой волны сдвига (1),(2),(3) на полубесконечной трещине сведена к решению уравнений (5), (6) при условиях (7), (14).

Для решения поставленной задачи применяем интегральное преобразование Фурье, и для преобразований искомых функций получим:

$$\bar{w}(\sigma,y)=A(\sigma)\mathrm{e}^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}+2\pi e^{-\sqrt{\sigma_1^2-k^2}y}\delta(\sigma+\sigma_1),\ y\ge 0$$

$$\bar{\Phi}(\sigma,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}A(\sigma)\bar{\Phi}_0(\sigma,y)+2\pi\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\Phi_0(y)\delta(\sigma+\sigma_1),\ y\ge 0 \qquad (15)$$

$$\bar{w}_1(\sigma,y)=\frac{c_{44}\bar{q}_+(\sigma)}{c_{44}^{(1)}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}}e^{\sqrt{\sigma^2-k_1^2}y},\ y\le 0$$

$$\bar{\Phi}_1(\sigma,y)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}A(\sigma)e^{|\sigma|y}+2\pi\frac{e_{15}}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}e^{\sigma_1 y}\delta(\sigma+\sigma_1),\ y\le 0, \qquad (16)$$

здесь

$$\bar{\Phi}_0(\sigma,y)=e^{-\sqrt{\sigma^2-k^2}y}-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}e^{-|\sigma|y},\ y\ge 0$$

$$\Phi_0(y)=\bar{\Phi}_0(\sigma_1,y), \qquad (17)$$

$$A(\sigma)=\bar{w}_1(\sigma,0)+\bar{\psi}_-(\sigma)-2\pi\delta(\sigma+\sigma_1),$$

$\delta(\sigma)$ – функция Дирака, $\bar{q}_+(\sigma),\bar{\psi}_-(\sigma)$ – преобразования Фурье неизвестных функций $q_+(x),\ \psi_-(x)$, $\gamma(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k^2}\to|\sigma|$, $\gamma_1(\sigma)=\sqrt{\sigma^2-k_1^2}\to|\sigma|$ при $|\sigma|\to\infty$, $\sqrt{\sigma^2-k^2}=-i\sqrt{k^2-\sigma^2}$, $\sqrt{\sigma^2-k_1^2}=-i\sqrt{k_1^2-\sigma^2}$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\alpha=\sigma+i\tau$ обходит точки ветвления функций $\gamma(\sigma)$, $\gamma_1(\sigma)$ $\sigma=-k$, $\sigma=-k_1$ сверху, а точки $\sigma=k$, $\sigma=k_1$ – снизу [2,3].

Для всех искомых функций принимается:

$$\bar{f}(\sigma,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{i\sigma x}\,dx,\ f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\sigma,y)\mathrm{e}^{-i\sigma x}\,d\sigma$$

Применив преобразование Фурье к условиям (7), (14), с помощью формул (15), (16), для определения функций $\bar{q}_+(\sigma),\bar{\psi}_-(\sigma)$ получим функциональное уравнение

$$\bar{q}_+(\sigma)+c_0\sqrt{\sigma^2-k^2}K(\sigma)\left(\bar{\psi}_-(\sigma)-2\pi\delta(\sigma+\sigma_1)\right)=0, \qquad (18)$$

где $K(\sigma)=\dfrac{c_{44}^{(1)}\sqrt{\sigma^2-k_1^2}K_1(\sigma)}{c_0\sqrt{\sigma^2-k^2}K_2(\sigma)}$, $\quad K(\sigma)\to 1$ при $|\sigma|\to\infty$,

$$K_1(\sigma)=(1+\chi)\sqrt{\sigma^2-k^2}-\frac{\varepsilon_0\chi|\sigma|}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}},$$

$$K_2(\sigma)=c_{44}K_1(\sigma)+c_{44}^{(1)}\sqrt{\sigma^2-k_1^2},$$

$$c_0=\frac{c_{44}^{(1)}\varepsilon_1}{c_{44}\varepsilon_1+c_{44}^{(1)}},\ \varepsilon_1=1+\chi\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_0+\varepsilon_{11}}$$

Очевидно, что, в точках $\sigma = \pm\sigma_1$ функция $K_1(\sigma)$ имеет нули, и $\sigma = \sigma_1$ – единственный положительный корень уравнения $K_1(\sigma) = 0$. Для определённости принимая $k_1 > k$, доказывается, что уравнение $K_2(\sigma) = 0$ имеет единственный положительный корень $\sigma = \sigma_2$, если только [3]

$$\sqrt{1 - \frac{k^2}{k_1^2}} < \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}} \frac{\chi}{1+\chi} \tag{19}$$

Отметим, что при $k_1 < k$, $\sigma = \sigma_2$ единственный положительный корень уравнения $K_2(\sigma) = 0$, если

$$\sqrt{1 - \frac{k^2}{k_1^2}} < \frac{c_{44}}{c_{44}^{(1)}} \frac{\varepsilon_0 \chi}{\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}}.$$

Принимается, что в данной задаче типа Римана (18) действительная ось обходит не только точки ветвления $\pm k, \pm k_1$, но и точки $\sigma = \sigma_1, \sigma = \sigma_2$ – снизу, а точки $\sigma = -\sigma_1, \sigma = -\sigma_2$ – сверху, обеспечивая условия уходящей волны. Если имеет место (19), то доказывается, что $\sigma_1 > \sigma_2 > k_1 > k$. Функциональное уравнение (18), имея в виду представление

$$2\pi i \delta(\sigma + \sigma_1) = (\sigma + \sigma_1 - i0)^{-1} - (\sigma + \sigma_1 + i0)^{-1}, \tag{20}$$

решается, используя методику, развитую в [4,5]. Решения строятся, факторизируя функцию $K(\sigma)$

$$\bar{q}_+(\sigma) = \frac{c_0 \sqrt{\sigma_1 + k}\sqrt{\sigma + k}\, K^+(\sigma) K^+(\sigma_1)}{\sigma + \sigma_1 + i0}, \tag{21}$$

$$\bar{\Psi}_-(\sigma) = -\frac{\sqrt{\sigma_1 + k}\, K^+(\sigma_1)}{\sqrt{\sigma - k}\, K^-(\sigma)(\sigma + \sigma_1 - i0)}, \tag{22}$$

$K^+(\sigma), K^-(\sigma)$ – граничные значения функций $K^+(\alpha), K^-(\alpha)$, $\alpha = \sigma + i\tau$, и функции $K^\pm(\alpha)$ регулярны и не имеют нулей при $\operatorname{Im}\alpha > 0$ и $\operatorname{Im}\alpha < 0$, соответственно, при этом, $K^\pm(\alpha) \to 1$ при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности [2-5].

Имея решения функционального уравнения (21), (22), после обратного преобразования Фурье можно найти все составляющие волнового поля в пространстве.

Рассматривая поле перемещений в составной среде пьезоэлектрик-диэлектрик, находим, что в пьезоэлектрическом полупространстве при $x < 0$ сдвиговое волновое поле состоит из падающей поверхностной волны (1), дифрагированной затухающей объёмной волны и поверхностной-локализованной у граничной поверхности $y = 0$ волны, распространяющейся со скоростью падающей волны ω/σ_1

$$w_n(x, y) = A_1 e^{-\sqrt{\sigma_1^2 - k^2}\, y} e^{-i\sigma_1 x}, \; y > 0 \tag{23}$$

где $A_1 = -\dfrac{c_0 i(\sigma_1 + k)(\mathrm{K}^+(\sigma_1))^2}{2\lambda_1 \sigma_1}$,

$$\lambda_1 = \frac{2(1+\chi)^2(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})^2 - \varepsilon_0^2 \chi^2}{\varepsilon_0 \chi(\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})} = \frac{(\sigma_1^2 + k^2)(1+\chi)}{\sigma_1 \sqrt{\sigma_1^2 - k^2}}$$

В составном полупространстве $x > 0$, кроме дифрагированных объёмных электроупругих волн, распространяются, если только среда допускает такое распространение (19), локализованые у контактной плоскости между пьезоэлектрическим и диэлектрическим полупространствами, сдвиговые интерфейсные волны – обусловленные пьезоэффектом в полупространстве $y > 0$ и дифракцией падающей электроупругой волны сдвига

$$w_*(x,y) = A_2 e^{-\sqrt{\sigma_2^2-k^2}\,y} e^{i\sigma_2 x}, \quad y \geq 0 \tag{24}$$

$$w_{1*}(x,y) = A_2 e^{\sqrt{\sigma_2^2-k_1^2}\,y} e^{i\sigma_2 x}, \quad y \leq 0 \tag{25}$$

где $A_2 = \dfrac{\sqrt{\sigma_1+k}K^+(\sigma_1)\sqrt{\sigma_2^2-k_1^2}}{\lambda_2\sqrt{\sigma_2+k}(\sigma_1-\sigma_2)\mathrm{K}^+(\sigma_2)}$,

$$\lambda_2 = (1+\chi)\frac{\sqrt{\sigma_2^2-k^2}}{\sigma_2}\frac{\sigma_2^2+k^2}{\sigma_2^2-k^2}\frac{c_{44}}{c_{44}^{(1)}} + \frac{\sqrt{\sigma_2^2-k_1^2}}{\sigma_2}\frac{\sigma_2^2+k_1^2}{\sigma_2^2-k_1^2},$$

и скорость распространения этих волн $-\omega/\sigma_2$ больше скорости падающей из бесконечности поверхностной волны ω/σ_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука,1982. 242 с.
2. Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция плоской сдвиговой волны в пьезоэлектрическом полупространстве при полубесконечном металлическом слое в диэлектрике. //Изв. НАН Армении. Механика. 2015. Т.68. №1. С.45-57.
3. Григорян Э.Х., Джилавян С.А., Казарян А.А. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечной трещине в пространстве пьезоэлектрик-диэлектрик.// Труды VII межд. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван: 2011. С.137-143.
4. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Учёные записки ЕГУ. 1979. № 3. С.29-34.
5. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 1. С.50-69.

Сведения об авторах:

Григорян Эдвард Хосровович – доктор физ.-мат. наук, профессор, глав. науч. сотр. Института механики НАН Армении. **Тел.:** (+374 10) 230-389.

Агаян Каро Леренцович – доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. Института механики НАН Армении. **Тел.:** (+374 91) 48-55-66.
E-mail: karo.aghayan@gmail.com.

Джилавян Самвел Акопович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра механики, ЕГУ.
Тел.: (+374 91) 50-07-70. **E-mail:** samjilavyan@ysu.am.

Казарян Айказ Арменович – млад. науч. сотр. Института механики НАН Армении.
Тел.: (+374 96) 00-96-06. **E-mail:** haykazghazaryan@gmail.com.