# НОВЫЙ МЕТОД ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПОЛНОТЫ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ ЛУКАСЕВИЧА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

**Чубарян Анаит Арташесовна**
*профессор, доктор физ-мат наук,*
*Ереванский государственный университет, г.Ереван*
**Хамисян Артур Ашотович**
*магистрант,*
*Ереванский государственный университет, г.Ереван*

# NEW METHOD FOR PROOF OF COMPLETENESS OF LUKASEWICH'S PROPOSITIONAL SYSTEM OF THREE-VALUED LOLIC AND ITS APPLICATIONS

**Chubaryan Anahit**
*Full Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,*
*Yerevan State University,Yerevan*
**Khamisyan Artur**
*Master Student,*
*Yerevan State University, Yerevan*

***АННОТАЦИЯ***

*В работе на примере формальной системы Лукасевича трехзначной пропозициональной логики приводится такое новое доказательство полноты рассматриваемой системы, которое а) гораздо проще ранее известных, б) может быть легко обобщено на любые другие варианты k - значных логик при любом k≥3 и даже на системы нечетких логик, в) позволяет построить формальные системы выводов Гильбертовского типа для всех указанных логик.*

***ABSTRACT***

*In this paper we give a new method for proof of completeness for propositional proof system of three-valued logic of Lukasewich such that 1) it is more easier than other known proofs, 2) can be easy modified into proof of completeness for other variants of k-valued logics for k≥3 and even for fuzzy logic also, 3) can be base for constructing of new Hilbert-style formal systems for all mentioned logics.*

***Ключевые слова:*** *многозначные логики; трехзначная логика Лукасевича; полнота формальной системы; нечеткие логики.*

***Keywords:*** *many-valued logics; three-valued logic of Lukasewich; completeness of formal system; fuzzy logics.*

1.Введение.

Исследования выводов в исчислении высказываний, возникшие в связи с разработками автоматизаций доказательств, получили бурное развитие после известного результата Кука-Рехова [1], доказавших, что NP≠coNP в том и только в том случае, если не существует полиномиально ограниченной системы доказательств классических тавтологий. Исследования развивались в двух направлениях: поиска новых систем доказательств и поиска класса формул, трудно доказуемых в данной системе. Логические рассуждения при доказательстве тех или иных комбинаторных утверждений, претендующих на роль труднодоказуемых, зачастую носят конструктивный характер, а иногда привычная логика с двумя значениями утверждений оказывается неприспособленной для работы с неопределенными данными, в связи с чем было предложено использовать трехзначную (с третьим значением UNKNOWN). В частности, логическое программирование, обработки различных статистических данных и различные новейшие разработки компъютерных техологий требуют привлечения многозначных логик. В связи с упомянутыми обстоятельствами не менее актуальными (а, может быть, и более) оказываются разработки новых систем доказательств и исследования выводов в многозначных логиках. Ряд существенных отличий между двузначной и многозначной логиками делают нетривиальными эти разработки.

В [5] описан метод построения для некоторого варианта k - значной логики (k≥3) некоей дедуктивно полной системы исчисления высказываний, аналогичной системе резолюций. Для некоторой последовательности k-значных тавтологий получены одинаковые по порядку верхние и нижние оценки основных сложностных характеристик выводов в описанных системах. Представляет определенный интерес возможности построения аналогичных систем для иных вариантов k - значной логики, а также построения для всех логик формальных систем Гильбертовского типа. При построении новых систем важно обеспечить их полноту и непротиворвчивость. Если второе свойство обычно доказывается легко, то доказательство полноты тех или иных систем выводов различных вариантов k - значной логики обычно весьма громоздки, основаны на многоступенчатых операциях «погружения» в системы двухзначных логик.

В настоящей работе на примере формальной системы Лукасевича трехзначной пропозициональной логики приводится такое новое доказательство полноты рассматриваемой системы, которое а) гораздо проще ранее известных, б) может быть легко обобщено на любые другие варианты k - значных логик при любом k≥3 и даже на системы нечетких логик, в) позволяет построить формальные системы выводов Гильбертовского типа для всех указных логик.

2. Предварительные понятия. Следуя [6], приведем ряд понятий и определений k-значной логики, в которой зна-

чения пропозициональных переменных могут быть определены из одного из следующих множеств:

$\{0,1,\ldots,k-1\}$ (1),

$\{0,1/(k-1),\ldots,(k-2)/(k-1),1\}$ (2),

но для сохранения за тавтологиями тождественное равенство единице, более принято второе из приведенных множеств. Логические функции в k-значной логике определяются различными способами, в частности:

аналоги дизъюнкции

1. $x\vee y=\max(x,y)$ для (1)–h и (2)
2. $x\vee y=x+y(\mathrm{mod}\ k)$ для (1),

аналоги конъюнкции

1. $x\&y=\max(0,x+y-1)$ для (2)
2. $x\&y=\min(x,y)$ для (1) и (2),

аналоги импликации

1. $$x\supset y=\begin{cases}1, & \text{если } x\le y\\ 1-x+y, & \text{если } x>y\end{cases}\quad \text{для}(2)$$
2. $$x\supset y=\begin{cases}1, & \text{если } x\le y\\ y, & \text{если } x>y\end{cases}\quad \text{для}(1)$$ ,

аналоги отрицания

1. $\neg x=1-x$ для (2) и $\neg x=k-1-x$ для (1)
2. $\neg x=(x+1)\mathrm{mod}k$ для (1) и $\neg x=(((k-1)x+1)\mathrm{mod}\ k)/(k-1)$ для (2).

Важную роль для наших рассмотрений играет также функция

$$I_\sigma(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x=\sigma\\ 0, & \text{если } x\ne\sigma\end{cases}\quad \text{для}(1)\ \text{и}\ (2)$$ .

Не трудно убедится, что для формулы A, тождественно равной 1 (k-1) имеет место $I_1(A)=A$ ($I_{k-1}(A)=A$).

3.Трехзначная логика Лукасевича, ее пропозициональная формализация.

В трехзначной логике Лукасевича пропозициональные переменные принимают значения из множества $B_3=\{0,1/2,1\}$, а в качестве логических связок фиксируются логические функции вышеприведенных пунктов 1., на основе которых определяются формулы общепринятым образом. Учитывая функциональную полноту логических операций $\neg$, $\supset$ и $I_\sigma(x)$, Лукасевичем введена следующая формальная система L [2]. Для любых формул A, B, C аксиомами являются:

1. $A\supset(B\supset A)$
2. $(A\supset B)\supset((B\supset C)\supset(A\supset C))$
3. $(\neg A\supset\neg B)\supset(B\supset A)$
4. $((A\supset B)\supset B)\supset((B\supset A)\supset A)$,

а правилом вывода является modus ponens $A,A\supset B\vdash B$ .

Понятия вывода, вывода из посылок, полноты и непротиворечивости системы определяются общепринятым способом [3]. Непротиворечивость системы L доказывается непосредственно, а доказательство полноты, т.е. доказательство выводимости произвольной тавтологии в L, давалось многими авторами достаточно рутинными методами «погружения» трехзначной логики в двузначную с привлечениями секвенциальных систем выводом (см., например, [2] ). Как уже оговаривалось, нами далее будет приведено более простое доказательство полноты системы L с помощью «погружающей» функции $I_\sigma(x)$, однако прежде отметим несколько свойств этой системы.

Утверждение. Для любых формул A, B, C, $A_1$, $A_2$ и пропозициональной переменной p следующие формулы выводимы в L.

1. $A\supset A$
2. $(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$
3. $I_1(A_1)\supset I_0(\neg A_1)$
4. $I_0(A_1)\supset I_1(\neg A_1)$
5. $I_{1/2}(A_1)\supset I_{1/2}(\neg A_1)$
6. $I_0(A_1)\supset I_1(A_1\supset A_2)$
7. $I_1(A_2)\supset I_1(A_1\supset A_2)$
8. $I_{1/2}(A_1)\supset(I_{1/2}(A_2)\supset I_1(A_1\supset A_2))$
9. $I_{1/2}(A_1)\supset(I_0(A_2)\supset I_{1/2}(A_1\supset A_2))$
10. $I_1(A_1)\supset(I_{1/2})(A_2)\supset I_{1/2})(A_1\supset A_2))$
11. $I_1(A_1)\supset(I_0(A_2)\supset I_0(A_1\supset A_2))$
12. $(I_0(p)\supset A)\supset((I_{1/2}(p)\supset A)\supset((I_1(p)\supset A)\supset A)))$.

Доказывается непосредственными выводами всех вышеперечисленных формул.

Нетрудно убедится также, что в системе L доказывается как и в [3]

Теорема дедукции. Если $\Gamma,A\vdash_L B$, то $\Gamma\vdash_L A\supset B$ для множества посылок Γ и формул A,B.

4. Новое доказательство формальной пропозициональной системы Лукасевича L

Сначала сформулируем и докажем для системы L аналог леммы Кальмара, на основе которой доказывается полнота формальной системы классической двузначной логики [3].

Лемма. Для любой формулы $A(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ системы L и любого набора $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ из $(B_3)^n$ имеет место

$I_{\sigma 1}(p_1), I_{\sigma 2}(p_2),\ldots,I_{\sigma n}(p_n)\vdash_L I_A(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)(A)$.

Доказательство проведем индукцией по количеству k - логических функций формулы A.

При k=0 A=p для некоторой переменной p, тогда при:

$$\begin{cases}\sigma=0 & I_0(p)\vdash_L I_0(p)\\ \sigma=1/2 & I_{1/2}(p)\vdash_L I_{1/2}(p)\\ \sigma=1 & I_1(p)\vdash_L I_1(p).\end{cases}$$

Пусть утверждение верно для формул с количеством логических функций, не превышающим k. Докажем для формул с количеством логических функций, равным k+1.

Формула A может иметь один из трех следующих видов:

1. $A=\neg A_1$, 2. $A=A_1\supset A_2$ или 3. $A=I_\sigma(A_1)$.

Рассмотрим каждый из них:

1. При $A=\neg A_1$

$$A(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=\begin{cases}0 & A_1(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1 \quad 1)\\ 1/2 & A_1(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1/2 \quad 2)\\ 1 & A_1(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=0 \quad 3)\end{cases}$$

Учитывая предположение индукции в подслучае 1), имеем

$$I_{\sigma_1}(p_1), I_{\sigma_2}(p_2), \ldots, I_{\sigma_n}(p_n) \vdash_L I_1(A_1)$$
$$\vdash_L I_1(A_1) \supset I_0(\neg A_1)$$
$$\vdash_L I_0(\neg A_1).$$

Учитывая предположение индукции в подслучае 2), имеем

$$I_{\sigma_1}(p_1), I_{\sigma_2}(p_2), \ldots, I_{\sigma_n}(p_n) \vdash_L I_{1/2}(A_1)$$
$$\vdash_L I_{1/2}(A_1) \supset I_{1/2}(\neg A_1)$$
$$\vdash_L I_{1/2}(\neg A_1).$$

Учитывая предположение индукции в подслучае 3), имеем

$$I_{\sigma_1}(p_1), I_{\sigma_2}(p_2), \ldots, I_{\sigma_n}(p_n) \vdash_L I_0(A_1)$$
$$\vdash_L I_0(A_1) \supset I_1(\neg A_1)$$
$$\vdash_L I_1(\neg A_1).$$

2.При $A=A_1 \supset A_2$

$$A(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \begin{cases} 1 & A_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0 \quad 1) \\ 1 & A_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1 \quad 2) \\ 1 & A_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1/2 \quad A_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1/2 \quad 3) \\ 1/2 & A_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1/2 \quad A_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0 \quad 4) \\ 1/2 & A_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1 \quad A_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1/2 \quad 5) \\ 0 & A_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1 \quad A_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0 \quad 6) \end{cases}$$

Учитывая предположение индукции в подслучае 1), имеем

$$I_{\sigma_1}(p_1), I_{\sigma_2}(p_2), \ldots, I_{\sigma_n}(p_n) \vdash_L I_0(A_1)$$
$$\vdash_L I_0(A_1) \supset I_1(A_1 \supset A_2)$$
$$\vdash_L I_1(A_1 \supset A_2).$$

Учитывая предположение индукции в подслучае 2), имеем

$$I_{\sigma_1}(p_1), I_{\sigma_2}(p_2), \ldots, I_{\sigma_n}(p_n) \vdash_L I_1(A_2)$$
$$\vdash_L I_1(A_2) \supset I_1(A_1 \supset A_2)$$
$$\vdash_L I_1(A_1 \supset A_2).$$

Учитывая предположение индукции в подслучае 3), имеем

$$I_{\sigma_1}(p_1), I_{\sigma_2}(p_2), \ldots, I_{\sigma_n}(p_n) \vdash_L I_{1/2}(A_1)$$
$$\vdash_L I_{1/2}(A_2)$$
$$\vdash_L I_{1/2}(A_1) \supset (I_{1/2}(A_2) \supset I_1(A_1 \supset A_2))$$
$$\vdash_L I_{1/2}(A_2) \supset I_1(A_1 \supset A_2)$$
$$\vdash_L I_1(A_1 \supset A_2).$$

Учитывая предположение индукции в подслучае 4), имеем

$$I_{\sigma_1}(p_1), I_{\sigma_2}(p_2), \ldots, I_{\sigma_n}(p_n) \vdash_L I_{1/2}(A_1)$$
$$\vdash_L I_0(A_2)$$
$$\vdash_L I_{1/2}(A_1) \supset (I_0(A_2) \supset I_{1/2}(A_1 \supset A_2))$$
$$\vdash_L I_0(A_2) \supset I_{1/2}(A_1 \supset A_2)$$
$$\vdash_L I_{1/2}(A_1 \supset A_2).$$

Учитывая предположение индукции в подслучае 5), имеем

$$I_{\sigma_1}(p_1), I_{\sigma_2}(p_2), \ldots, I_{\sigma_n}(p_n) \vdash_L I_1(A_1)$$
$$\vdash_L I_{1/2}(A_2)$$
$$\vdash_L I_1(A_1) \supset (I_{1/2}(A_2) \supset I_{1/2}(A_1 \supset A_2))$$
$$\vdash_L I_{1/2}(A_2) \supset I_{1/2}(A_1 \supset A_2)$$
$$\vdash_L I_{1/2}(A_1 \supset A_2).$$

Учитывая предположение индукции в подслучае 6), имеем

$$I_{\sigma_1}(p_1), I_{\sigma_2}(p_2), \ldots, I_{\sigma_n}(p_n) \vdash_L I_1(A_1)$$
$$\vdash_L I_0(A_2)$$
$$\vdash_L I_1(A_1) \supset (I_0(A_2) \supset I_0(A_1 \supset A_2))$$
$$\vdash_L I_0(A_2) \supset I_0(A_1 \supset A_2)$$
$$\vdash_L I_0(A_1 \supset A_2).$$

3 .

При $A=I_\sigma(A_1)$ доказательство следует непосредственно из предположения индукции. □

Теорема о полноте системы L. Каждая трехзначная тавтология выводима в системе L.

Доказательство. Пусть $A(p_1,p_2,\ldots,p_n)\equiv 1$, тогда в силу вышеприведенной леммы и свойства функции $I_1(A)=A$, для каждого $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ имеет место $I_{\sigma 1}(p_1), I_{\sigma 2}(p_2),\ldots,I_{\sigma n}(p_n) \vdash_L A$

Рассмотрим всевозможные наборы значений переменных с разбитием на тройки по значениям последнего члена:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} I_0(p_1), I_0(p_2), \ldots, I_0(p_{n-1}), I_0(p_n) \vdash_L A \\ I_0(p_1), I_0(p_2), \ldots, I_0(p_{n-1}), I_{1/2}(p_n) \vdash_L A \\ I_0(p_1), I_0(p_2), \ldots, I_0(p_{n-1}), I_1(p_n) \vdash_L A \end{array}\right. \\ \qquad\qquad \vdots \\ \left\{\begin{array}{l} I_1(p_1), I_1(p_2), \ldots, I_1(p_{n-1}), I_0(p_n) \vdash_L A \\ I_1(p_1), I_1(p_2), \ldots, I_1(p_{n-1}), I_{1/2}(p_n) \vdash_L A \\ I_1(p_1), I_1(p_2), \ldots, I_1(p_{n-1}), I_1(p_n) \vdash_L A \end{array}\right. \end{array}$$

Применяя теорему дедукции к каждому набору первой тройки, имеем:

$$I_0(p_1), I_0(p_2), \ldots, I_0(p_{n-1}) \vdash_L I_0(p_n) \supset A$$
$$I_0(p_1), I_0(p_2), \ldots, I_0(p_{n-1}) \vdash_L I_{1/2}(p_n) \supset A$$
$$I_0(p_1), I_0(p_2), \ldots, I_0(p_{n-1}) \vdash_L I_1(p_n) \supset A$$
$$\vdash_L (I_0(p_n) \supset A) \supset \left(\left(I_{1/2}(p_n) \supset A\right) \supset \left((I_1(p_n) \supset A) \supset A\right)\right)$$
$$\vdash_L \left(I_{1/2}(p_n) \supset A\right) \supset \left((I_1(p_n) \supset A) \supset A\right)$$
$$\vdash_L (I_1(p_n) \supset A) \supset A$$
$$\vdash_L A.$$

Повторяя те же действия ко всем последующим тройкам наборов, мы сократим количество предпосылок на единицу. Поступая аналогично с новыми тройками, мы добьемся устранения всех посылок. □

Замечание. Отметим, что количество всевозможных наборов из $(B_3)^n$ есть $3^n$, однако количество различных наборов $I_{\sigma 1}(p_1), I_{\sigma 2}(p_2),\ldots,I_{\sigma n}(p_n)$ лишь $2^n$, следовательно, вышеуказанное доказательство может быть упрощено, что может быть существенно при обобщении этого доказательства для k-значных логик при $k \geq 4$ и особенно для нечетких логик, где значением пропозициональной переменной может быть любое число из отрезка [0,1].

5.Возможные приложения предложенного метода.

Как уже указывалось, предложенный метод доказательства полноты на основе модифицированной Леммы Кальмара может быть легко обобщен на любые другие варианты k - значных логик при любом k≥3 с видоизменением и дополнением ряда фомул, приведенных в Утверждении пункта 3. в качестве выводимых, и даже на системы нечетких логик с учетом вышеприведенного замечания. Важно также, что этот метод позволяет построить формальные системы выводов Гильбертовского типа для всех указнных логик. Действительно, достаточно взять в качестве схем аксиом формулы из уже указанного списка выводимых формул, дополнив их рядом других (в зависимости от рассматриваемой логики) и правило Modus ponens. Аналогичная система для двузначной классической логики построена в [4]. Полнота и непротиворечивость этой системы просматривается непосредственно из самой аксиоматики.

Список литературы

1. Cook S.A., Reckhow A.R.: The Journal of Symbolic Logic, vol. 44, 1979, 36-50.
2. Заславский И.Д., Симметрическая конструктивная логика, И. АН Арм.ССР, Ереван, 1978.
3. Мендельсон Э., Введение в математическую логику, И. «Наука» М., 1971.
4. Чубарян А., Относительная эффективность некоторых систем доказательств классической пропозициональной логики, Известия НАН РА, т. 37, N 5, 2002, and Journal of CMA (AAS), v. 37, N5, 2002, 71-84.
5. Чубарян А.А., Читоян А.С., Хамисян А.А., О некоторых системах доказательств для многозначных логик и сложностях выводов в них, ДНАН АР,том 116, N2, 2016, 18-24 .
6. Яблонский С.В., Введение в дискретную математику, И. «Наука» М., 1979.

# СИСТЕМЫ ФРЕГЕ НЕ МОНОТОННЫ

***Чубарян Анаит Арташесовна***
*профессор, доктор физ-мат наук,*
*Ереванский государственный университет, г.Ереван*
***Петросян Гарик Вартанович***
*магистрант,*
*Ереванский государственный университет, г.Ереван*

# FREGE SYSTEMS ARE NO MONOTONOUS

***Chubaryan Anahit***
*Full Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,*
*Yerevan State University,Yerevan*
***Petrosyan Garik***
*Master Student,*
*Yerevan State University, Yerevan*

***АННОТАЦИЯ***

*В настоящей статье мы исследуем соотношение между сложностными характеристиками выводов в системах Фреге для минимальных тавтологий и результатов подстановок в них. Мы показываем, что существует много последовательностей пар минимальных тавтологий $\varphi_n$ и формул $\psi_n$, являющихся результатом подстановок в $\varphi_n$ таких, что для каждого n: 1) длины $\varphi_n$ и $\psi_n$ по порядку равны n, 2) количество шагов выводов $\psi_n$ в системах Фреге ограничены константой, а длины тех же выводов ограничены линейной функцией от n, в то время как 3) количество шагов выводов $\varphi_n$ в системах Фреге по порядку не менее n, а длины тех же выводов ограничены снизу функцией порядка $n^2$. Таким образом доказано, что результат подстановки в минимальную тавтологию может быть выведен в системах Фреге гораздо проще, чем сама минимальная тавтология, слеовательно системы Фреге не монотонны ни по шагам, ни по длинам выводов.*

***ABSTRACT***

*In this paper we investigate the relations between the Frege proof complexities of minimal tautologies and of results of substitutions in them. We show that there are many sequences of pairs of minimal tautologies $\varphi_n$ and formulae $\psi_n$, which are the results of some substitution in $\varphi_n$ such, that for every n 1) the sizes of $\varphi_n$ and ψn are equal n by order, 2) the lines of Frege proofs for $\psi_n$ are bounded by some constant and the sizes of Frege proofs for ψn are bounded by linear function in n, just as 3) the lines of Frege proofs for $\varphi_n$ are at least n by order and the sizes of Frege proofs for $\varphi_n$ are at least $n^2$ by order. So the result of substitution can be proved in Frege systems more easier than corresponding minimal tautology, therefore the Frege systems are no monotonous neither by lines nor by size.*

***Ключевые слова:*** *минимальная тавтология; системы Фреге; сложностные величины выводов; монотонные системы.*

***Keywords:*** *minimal tautology; Frege systems; proof complexity measures; monotonous system.*

Introduction

The minimal tautologies, i.e. tautologies, which are not a substitution of a shorter tautology, play main role in proof complexity area. Really all propositional formulaes, proof complexities of which are investigated in many well known papers, are minimal tautologies. There is traditional assumption that minimal tautology must be no harder than any substitution in it. This idea was revised at first by Anikeev in