

УПРАВЛЕНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧЕ ИЗБЕЖАНИЯ СТОЛКНОВЕНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

© 2016 г. В. В. Аветисян, Р. Э. Чахмакчян

Армения, Ереван, Ереванский государственный ун-т

e-mail: vanavet@yahoo.com

Поступила в редакцию 27.01.14 г., после доработки 18.08.15 г.

Статья посвящена разработке алгоритмов управления, в том числе оптимального управления, в задаче избежания столкновения для системы из двух маятников с управляемым общим подвижным основанием. Решаются две задачи. В первой задаче требуется определить закон изменения ограниченной управляющей силы, обеспечивающий перемещение системы из начального состояния покоя в заданное конечное состояние покоя за конечное время и гарантирующий отсутствие столкновения маятников в процессе колебательных движений, а во второй задаче – оптимальный по быстродействию закон изменения ускорения движения основания и ограниченную силу, порождающую это ускорение. Изложены алгоритмы построения искомых управлений, основанные на использовании условий управляемости Р. Калмана и метода принципа максимума Л.С. Понтрягина. Проведено моделирование динамики рассматриваемой системы при построенных законах управления. Путем сравнения численных результатов, полученных в обеих задачах, установлено, что за счет реализации разработанного алгоритма оптимального по быстродействию управления можно существенно уменьшить время успокоения маятников, предотвратив при этом возможное столкновение.

DOI: 10.7868/S0002338816010054

Введение. Задачи разработки алгоритмов управления, в том числе оптимального, обеспечивающих движение динамических объектов к предписанным целям и позволяющих при этом избежать столкновения, являются предметом исследования современной теории управляемых систем. Актуальность этой темы обусловлена значимостью этих проблем, имеющих своим источником многие прикладные задачи. Например, такие, как задача о проведении беспилотных летающих аппаратов с исходных положений в требуемые положения, избегая столкновения друг с другом, или в робототехнике – задача о предотвращении столкновения манипуляторов или мобильных роботов при их групповом управлении в случае, когда их рабочие зоны перекрываются. Имеется значительное количество работ, в которых задачи избежания столкновения рассмотрены и исследованы в различных постановках. Эти работы можно условно разбить на две группы. В первую группу входят задачи, рассматриваемые в рамках теории дифференциальных игр (задачи типа сближения – уклонения). В этих задачах один из объектов стремится сблизиться с другим на недопустимое расстояние, осуществив столкновение, а второй, наоборот, – уклониться, избегая тем самым столкновения. Вторую группу составляют задачи, рассматриваемые как многомерные задачи теории управления, в которых оба объекта стремятся к предписанным терминальным состояниям, избежав столкновения [1–6]. К этим задачам примыкают задачи избежания столкновения с препятствием, которые можно интерпретировать как задачи управления при учете фазовых ограничений [7–10]. Она логически связана с задачей выживаемости [11] – задача о построении управления, удерживающего траектории системы в заранее заданном множестве [12–14].

В данной работе рассматриваются две задачи из второй группы – задачи избежания столкновения для системы из двух физических маятников с подвесами на общем подвижном основании, управляемом посредством ограниченной силы. Эта система имеет многочисленное приложение в прикладных задачах управления движущимися объектами. Задача управления такой системой ранее рассматривалась в [15, 16], но без условия избежания столкновения, которое в данной работе означает, что расстояние между центрами масс маятников не меньше заданной величины. В первой задаче разработан алгоритм построения закона ограниченной управляющей силы, при котором данный закон обеспечивает перемещение системы из начального состояния покоя в за-

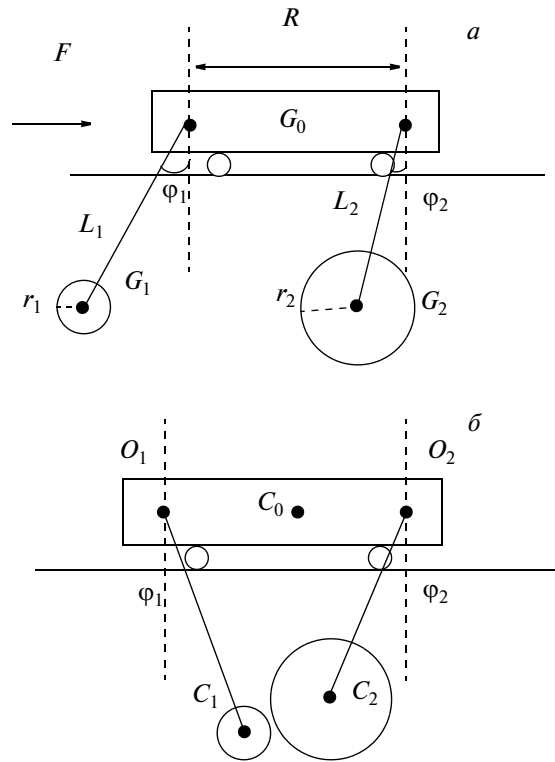


Рис. 1

данное состояние покоя за конечное время и гарантирует избежание столкновения маятников в процессе движения. Во второй задаче разработан алгоритм построения закона изменения ускорения движения основания и ограниченной управляющей силы, порождающей это ускорение, при которых перемещение рассматриваемой системы из состояния покоя на заданное расстояние с гашением колебаний происходит за минимально возможное время без столкновения маятников в процессе движения. Путем численного моделирования динамики системы установлена практическая эффективность разработанных алгоритмов управления. Часть результатов статьи содержится в работах [17–19].

1. Расчетная модель и постановка задачи управления. Рассматривается плоское движение механической системы, состоящей из трех твердых тел G_0, G_1, G_2 (рис. 1, а). Тело G_0 массой m_0 может двигаться поступательно без трения вдоль оси Ox под действием приложенной к телу G_0 силы F . Тела G_1, G_2 представляют собой физические маятники с точками подвесов O_1, O_2 соответственно на подвижном основании G_0 . Маятники состоят из невесомых стержней и жестко связанных с ними шаровых грузов с массами m_1, m_2 соответственно. Обозначим через I_1, I_2 моменты инерции маятников относительно осей подвесов, через L_1, L_2 – расстояния от осей подвесов O_1 и O_2 до центров инерции C_1 и C_2 грузов, через $R = |O_1O_2|$ – расстояние между подвесами, а через r_i и r – радиусы шаровых грузов и их сумму соответственно: $r = r_1 + r_2 < R$, $L_1 + r_1 = L_2 + r_2$. Будем полагать, что точки подвесов O_1 и O_2 равноудалены от центра тяжести C_0 тела G_0 : $|O_1C_0| = |C_0O_2| = R/2$. Сопротивление среды не учитывается.

На тела G_1, G_2 с массами m_1 и m_2 действуют сила тяжести и сила реакции, под действием которых они совершают колебания в плоскости xu . Сила $F(t)$ может быть направлена параллельно горизонтальной оси Ox в сторону возрастания ($F > 0$) или в сторону убывания x ($F < 0$). Для описания движения системы выберем в качестве независимых координат абсциссу x центра тяжести основания G_0 и углы φ_1 и φ_2 отклонения маятников от вертикальных осей (считая положительным направление, показанное на рис. 1, а).

Уравнения колебательных движений механической модели описываются с помощью уравнениями Лагранжа

$$\begin{aligned}
(m_0 + m_1 + m_2)\ddot{x} - m_1 L_1 \ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - m_2 L_2 \ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + m_1 L_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 + m_2 L_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 &= F, \\
I_1 \ddot{\varphi}_1 - m_1 L_1 \ddot{x} \cos \varphi_1 &= -m_1 L_1 g \sin \varphi_1, \\
I_2 \ddot{\varphi}_2 - m_2 L_2 \ddot{x} \cos \varphi_2 &= -m_2 L_2 g \sin \varphi_2.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Пусть на управляющую силу $F(t)$ наложено ограничение

$$|F(t)| \leq F^0, \quad t \in [0, T], \tag{1.2}$$

где F^0 – положительная постоянная.

В процессе управляемого колебательного движения маятников расстояние между центрами инерции C_1, C_2 шаровых грузов как функция от времени $d = d(t)$ в подвижной системе координат $C_0 x y$ с началом в центре тяжести C_0 тела G_0 вычисляется по формуле

$$d(t) = \sqrt{[x_2(t) - x_1(t)]^2 + [y_2(t) - y_1(t)]^2}, \tag{1.3}$$

$$x_1(t) = -R/2 - L_1 \sin \varphi_1(t), \quad y_1(t) = L_1 \cos \varphi_1(t), \tag{1.4}$$

$$x_2(t) = R/2 - L_2 \sin \varphi_2(t), \quad y_2(t) = L_2 \cos \varphi_2(t), \tag{1.5}$$

где x_1, y_1, x_2, y_2 – проекции центров инерции шаровых грузов на оси $C_0 x, C_0 y$.

Будем полагать, что в начальный момент времени для расстояния (1.3) выполняется условие $d(0) = R > r_1 + r_2$. Ограничимся рассмотрением малых колебаний, когда углы φ_i малы:

$$|\varphi_i(t)| \leq \varphi^*, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T], \tag{1.6}$$

а $\sin \varphi_i \approx \varphi_i, \cos \varphi_i \approx 1$. В (1.6) φ^* – заданная величина.

В этом случае уравнения (1.1) примут вид

$$(m_0 + m_1 + m_2)\ddot{x} - m_1 L_1 \ddot{\varphi}_1 - m_2 L_2 \ddot{\varphi}_2 = F(t), \quad t \in [0, T], \tag{1.7}$$

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + m_1 g L_1 \varphi_1 = m_1 L_1 \ddot{x}, \quad I_2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 g L_2 \varphi_2 = m_2 L_2 \ddot{x}.$$

Расстояние $d = d(t)$ (1.3) с использованием линеаризованных формул (1.4), (1.5) $x_1 = -R/2 - L_1 \varphi_1, x_2 = R/2 - L_2 \varphi_2, y_1 = L_1, y_2 = L_2$ запишется так:

$$d(t) = \sqrt{(R - L_2 \varphi_2(t) + L_1 \varphi_1(t))^2 + (L_2 - L_1)^2}, \quad t \in [0, T]. \tag{1.8}$$

Скажем, что при управлении $F(t)$ (1.2) имеет место столкновение маятников G_1 и G_2 , если существует момент времени $t^* \in [0, T]$, при котором расстояние между центрами масс шаровых грузов впервые становится равным заданному числу

$$d(t^*) = r, \quad r = r_1 + r_2, \tag{1.9}$$

и не имеет место столкновение в противном случае, т.е. если в течение всего колебательного процесса расстояние между центрами масс шаровых грузов больше заданного числа

$$d(t) > r, \quad t \in [0, T]. \tag{1.10}$$

Задача 1. Найти управляющую силу $F(t)$ (1.2), перемещающую систему (1.7) из начального состояния покоя

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \varphi_i(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1.11}$$

на заданное расстояние a с гашением ее колебаний

$$x(T) = a, \quad \dot{x}(T) = 0, \quad \varphi_i(T) = 0, \quad \dot{\varphi}_i(T) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1.12}$$

и обеспечивающую выполнение условия нестолкновения (1.10) и ограничений на углы (1.6). Здесь T – неизвестное пока время окончания процесса.

2. Алгоритм построения управления. Опишем некоторые характерные положения системы маятников, для которых имеет место столкновение. Для заданных L_1, L_2, r, φ^* рассмотрим пару углов $(\varphi_1^R, \varphi_2^R)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi_1^R < 0, \quad \varphi_2^R > 0, \quad \varphi_2^R = -\varphi_1^R = \varphi^R, \quad 0 \leq \varphi^R \leq \varphi^*. \tag{2.1}$$

Паре $(\varphi_1^R, \varphi_2^R)$ (2.1) соответствует значение параметра R , определяемого из уравнения (1.9) с учетом (1.8):

$$r < R \leq R^*, \quad (2.2)$$

$$R = \varphi^R(L_1 + L_2) + 2\sqrt{r_1 r_2}, \quad \text{если } 0 \leq \varphi^R < \varphi^*, \quad (2.3)$$

$$R^* = \varphi^*(L_1 + L_2) + 2\sqrt{r_1 r_2}, \quad \text{если } \varphi^R = \varphi^*. \quad (2.4)$$

Паре (R, φ^R) (2.3) соответствуют положения маятников, для которых имеет место столкновение (рис. 1, б), а паре (R^*, φ^*) (2.4) соответствует предельное положение системы маятников, при котором имеет место столкновение.

В случае $R > R^*$ ни при каком управлении (1.2) не может произойти столкновение, так как $d(t) > r$ для любого $t \in [0, T]$. Действительно,

$$\begin{aligned} d^2(t) &= (R - L_2\varphi_2(t) + L_1\varphi_1(t))^2 + (L_2 - L_1)^2 > (R^* - L_2\varphi_2(t) + L_1\varphi_1(t))^2 + (L_2 - L_1)^2 > \\ &> (R^* - \varphi^*(L_1 + L_2))^2 + (L_2 - L_1)^2 \geq r^2. \end{aligned}$$

Пусть $r < R \leq R^*$. Тогда для предотвращения возможного столкновения (1.9) в процессе колебательного движения достаточно, чтобы удовлетворялись неравенства

$$|\varphi_i(t)| \leq \bar{\varphi}^R, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T] \quad (2.5)$$

для любого $\bar{\varphi}^R$, соответствующего ограничению

$$0 < \bar{\varphi}^R < \varphi^R \quad (2.6)$$

при соблюдении ограничения (1.2). Это накладывает условие на время T процесса. Мажорируя и упрощая левые части неравенств (2.5), (1.2), можно получить достаточные условия на конечное время T .

2.1. Построение закона изменения управляющего ускорения без учета ограничений на углы. Введем новые переменные и обозначения:

$$\omega_i^2 = m_i g L I_i^{-1}, \quad \varphi_i' = m_i L I_i^{-1} \dot{\varphi}_i, \quad p_i = m_i^2 L^2 I_i^{-1}, \quad m = m_0 + m_1 + m_2. \quad (2.7)$$

В обозначениях (2.7) (с дальнейшим опусканием штрихов) система (1.7) запишется в виде

$$m\ddot{x} - p_1\ddot{\varphi}_1 - p_2\ddot{\varphi}_2 = F, \quad (2.8)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2\varphi_1 = \ddot{x}, \quad (2.9)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_2^2\varphi_2 = \ddot{x}. \quad (2.10)$$

Отметим, что в силу (2.7), если для шаровых грузов $I_1 > I_2$, то частоты колебаний маятников удовлетворяют неравенству $0 < \omega_1 < \omega_2$ и наоборот. В дальнейшем будем полагать, что имеет место первый случай.

Сначала рассмотрим только уравнения (2.9), (2.10). После введения переменных

$$z_1 = x, \quad z_2 = \dot{x}, \quad u = \ddot{x}, \quad z_3 = \omega_1\varphi_1, \quad z_4 = \dot{\varphi}_1, \quad z_5 = \omega_2\varphi_2, \quad z_6 = \dot{\varphi}_2, \quad (2.11)$$

$$z^R = \begin{cases} \bar{\varphi}^R, & r < R \leq R^*, \\ \varphi^*, & R^* < R \end{cases}$$

уравнения колебательных движений (2.9), (2.10), граничные условия (1.11), (1.12) и ограничения (2.5) примут вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = u, \quad \dot{z}_3 = \omega_1 z_4, \quad \dot{z}_4 = -\omega_1 z_3 + u, \quad \dot{z}_5 = \omega_2 z_6, \quad \dot{z}_6 = -\omega_2 z_5 + u, \quad (2.12)$$

$$z_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (2.13)$$

$$z_1(T) = a, \quad z_i(T) = 0, \quad i = \overline{2, 6}, \quad (2.14)$$

$$|z_3(t)| \leq \omega_1 z^R, \quad |z_5(t)| \leq \omega_2 z^R, \quad t \in [0, T]. \quad (2.15)$$

Введем обозначение

$$\Omega = \min(\omega_1, \omega_2 - \omega_1) > 0, \quad 0 < \omega_1 < \omega_2. \quad (2.16)$$

Наша ближайшая цель – найти управляющее ускорение $u(t)$, переводящее систему (2.12) из состояния (2.13) в конечное состояние (2.14) без учета фазовых ограничений (2.15).

Так как при $\Omega > 0$ система (2.12) вполне управляема [15], то, следуя подходу Калмана [16], управляющее ускорение $u(t)$ будем искать в виде линейной комбинации собственных движений однородной системы (2.12).

Фундаментальная матрица решений однородной системы (2.12) и обратная к ней матрица имеют вид

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) & (0) \\ (0) & \Phi_2(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & \sin \omega_1 t & 0 & 0 \\ -\sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega_2 t & \sin \omega_2 t \\ 0 & 0 & -\sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t \end{pmatrix},$$

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1^{-1}(t) & (0) \\ (0) & \Phi_2^{-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \Phi_1^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\sin \omega_1 t & 0 & 0 \\ \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega_2 t & -\sin \omega_2 t \\ 0 & 0 & \sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t \end{pmatrix},$$

где (0) – нулевая матрица соответствующего размера.

Введем в рассмотрение матрицу

$$R(t) = \int_0^t Q(\tau) Q^T(\tau) d\tau, \quad (2.17)$$

$$Q(t) = \Phi^{-1}(t)B, \quad B = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)^T, \quad (2.18)$$

$$Q^T(t) = (-t \ 1 \ -\sin \omega_1 t \ \cos \omega_1 t \ -\sin \omega_2 t \ \cos \omega_2 t),$$

где B – вектор коэффициентов при управлении u в системе уравнений (2.12).

Элементы R_{ij} матрицы $R(T)$ (2.17) имеют следующие значения:

$$R_{11} = T^3/3, \quad R_{22} = T, \quad R_{33} = T/2 - (\sin 2T\omega_1)/(4\omega_1), \quad R_{44} = T/2 + (\sin 2T\omega_1)/(4\omega_1), \quad (2.19)$$

$$R_{55} = T/2 - (\sin 2T\omega_2)/(4\omega_2), \quad R_{66} = T/2 + (\sin 2T\omega_2)/(4\omega_2), \quad R_{12} = R_{21} = -T^2/2,$$

$$R_{13} = R_{31} = (\sin T\omega_1 - T\omega_1 \cos T\omega_1)/\omega_1^2, \quad R_{14} = R_{41} = -(T\omega_1 \sin T\omega_1 + \cos T\omega_1 - 1)/\omega_1^2,$$

$$R_{15} = R_{51} = (\sin T\omega_2 - T\omega_2 \cos T\omega_2)/\omega_2^2, \quad R_{16} = R_{61} = -(T\omega_2 \sin T\omega_2 + \cos T\omega_2 - 1)/\omega_2^2,$$

$$R_{23} = R_{32} = (\cos T\omega_1 - 1)/\omega_1, \quad R_{24} = R_{42} = (\sin T\omega_1)/\omega_1, \quad R_{25} = R_{52} = (\cos T\omega_2 - 1)/\omega_2,$$

$$R_{26} = R_{62} = (\sin T\omega_2)/\omega_2, \quad R_{34} = R_{43} = -(\sin T\omega_1)^2/(2\omega_1),$$

$$R_{35} = R_{53} = (\omega_2 \cos T\omega_2 \sin T\omega_1 - \omega_1 \cos T\omega_1 \sin T\omega_2)/(\omega_2^2 - \omega_1^2),$$

$$R_{36} = R_{63} = (\omega_1 \cos T\omega_1 \cos T\omega_2 + \omega_2 \sin T\omega_1 \sin T\omega_2 - \omega_1)/(\omega_1^2 - \omega_2^2),$$

$$R_{45} = R_{54} = (\omega_2 - \omega_2 \cos T\omega_1 \cos T\omega_2 - \omega_1 \sin T\omega_1 \sin T\omega_2 - \omega_1)/(\omega_1^2 - \omega_2^2),$$

$$R_{46} = R_{64} = (\omega_1 \cos T\omega_2 \sin T\omega_1 - \omega_2 \cos T\omega_1 \sin T\omega_2)/(\omega_1^2 - \omega_2^2),$$

$$R_{56} = R_{65} = -(\sin T\omega_2)^2/(2\omega_2).$$

Так как система (2.12) вполне управляема, то при некотором $t = T > 0$ матрица $R(T)$ положительно определена, т.е. неособая [20].

Выражение для управляющей функции $u(t)$, переводящей систему (2.12) из начала координат (2.13) фазового пространства в конечное состояние (2.14), может быть записано как

$$u(t) = (\Phi^{-1}(t)B)^T R^{-1}(T)z^*, \quad (2.20)$$

где

$$z^* = \Phi^{-1}(T)z^1 = z^1, \quad z^1 = (a \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T,$$

а решение системы (2.12), соответствующее управлению (2.20), в виде:

$$z(t) = W(t)R^{-1}(T)z^*, \quad W(t) = \Phi(t)R(t). \quad (2.21)$$

2.2. Соблюдение ограничений на углы. Сначала покажем, что, выбирая время окончания процесса T достаточно большим, можно гарантировать выполнение ограничений (2.15) в процессе движения при управлении (2.20). Воспользуемся теоремой, аналогичной теореме 5.1 из [16].

Т е о р е м а. Пусть при некотором $T > 0$ матрица $R(T)$ неособенная и пусть для любого шестимерного вектора v выполнены неравенства

$$\|W_1(t)K(T)v\| \leq \mu_1(T)\|v\|, \quad (2.22)$$

$$\|W_2(t)K(T)v\| \leq \mu_2(T)\|v\| \quad \text{при } t \in [0, T], \quad (2.23)$$

$$\|R(T)K(T)v\| \geq \lambda_i(T)\|v\|, \quad i = 1, 2, \quad (2.24)$$

где $W_1(t)$, $W_2(t)$ – соответственно третья и пятая строки матрицы (2.21), $K(T) = E_6$ – единичная матрица размера 6×6 , $\mu_i(T)$, $\lambda_i(T)$, $i = 1, 2$ – положительные скаляры, а $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. Тогда если выполнены условия

$$z^R \lambda_1(T) \mu_1^{-1}(T) \geq \|z^*\| \omega_1^{-1}, \quad z^R \lambda_2(T) \mu_2^{-1}(T) \geq \|z^*\| \omega_2^{-1}, \quad (2.25)$$

то управление (2.20) переводит систему (2.12) из состояния (2.13) в состояние (2.14) в момент T и при этом удовлетворяются ограничения (2.15).

Отметим, что в силу условия (2.16)

$$\omega_i \geq \Omega, \quad \omega_1 + \omega_2 \geq 3\Omega. \quad (2.26)$$

С учетом (2.26) получим следующие оценки элементов матрицы (2.19):

$$|R_{13}| \leq 1/\Omega^2 + T/\Omega, \quad |R_{14}| \leq 2/\Omega^2 + T/\Omega, \quad |R_{15}| \leq 1/\Omega^2 + T/\Omega, \quad |R_{16}| \leq 2/\Omega^2 + T/\Omega, \quad (2.27)$$

$$|R_{23}| \leq 2/\Omega, \quad |R_{24}| \leq 1/\Omega, \quad |R_{25}| \leq 2/\Omega, \quad |R_{26}| \leq 1/\Omega, \quad |R_{34}| \leq 1/(2\Omega), \quad |R_{35}| \leq 1/(3\Omega),$$

$$|R_{36}| \leq 5/(3\Omega), \quad |R_{45}| \leq 5/(3\Omega), \quad |R_{46}| \leq 5/(3\Omega), \quad |R_{56}| \leq 1/(2\Omega).$$

Определим величины $\lambda_i(T)$, $\mu_i(T)$, $i = 1, 2$. Оценим левую часть неравенства (2.22), применяя неравенство Коши–Буняковского и используя оценки (2.27)

$$\|W_i(t)K(T)v\| \leq \|W_i(t)\| \|v\| \leq [(0.5 + 2/\Omega^2)T^2 + (6/\Omega^3 + 1/(2\Omega))T + 5/\Omega^4 + 821/(72\Omega^2)]^{1/2} \|v\|.$$

Следовательно, в (2.22) можно положить

$$\mu_1(T) = \mu_2(T) = [(0.5 + 2/\Omega^2)T^2 + (6/\Omega^3 + 1/(2\Omega))T + 5/\Omega^4 + 821/(72\Omega^2)]^{1/2}. \quad (2.28)$$

Оценим левую часть неравенства (2.23). Для любого вектора v имеем

$$\|R(T)v\| = \|[0.4T^3v + [R(T) - 0.4T^3E_6]v]\| \geq 0.4T^3\|v\| - \|Mv\|, \quad M = R(T) - 0.4T^3E_6. \quad (2.29)$$

Здесь введена симметрическая матрица M размера 6×6 . Согласно неравенству Коши–Буняковского, имеем

$$\|Mv\|^2 \leq \|v\|^2 \sum_{i,j=1}^6 M_{i,j}^2.$$

Тогда, учитывая симметрию матрицы M и оценки для ее элементов, которые получаются с использованием соотношений (2.27) для элементов матрицы $R(T)$, получим

$$\|Mv\| \leq g(T), \quad g(T) = [2T^6/75 + T^4/2 + 8T^2/\Omega^2 + 24T/\Omega^3 + 293/(9\Omega^2) + 20/\Omega^4]^{1/2}. \quad (2.30)$$

Используя неравенства (2.29) и (2.30), получим

$$\|R(T)v\| \geq (0.4T^3 - g(T))\|v\|. \quad (2.31)$$

Следовательно, условие (2.24) выполнено, если

$$0.4T^3 - g(T) > 0. \quad (2.32)$$

Исследование с учетом выражения для функции $g(T)$ (2.30) показывает, что существует такое число $T_0 > 0$, что последнее неравенство выполняется для всех $T \in (T_0, +\infty)$.

Тогда, сравнивая (2.24) и (2.31), получаем

$$\lambda_i(T) = 0.4T^3 - g(T) > 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.33)$$

Подставляя в неравенства (2.25) выражения (2.28) и (2.33), получим, что ограничения (2.15) выполняются, если конечное время T выбрать из следующего множества:

$$M = \bigcap_{i=0}^2 M_i, \quad (2.34)$$

где

$$M_0 = \{T : T \in (T_0, +\infty), T_0 > 0\}, \quad M_i = \{T > 0 : z^R \lambda_i(T) \mu_i^{-1}(T) > \|z^*\| \omega_i^{-1}\}, \quad i = 1, 2. \quad (2.35)$$

2.3. Соблюдение ограничения на управляющую функцию. Обратимся теперь к вопросу о выборе величины $T \in M$, обеспечивающего выполнение ограничения (1.2). Из (2.7)–(2.9) имеем

$$F(t) = (m - p_1 - p_2)u(t) + \omega_1^2 p_1 \varphi_1(t) + \omega_2^2 p_2 \varphi_2(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.36)$$

Оценим

$$\begin{aligned} |F| &= |(m - p_1 - p_2)u(t) + \omega_1^2 p_1 \varphi_1(t) + \omega_2^2 p_2 \varphi_2(t)| \leq \\ &\leq |(m - p_1 - p_2)u(t)| + \omega_1^2 p_1 |\varphi_1(t)| + \omega_2^2 p_2 |\varphi_2(t)| \leq |(m - p_1 - p_2)u(t)| + (\omega_1^2 p_1 + \omega_2^2 p_2) \varphi^R \leq F^0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Из неравенства (2.37) получим

$$|u(t)| \leq u^0, \quad (2.38)$$

где

$$u^0 = (F^0 - (\omega_1^2 p_1 + \omega_2^2 p_2) \varphi^R) / |m - p_1 - p_2|.$$

Таким образом, для того чтобы при управляющем ускорении (2.20) выполнялось ограничение (1.2), достаточно соблюдения неравенства (2.38) для всех $t \in [0, T]$, т.е.

$$|u(t)| = |Q^T(t)R^{-1}(T)z^*| \leq u^0 \quad Q(t) = \Phi^{-1}(t)B, \quad t \in [0, T]. \quad (2.39)$$

Можно показать, что имеют место все условия теоремы 5.1 из [16], согласно которой, если для управляемой системы (2.12) и для любого шестимерного вектора v выполняются следующие неравенства:

$$\|Q^T(t)K(T)v\| \leq \mu_u(T)\|v\|, \quad t \in [0, T], \quad (2.40)$$

$$\|R(T)K(T)v\| \geq \lambda_u(T)\|v\|, \quad (2.41)$$

$$u^0 \lambda_u(T) \mu_u^{-1}(T) \geq \|z^*\|, \quad (2.42)$$

где $K(T) = E_6$, а $\lambda_u(T) > 0$, $\mu_u(T) > 0$ – положительные скаляры, то для построенного управляющего ускорения (2.20) удовлетворяется ограничение (2.39).

Действительно, так как левые части неравенств (2.24) и (2.41) совпадают, то в качестве $\lambda_u(T)$ можно взять

$$\lambda_u(T) = \lambda(T). \quad (2.43)$$

Для определения $\mu_u(T)$ оценим левую часть неравенства (2.40).

Применяя неравенство Коши–Буняковского и используя выражения (2.18) для компонентов вектора $Q(t)$, получим

$$\|Q^T(t)K(T)v\| \leq \|Q^T(t)\| \|v\| \leq \sqrt{T^2 + 3} \|v\|.$$

Следовательно, в (2.40) можно взять

$$\mu_u(T) = \sqrt{T^2 + 3}. \quad (2.44)$$

Так как для найденных $\mu_u(T)$ и $\lambda_u(T)$ неравенства (2.40) и (2.41) выполняются, то ограничение (2.39) и, следовательно, ограничение (2.38) будут соблюдены, если время T выбрать из множества

$$M_3 = \{T > 0 : u^0 \lambda_u(T) \mu_u^{-1}(T) \geq \|z^*\|\}. \quad (2.45)$$

Таким образом, при построенном законе изменения ускорения (2.20) и соответствующей управляющей силе (2.36) задача (1.2), (1.7), (1.11), (1.12) разрешима, если

$$T \in \bigcap_{i=0}^3 M_i, \quad (2.46)$$

где M_i определяются согласно (2.35), (2.45).

2.4. Расчет управления и численное моделирование. Расчет ограниченного управляющего ускорения (2.20) и порождающей это ускорение силы (2.8) производится по следующей последовательности.

1. При заданных параметрах φ^* , m_i , L_i , r_i , $i = 1, 2$, системы (1.7), по формулам (2.2)–(2.4) определяются значения R и R^* , а по формулам (2.7) и при $I_i = m_i(L_i^2 + 2r_i^2/5)$ – параметры p_i , ω_i и I_i , $i = 1, 2$.

2. Далее находятся множества M_0 , M_i , $i = 1, 2$ (2.35), M_3 (2.45), а затем множество M (2.34).

3. Для заданного a (1.12) из условия (2.46) выбирается конечное время T и строится закон изменения управляющего ускорения по формуле (2.20).

4. Управляющая сила на интервале $0 \leq t \leq T$, соответствующая построенному закону изменения ускорения, задается выражением (2.36), в котором φ_1 , φ_2 определяются интегрированием системы (2.8), (2.9), (1.11) при ускорении (2.20).

По изложенному алгоритму проводилось численное моделирование для системы (1.7) со следующими размерными параметрами:

$$L_1 = 6.1 \text{ м}, \quad L_2 = 4.8 \text{ м}, \quad R = 3 \text{ м}, \quad m_0 = 50 \text{ кг}, \quad m_1 = 10 \text{ кг}, \quad m_2 = 15 \text{ кг}, \quad F^0 = 160 \text{ Н}, \quad (2.47)$$

$$a = 4 \text{ м}, \quad g = 9.8 \text{ м с}^{-2}, \quad r_1 = 0.4 \text{ м}, \quad r_2 = 1.7 \text{ м}, \quad r = 2.1 \text{ м}, \quad \varphi^* = 0.17 \text{ рад}, \quad \varphi^R = 0.15 \text{ рад}.$$

Так как, согласно (2.2), $R < R^* = 3.5 \text{ м}$, то из (2.10) имеем $z^R = \bar{\varphi}^R$.

Таким образом, необходимые для расчета управления параметры следующие:

$$\bar{\varphi}^R = 0.12 \text{ рад}, \quad T = 35 \text{ с}, \quad M_0 = (11.88 \text{ с}, +\infty), \quad M_1 = (32.67 \text{ с}, +\infty),$$

$$M_2 = (31.96 \text{ с}, +\infty), \quad M_3 = (13.94 \text{ с}, +\infty).$$

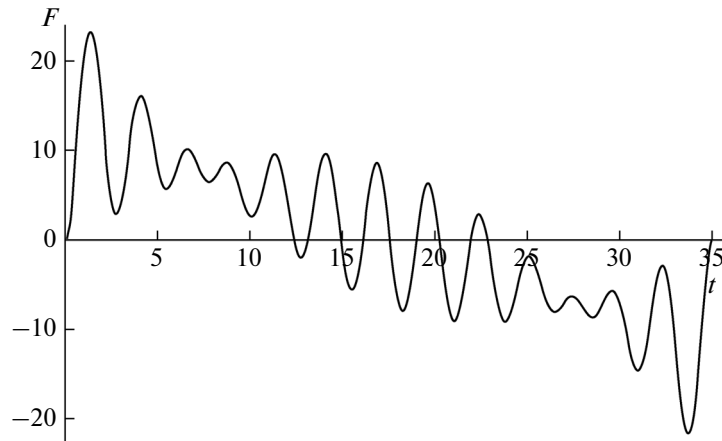


Рис. 2

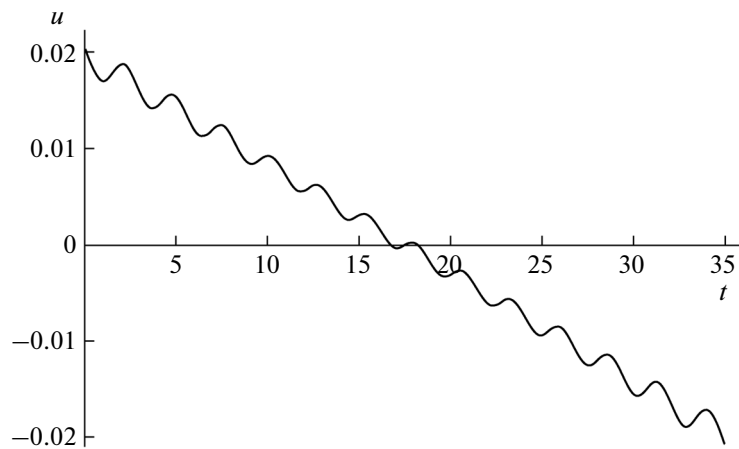


Рис. 3

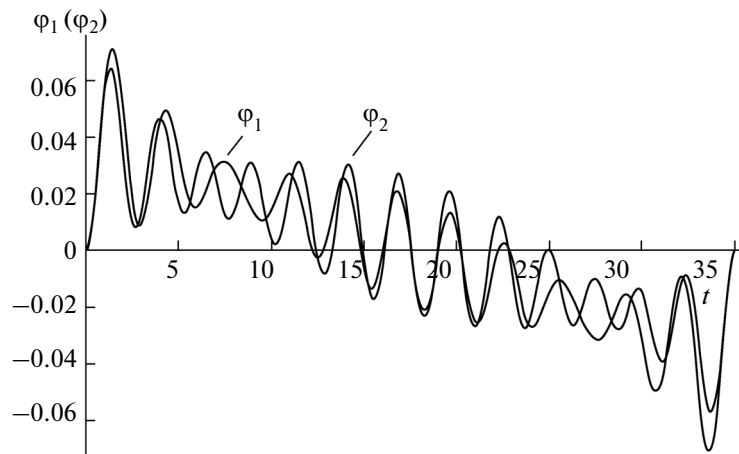


Рис. 4

Приведенные на рис. 2–4 зависимости управляющей силы, ускорения и углов маятников от времени соответственно свидетельствуют о практической приемлемости предложенного алгоритма управления.

3. Задача оптимального по быстродействию управления. Рассмотрим систему (1.7) при ограничениях (1.2), (1.6). Используя обозначения (2.7) (с дальнейшим опусканием штрихов) и $u = \ddot{x}$, систему (1.7) запишем в виде

$$\ddot{x} = u, \quad (3.1)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2 \varphi_1 = u, \quad \ddot{\varphi}_2 + \omega_2^2 \varphi_2 = u, \quad (3.2)$$

$$mu - p_1 \ddot{\varphi}_1 - p_2 \ddot{\varphi}_2 = F. \quad (3.3)$$

Наложим ограничение на ускорение $u = \dot{x}(t)$:

$$|u(t)| \leq u_0, \quad t \in [0, T], \quad (3.4)$$

где $u_0 > 0$ — пока неизвестная постоянная.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. Найти закон изменения ускорения $u(t)$ (3.4) и порождающую это ускорение управляющую силу $F(t)$ (3.3), удовлетворяющую ограничению (1.2), при которых перемещение системы (3.1), (3.2) из начального состояния покоя

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \varphi_i(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.5)$$

на заданное расстояние a с гашением ее колебаний

$$x(T) = a, \quad \dot{x}(T) = 0, \quad \varphi_i(T) = 0, \quad \dot{\varphi}_i(T) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.6)$$

происходит за минимально возможное время T при соблюдении условия нестолкновения (1.10) и ограничений на углы (1.6).

4. Алгоритм построения оптимального по быстродействию управления. В разд. 2 были описаны некоторые характерные положения системы маятников, для которых имеет место столкновение. Отмечалось, что паре (R, φ^R) (2.3) соответствуют положения маятников, для которых имеет место столкновение (рис. 1, б), а паре (R^*, φ^*) (2.4) — предельное положение системы маятников, при котором имеет место столкновение.

Таким образом, в задаче 2, как и в задаче 1, в случае $r < R \leq R^*$ можно избежать возможного столкновения (1.9), если в процессе колебательного движения обеспечить удовлетворение неравенств (2.5) для любого $\bar{\varphi}^R$, соответствующего ограничению (2.6).

В случае $R > R^*$ ни при каком управлении (1.2) не может произойти столкновение, так как $d(t) > r$ для любого $t \in [0, T]$.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к нахождению оптимального закона изменения ускорения (3.4) в задаче быстродействия для системы (3.1), (3.2), (3.5), (3.6) и определению закона изменения соответствующей управляющей ограниченной силы (1.2), (3.3) только при ограничениях на углы вида (1.6) в случае $R > R^*$ и ограничениях на углы вида (2.5) в случае $r < R \leq R^*$.

4.1. Оптимальное управляющее ускорение в задаче быстродействия без учета ограничений на углы. Построим оптимальный закон изменения ускорения в линейной задаче быстродействия для системы (3.1), (3.2), (3.4)–(3.6).

После введения переменных

$$z_1 = x, \quad z_2 = \dot{x}, \quad u = \dot{z}_2, \quad z_3 = \varphi_1, \quad z_4 = \dot{\varphi}_1, \quad z_5 = \varphi_2, \quad z_6 = \dot{\varphi}_2 \quad (4.1)$$

уравнения (3.1), (3.2), граничные условия (3.5), (3.6) и ограничение (3.4) примут вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = u, \quad \dot{z}_3 = z_4, \quad \dot{z}_4 = -\omega_1^2 z_3 + u, \quad \dot{z}_5 = z_6, \quad \dot{z}_6 = -\omega_2^2 z_5 + u, \quad (4.2)$$

$$z_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (4.3)$$

$$z_1(T) = a, \quad z_i(T) = 0, \quad i = \overline{2, 6}, \quad (4.4)$$

$$|u| \leq u_0. \quad (4.5)$$

Решение задачи оптимального по быстродействию управления для системы (4.2)–(4.5) существует, единственно и определяется из принципа максимума, если выполнены следующие два условия: условие общности положения и условие принадлежности точки $u = 0$ внутренности об-

ласти ограничений на управление [21]. Второе условие, как не трудно видеть, выполнено. Условие общности положения сводится к проверке неравенства нулю следующего определителя Δ , составленного из векторов-столбцов $b, Ab, \dots, A^5 b$, где A – матрица линейной системы (4.2), а b – вектор коэффициентов при управлении u :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & (0) \\ (0)^T & A_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)^T.$$

В рассматриваемом случае $\Delta = -\omega_1^2 \omega_2^4 (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2$. Так как по условию задачи частоты ω_1, ω_2 различны, то $\Delta \neq 0$. Следовательно, принцип максимума есть необходимое и достаточное условие оптимальности [21].

Функция Гамильтона для системы в случае задачи быстрогодействия равна

$$H = q_1 z_2 + q_2 u + q_3 z_4 + q_4 (u - \omega_1^2 z_3) + q_5 z_6 + q_6 (u - \omega_2^2 z_5). \quad (4.6)$$

Здесь q_i – сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\dot{q}_1 = 0, \quad \dot{q}_2 = -q_1, \quad \dot{q}_3 = \omega_1^2 q_4, \quad \dot{q}_4 = -q_3, \quad \dot{q}_5 = \omega_2^2 q_6, \quad \dot{q}_6 = -q_5. \quad (4.7)$$

Оптимальное управление $u(t)$ определим из условия максимума функции Гамильтона

$$u(t) = u_0 \text{sign}(q_2 + q_4 + q_6). \quad (4.8)$$

Таким образом, задача определения оптимальных режимов сведена к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (4.2)–(4.4), в которые нужно подставить управление из (4.8). Кроме того, должно быть удовлетворено условие $H(T) \geq 0$ и сопряженные переменные не должны быть все равны тождественно нулю.

Из условия (4.8) следует, что оптимальное управление $u(t)$ представляет собой релейную функцию, принимающую значения $\pm u_0$. Число точек переключения и их положение неизвестны и должны быть определены в процессе решения.

Перейдем к построению релейных управлений с пятью точками переключения для системы (4.2)–(4.5) в задаче быстрогодействия. Покажем, что управление вида

$$u = u_0 \quad \text{при} \quad t \in (0, t_1), \quad t \in (t_2, t_3), \quad t \in (t_4, t_5), \quad (4.9)$$

$$u = -u_0 \quad \text{при} \quad t \in (t_1, t_2), \quad t \in (t_3, t_4), \quad t \in (t_5, T)$$

позволяет перевести систему (4.2) из начального состояния (4.3) в конечное (4.4). Здесь t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 – моменты переключения, T – момент окончания процесса.

Подставим управление (4.9) в систему (4.2) и проинтегрируем их при начальных условиях (4.3). Удовлетворяя краевым условиям (4.4) при $t = T$, получим систему трансцендентных уравнений для $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, T$:

$$t_1 - t_2 + t_3 - t_4 + t_5 = T/2, \quad t_1^2 - t_2^2 + t_3^2 - t_4^2 + t_5^2 = T^2/2 - a/u_0, \quad (4.10)$$

$$2(\cos \omega_1 t_1 - \cos \omega_1 t_2 + \cos \omega_1 t_3 - \cos \omega_1 t_4 + \cos \omega_1 t_5) - 1 - \cos \omega_1 T = 0,$$

$$2(\sin \omega_i t_1 - \sin \omega_i t_2 + \sin \omega_i t_3 - \sin \omega_i t_4 + \sin \omega_i t_5) - \sin \omega_i T = 0, \quad i = 1, 2.$$

Так как начало и конец траекторий можно поменять местами, обратив движения, то будем искать параметры t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 в виде, обеспечивающем симметрию управления (4.9) относительно момента $t = T/2$:

$$t_1 = T/2 - \xi_1, \quad t_2 = T/2 - \xi_2, \quad t_3 = T/2, \quad t_4 = T/2 + \xi_2, \quad t_5 = T/2 + \xi_1. \quad (4.11)$$

Здесь ξ_1 и ξ_2 – неизвестные постоянные. Подставим (4.11) в систему (4.10). Первое уравнение (4.10) тождественно удовлетворяется, а остальные уравнения после некоторых преобразований приводятся к виду

$$2(\xi_1^2 - \xi_2^2) = T^2/4 - a/u_0, \quad (4.12)$$

$$\cos(\omega_i T/2)[2 \cos \omega_i \xi_1 - 2 \cos \omega_i \xi_2 + 1 - \cos(\omega_i T/2)] = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\sin(\omega_i T/2)[2 \cos \omega_i \xi_1 - 2 \cos \omega_i \xi_2 + 1 - \cos(\omega_i T/2)] = 0, \quad i = 1, 2.$$

Последние два уравнения удовлетворяются, если относительно ξ_1 , ξ_2 и T имеет решение система

$$2 \cos \omega_i \xi_1 - 2 \cos \omega_i \xi_2 + 1 - \cos(\omega_i T/2) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.13)$$

совместно с уравнением (4.12).

Используя соотношение (4.12), уравнения (4.13) запишем в виде

$$2 \cos \omega_i \xi_1 - 2 \cos \omega_i \xi_2 - \cos[\omega_i(2\xi_1^2 - 2\xi_2^2 + a/u_0)^{1/2}] + 1 = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.14)$$

Для произвольных заданных a , $u_0 > 0$ из уравнений (4.14) найдем ξ_1 , ξ_2 , а затем из (4.12) — T . Далее по формулам (4.11) определим искомые моменты переключения.

Итак, построено управление (4.9), переводящее систему (4.2) из начального состояния (4.3) в конечное (4.4) при любых a , $u_0 > 0$. Для доказательства его оптимальности укажем соответствующий ненулевой вектор сопряженных переменных. Рассмотрим сопряженные переменные

$$q_1(t) = 1, \quad q_2(t) = T/2 - t, \quad (4.15)$$

$$q_3(t) = c_1 \omega_1 \cos \omega_1 (T/2 - t), \quad q_4(t) = c_1 \sin \omega_1 (T/2 - t),$$

$$q_5(t) = c_2 \omega_2 \cos \omega_2 (T/2 - t), \quad q_6(t) = c_2 \sin \omega_2 (T/2 - t),$$

где

$$c_1 = (\xi_1 \sin \omega_2 \xi_2 - \xi_2 \sin \omega_2 \xi_1) / (\sin \omega_1 \xi_2 \sin \omega_2 \xi_1 - \sin \omega_1 \xi_1 \sin \omega_2 \xi_2),$$

$$c_2 = (\xi_2 \sin \omega_1 \xi_1 - \xi_1 \sin \omega_1 \xi_2) / (\sin \omega_1 \xi_2 \sin \omega_2 \xi_1 - \sin \omega_1 \xi_1 \sin \omega_2 \xi_2).$$

Функции (4.15) удовлетворяют системе (4.7), а соответствующее им управление (4.8) равно

$$u(t) = u_0 \text{sign} \{T/2 - t + c_1 \sin \omega_1 (T/2 - t) + c_2 \sin \omega_2 (T/2 - t)\}. \quad (4.16)$$

Нетрудно проверить, что управление (4.16) испытывает переключения в моменты (4.11) и совпадает с (4.8). Условие $H(T) \geq 0$ также выполнено.

Так как построенное управление (4.16), определяемое соотношениями (4.11), (4.12), (4.14), удовлетворяет принципу максимума для линейной задачи быстродействия (4.2)—(4.5), то оно оптимально при всех $a > 0$ и $u_0 > 0$. Это единственное оптимальное управление есть решение задачи быстродействия (4.2)—(4.5).

4.2. **С о б л ю д е н и е о г р а н и ч е н и й н а у г л ы и у п р а в л я ю щ у ю с и л у.** Обратимся теперь к вопросу о выборе величины $u^0 > 0$, обеспечивающего выполнение ограничений (1.2) и (1.6) или (2.5).

Исключим $\ddot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_2$ из (3.3) и представим управляющую силу в виде

$$F(t) = (m - p_1 - p_2)u(t) + \omega_1^2 p_1 \varphi_1(t) + \omega_2^2 p_2 \varphi_2(t). \quad (4.17)$$

При оптимальном законе ускорения (4.9) оценим величину управляющей силы (4.17) на интервале времени $0 \leq t \leq T$:

$$|F(t)| \leq |m - p_1 - p_2|u_0 + \omega_1^2 p_1 |\varphi_1(t)| + \omega_2^2 p_2 |\varphi_2(t)| \leq F^0. \quad (4.18)$$

Получим явные оценки для модулей $|\varphi_1(t)|$, $|\varphi_2(t)|$ на интервале $0 \leq t \leq T$. Так как функции $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, симметричны относительно $t = T/2$, то достаточно рассмотреть только интервал $0 \leq t \leq T/2$. Последовательно интегрируя систему (4.2) на интервалах $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ и $[t_2, t_3]$ при управляющем ускорении (4.9), найдем

$$|\varphi_i(t)| = u_0 g^{-1} |1 - \cos \omega_i t| \leq 2u_0 g^{-1}, \quad t \in [0, t_1], \quad (4.19)$$

$$|\varphi_i(t)| = u_0 g^{-1} |2 \cos \omega_i (t - t_1) - 1 - \cos \omega_i t| \leq 4u_0 g^{-1}, \quad t \in [t_1, t_2],$$

$$|\varphi_i(t)| \leq 6u_0g^{-1}, \quad t \in [t_2, t_3).$$

Из (4.19) следует, что

$$|\varphi_i(t)| \leq 6u_0g^{-1}, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, T]. \quad (4.20)$$

Используя (4.20), из (4.18) получим

$$|F(t)| \leq [|m - p_1 - p_2| + 12(p_1 + p_2)]u_0 \leq F^0, \quad t \in [0, T]. \quad (4.21)$$

С учетом (4.20) и (4.21) можно заключить, что для соблюдения ограничений (1.2) и (1.6) или (2.5) в рассматриваемой задаче быстрогодействия нужно выбрать то максимальное значение u^0 , при котором удовлетворяются неравенства

$$[|m - p_1 - p_2| + 12(p_1 + p_2)]u_0 \leq F^0 \quad (4.22)$$

и

$$6u_0g^{-1} \leq \varphi^*, \quad i = 1, 2, \quad \text{если} \quad R^* \leq R \quad (4.23)$$

или

$$6u_0g^{-1} \leq \bar{\varphi}^R, \quad i = 1, 2, \quad \text{если} \quad r < R \leq R^*, \quad (4.24)$$

где $\bar{\varphi}^R$ задается из интервала (2.6).

Искомое значение u^0 определяется следующим образом:

$$u_0 = \min\{\varphi^*g/6, F^0/(12(p_1 + p_2) + |m - p_1 - p_2|)\} \quad (4.25)$$

при $R^* \leq R$ и

$$u_0 = \min\{\bar{\varphi}^Rg/6, F^0/(12(p_1 + p_2) + |m - p_1 - p_2|)\} \quad (4.26)$$

при $r < R \leq R^*$.

4.3. Расчет управления и численное моделирование. Расчет оптимального закона изменения ускорения (4.9) и порождающую это ускорение ограниченную управляющую силу (4.17) производится по следующей последовательности.

1. При заданных параметрах $\varphi^*, m, L_i, r_i, i = 1, 2$, системы (1.7), по формулам (2.2)–(2.4) определяются значения R и R^* , а по формулам (2.7) и при $I_i = m_i(L_i^2 + 2r_i^2/5)$ – параметры p_i, ω_i и $I_i, i = 1, 2$.

2. Вычисляется u^0 согласно (4.25) или (4.26) в зависимости от выполнения соотношений $R^* \leq R$ или $r < R \leq R^*$. При вычислении u^0 во втором случае имеется произвол задания значения параметра $\bar{\varphi}^R$, удовлетворяющего ограничению (2.6).

3. Для заданного a (4.6) и найденного u^0 (4.25), (4.26) находятся решения системы (4.12), (4.13) относительно ξ_1, ξ_2, T и затем определяются моменты переключения оптимального закона ускорения (4.9).

4. Управляющая сила на интервале $0 \leq t \leq T$, соответствующая построенному оптимальному закону ускорения, задается выражением (4.17), в котором φ_1, φ_2 определяются интегрированием системы (4.2), (4.5) при оптимальном законе ускорения (4.9).

По изложенному алгоритму проводилось численное моделирование для системы (1.7) с размерными параметрами (2.47). Этим значениям соответствует случай (4.26), так как, согласно (2.2), $R < R^* = 3.5$ м.

Для выбранного значения $\bar{\varphi}^R$ необходимые для реализации расчета управления параметры следующие:

$$\begin{aligned} \varphi^R &= 0.12 \text{ рад}, \quad \omega_1 = 1.27 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = 1.39 \text{ с}^{-1}, \quad p_1 = 4.99 \text{ кг}, \\ p_2 &= 9.52 \text{ кг}, \quad u_0 = 0.198 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}, \quad \xi_1 = 2.29 \text{ с}, \quad \xi_2 = 2.169 \text{ с}, \quad T = 9.228 \text{ с}. \end{aligned}$$

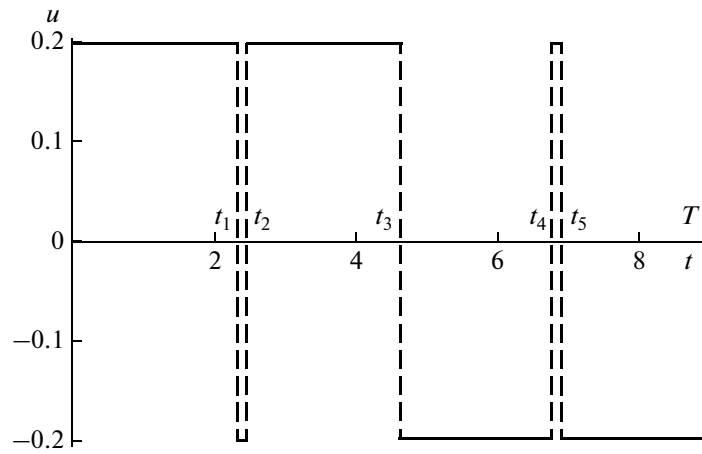


Рис. 5

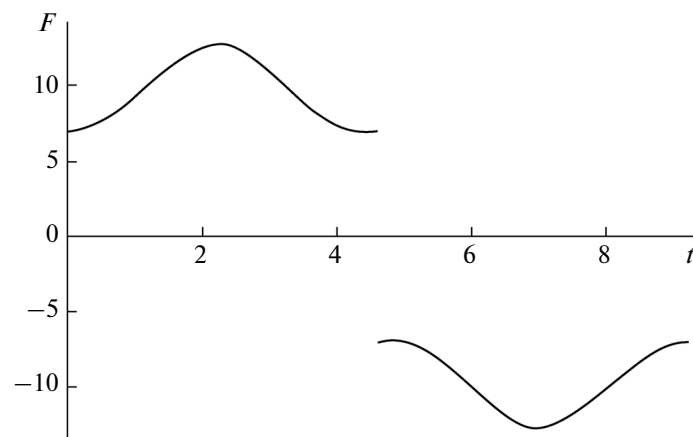


Рис. 6

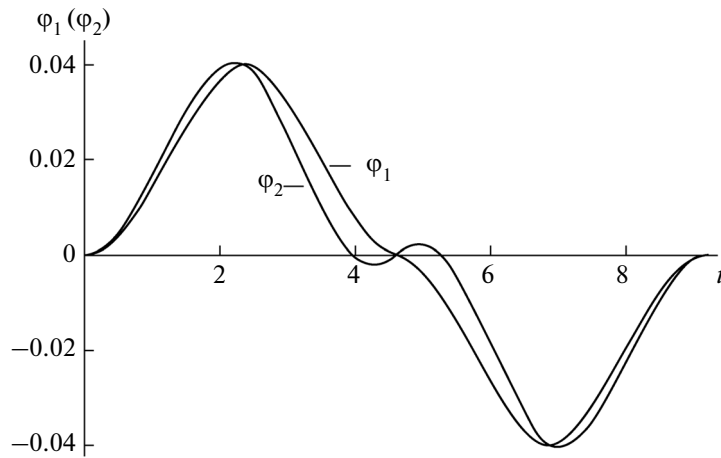


Рис. 7

На рис. 5–7 приведены зависимости оптимального закона изменения ускорения u , ограниченной управляющей силы F и углов маятников φ_1 , φ_2 от времени, рассчитанные по изложенному алгоритму.

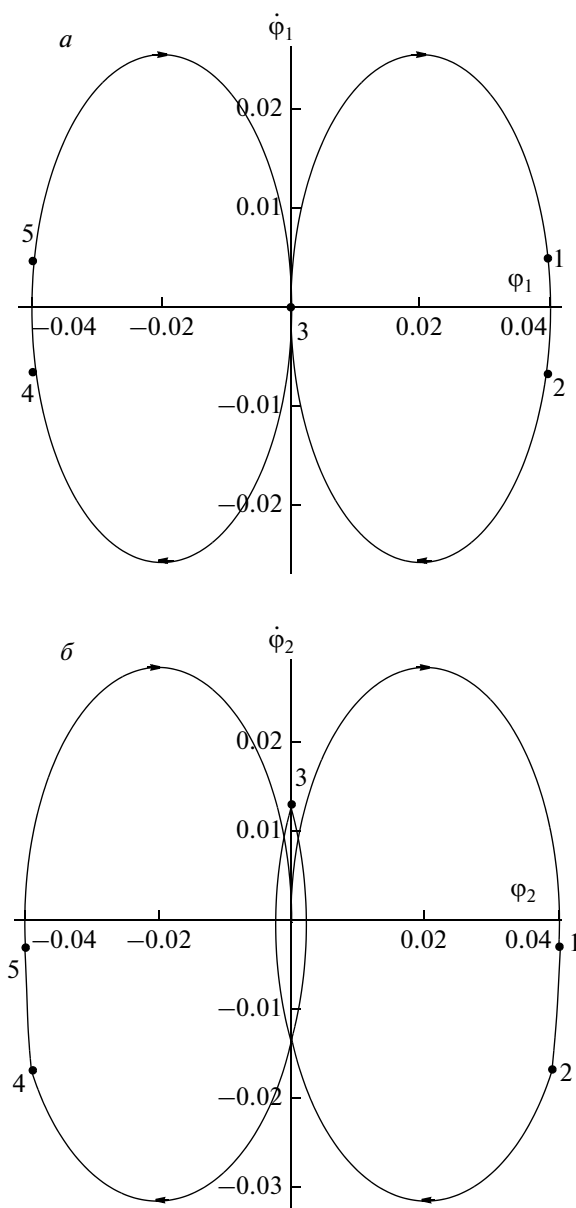


Рис. 8

На рис. 8, *a*, *б* представлены траектории моделируемых колебательных движений двух маятников на фазовых плоскостях $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$, $(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)$ соответственно.

Жирные точки изображают состояние соответствующего маятника, при котором происходит переключение управляющего ускорения. Цифрами 1–5 обозначены последовательные номера моментов переключения (4.11) ускорения (4.9), стрелками – направление движения изображающей точки. Минимальное время прихода маятников из начального состояния покоя в конечное состояние покоя равно $T = 9.228$ с. Сравнение этого результата со временем $T = 35$ с, полученным в разд. 2.3 для задачи 1, свидетельствует, что за счет реализации разработанного алгоритма управления можно существенно уменьшить время успокоения маятников, предотвратив при этом возможное столкновение.

Заключение. Разработан конструктивный подход к решению задачи избежания столкновения двух маятников с общим подвижным основанием в их колебательных движениях посредством ограниченной управляющей силы, приложенной к основанию. Построен закон управляющей силы и получено достаточное условие, при котором данный закон обеспечивает перемещение системы из начального состояния покоя в заданное состояние покоя за конечное время и гаран-

тирует избежание столкновения маятников в процессе движения с соблюдением ограничения на управляющую силу. Проведено численное моделирование динамики системы при построенном законе управления, результаты которого свидетельствуют о практической приемлемости предложенной методики расчета. Разработан алгоритм построения ограниченной управляющей силы и соответствующего закона изменения ускорения движения основания, обеспечивающих перемещение системы двух маятников из начального состояния покоя в заданное конечное состояние покоя за время, минимальное для гашения колебаний, и гарантирующих отсутствие столкновения маятников в процессе движения. Дано доказательство оптимальности релейного закона изменения управляющего ускорения с пятью точками переключения в линейной задаче успокоения маятников и решена задача выбора максимальной величины изменения ускорения, обеспечивающего выполнение ограничения на управляющую силу и ограничений на углы маятников, гарантирующих отсутствие столкновения. Путем численного моделирования динамики системы установлена практическая эффективность, в смысле быстродействия, разработанного алгоритма управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сатимов Н.Ю., Азамов А.* К задаче избежания столкновений в нелинейных системах // ДАН УзССР. 1974. № 6. С. 3–5.
2. *Сатимов Н.Ю.* Задача избежания столкновений в линейных системах // Кибернетика. 1976. № 1. С. 117–121.
3. *Фазылов А.З.* К задаче избежания столкновений // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1987. № 3. С. 30–36.
4. *Сатимов Н.Ю., Фазылов А.З.* Избежание столкновений в линейных системах с интегральными ограничениями // СЕРДИКА. Българско математическо списание. 1989. Т. 15. С. 223–231.
5. *Лукьянова Л.Н.* Задача уклонения от столкновения для линейной управляемой системы // ВМУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2005. № 3. С. 29–35.
6. *Лукьянова Л.Н.* Решение задачи избежания столкновения для инерционного объекта с трением и демпфированием // Научный семинар “Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений”, посвященный 60-летию В.И. Благодатских. М., 2006. С. 28–29.
7. *Куржанский А.Б., Осипов Ю.С.* К задаче управления с ограниченными фазовыми координатами // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 2. С. 194–202.
8. *Акуленко Л.Д.* Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию пересечения сферы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 724–735.
9. *Акуленко Л.Д., Шматков А.М.* Оптимальное уклонение объекта от сферического препятствия // ДАН. 2002. Т. 387. Вып. 5. С. 608–612.
10. *Акуленко Л.Д., Шматков А.М.* Уклонение динамического объекта от неподвижной сферы под действием ограниченной силы // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 179–190.
11. *Aubin J.P.* Viability Theory. Boston: Birkhauser, 1991.
12. *Куржанский А.В., Филиппова Т.Ф.* Об оптимальном описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 8. С. 1303–1315.
13. *Фазылов А.З.* Достаточные условия оптимальности для задачи выживания // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 535–537.
14. *Лукьянова Л.Н.* К решению задачи выживания траектории нелинейной динамической системы // Тр. математического ин-та им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 146–155.
15. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
16. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Наука, 2006.
17. *Аветисян В.В.* О построении управлений пространственными движениями двух динамических объектов, гарантирующих отсутствие столкновения // Научн. тр. междунар. конференции, посвященной 95-летию Н.Х. Арутюняна “Проблемы механики сплошной среды”. Цахкадзор, 2007. С. 12–17.
18. *Аветисян В.В., Чахмахчян Р.Э.* Управление колебаниями двух маятников в задаче избежания столкновения // Тр. УИ междунар. конф. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Горис-Степанакерт, 2011. С. 5–12.
19. *Аветисян В.В., Чахмахчян Р.Э.* Оптимальное по быстродействию управление колебаниями двух маятников в задаче избежания столкновения // Сб. научн. тр. “Проблемы механики деформируемого твердого тела”, посвященный 90-летию академика НАН РА С.А. Амбарцумяна. Ереван, 2012. С. 23–32.
20. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
21. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.