

Математика

УДК 519.6

Ю.Р. АКОПЯН, Г.А. ОГАНЕСЯН

**АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МНОГОСЕТОЧНЫЙ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ
ДЛЯ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ВТОРОГО
ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ
I. ДВУХУРОВНЕВЫЙ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ**

Работа, состоящая из двух частей, посвящена построению и исследованию алгебраического многосеточного переобуславливателя для матриц жесткости, возникающих при конечноэлементной аппроксимации эллиптических краевых задач на основе кусочно-квадратичных базисных функций. В первой части описывается построение двухуровневого переобуславливателя для исходной матрицы жесткости, являющегося основой для дальнейшего построения многосеточного переобуславливателя.

1. Введение. За последние годы опубликован ряд работ, посвященных построению оптимальных и почти оптимальных переобуславливателей для сеточных эллиптических операторов с применением многоуровневых и, в частности, многосеточных процедур [1–7]. В них используется иерархическая последовательность сеток – от самой грубой до самой мелкой. Как правило, каждая последующая сетка получается из предыдущей с помощью единообразной процедуры измельчения. Грубая сетка выбирается так, чтобы объем вычислительной работы, необходимый для решения редуцированной системы сеточных уравнений, был достаточно мал. В то же время самая мелкая сетка должна обеспечить требуемую точность численного решения.

Для линейных эллиптических уравнений, решения которых принадлежат пространству Соболева W_2^2 , большей скорости сходимости приближенного решения к точному, чем дают методы конечных элементов на основе кусочно-линейных аппроксимаций, достичь невозможно (см. [8]). Поэтому в данном случае использование более сложных аппроксимаций не имеет смысла. В то же время кусочно-линейные базисные функции не позволяют улучшить сходимость для задач с более гладкими решениями. Увеличения скорости сходимости можно достичь путем использования кусочно-полиномиальных аппроксимаций второго порядка [9, 10].

В настоящей работе строится многосеточный переобуславливатель для матрицы жесткости, возникающей при дискретизации двумерной модельной эллиптической задачи методом конечных элементов на основе кусочно-квадратичных базисных функций. Суть предлагаемого подхода

такова. С использованием техники разбиения области на малые подструктуры, применяемой ранее в [5, 6], для исходной матрицы жесткости строится так называемый двухуровневый переобуславливатель. При этом оказывается, что в силу способа построения дополнение Шура двухуровневого переобуславливателя лишь числовым множителем отличается от конечно-элементной матрицы на самой мелкой сетке, соответствующей кусочно-линейным базисным функциям. Это обстоятельство позволит во второй части работы построить многосеточный переобуславливатель для исходной матрицы жесткости, соответствующей кусочно-квадратичным базисным функциям с использованием многосеточных переобуславливателей для линейного случая.

2. Иерархические сетки и квадратичные элементы. Рассмотрим в плоскости с координатами $x = (x_1, x_2)$ область Ω с границей $\partial\Omega$, являющуюся объединением некоторого числа $t \geq 1$ единичных квадратов Π_m , $m = 1, 2, \dots, t$, со сторонами, параллельными координатным осям (см. рис. 1). Определим Γ_0 как непустое замкнутое подмножество $\partial\Omega$, состоящее из сторон квадратов Π_m .

Обозначим через $H_0^1(\Omega)$ подпространство пространства Соболева $H^1(\Omega)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на Γ_0 .

Рассмотрим следующую вариационную формулировку модельной эллиптической граничной задачи: для заданной функции $f \in L_2(\Omega)$ найти

функцию $u \in H_0^1(\Omega)$ такую, что

$$b(u, v) = (f, v)_\Omega, \quad \forall v \in H, \quad (2.1)$$

где

$$b(u, v) \equiv \int_\Omega a \nabla u \nabla v dx, \quad (f, v)_\Omega \equiv \int_\Omega f v dx.$$

Предполагается, что a – положительная, постоянная в каждом квадрате Π_m функция: $a(x) \equiv a_m, \quad x \in \Pi_m, \quad$ где $m = 1, 2, \dots, t$.

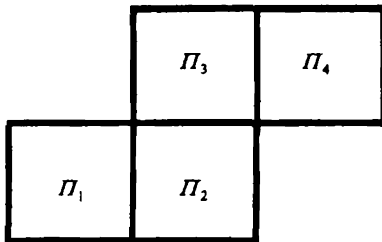


Рис. 1. Пример области Ω ($t = 4$).

Выберем в области Ω равномерную квадратную сетку ω_0 с шагом h_0 . Процесс построения *иерархической* последовательности сеток основан на следующей процедуре измельчения: каждая квадратная ячейка имеющейся сетки с помощью отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, разбивается на четыре квадрата. Ограничимся некоторым целым числом $p \geq 1$. Руководствуясь описанным выше правилом измельчения сетки, исходя из ω_0 , построим последовательность равномерных квадратных сеток $\omega_k, \quad k = 0, 1, \dots, p$. При этом будем говорить, что сетка ω_k соответствует k -му уровню измельчения сетки. Через h_k обозначим шаг сетки ω_k . По построению, $h_k = 2^{-k} h_0$.

Далее, на всех уровнях осуществим *триангуляцию* области Ω . А именно, каждую ячейку квадратной сетки с помощью диагонали, образующей тупой угол с осью Ox_1 , разделим на два прямоугольных треугольника (рис. 2). Тем самым получим последовательность вложенных триангуляций τ_k области Ω , где $k = 0, 1, \dots, p$.

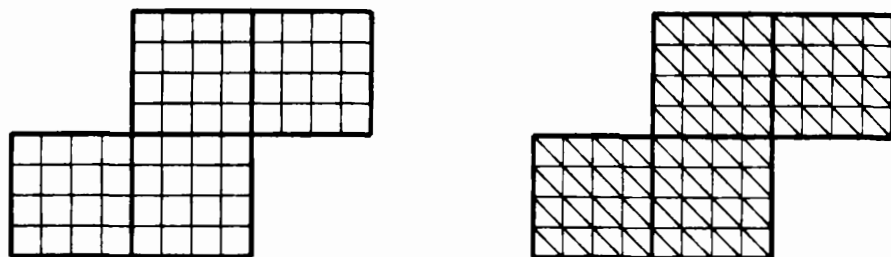


Рис. 2. Триангуляция области Ω .

Введем следующие обозначения:

N_k – множество узлов сетки ω_k , принадлежащих $\bar{\Omega} \setminus \Gamma_0$;

n_k – число узлов в множестве N_k ;

G_k – пространство сеточных функций, заданных на множестве N_k ;

V_k – пространство непрерывных в области $\bar{\Omega}$ функций, линейных на каждом треугольнике триангуляции τ_k и обращающихся в нуль на Γ_0 .

Между сеточными функциями из G_k и кусочно-линейными функциями из V_k имеет место естественное взаимно-однозначное соответствие.

Введем некоторые термины, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Рассмотрим некоторый k -ый уровень измельчения сетки, где $0 \leq k \leq p$. Квадратную ячейку сетки ω_k , разбитую в процессе триангуляции на два треугольника, назовем *линейным s -элементом* (square element) k -го уровня (рис. 3а). Для всех значений $k = 0, 1, \dots, p$

d_k – множество линейных s -элементов k -го уровня.

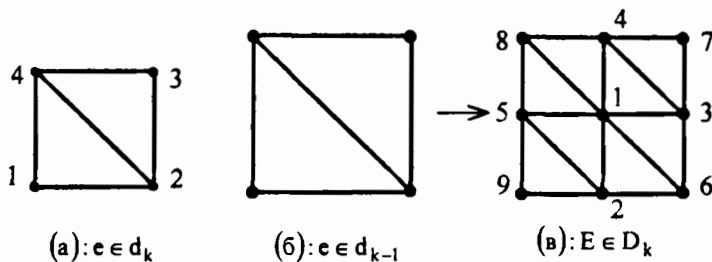


Рис. 3. (а) линейный s -элемент k -го уровня, (б) линейный s -элемент $(k-1)$ -го уровня и (в) соответствующий линейный s -суперэлемент k -го уровня.

Рассмотрим некоторый линейный s -элемент $e \in d_{k-1}$ (рис. 3б), где $1 \leq k \leq p$. На следующем этапе измельчения сетки он разбивается на четыре

линейных s -элемента k -го уровня, как это показано на рис. 3в. В результате s -элемент $e \in d_{k-1}$ превращается на k -ом уровне в *линейный s -суперэлемент* E (square superelement). Для значений $k = 0, 1, \dots, p$

D_k – множество линейных s -суперэлементов k -го уровня.

Пусть $1 \leq k \leq p$. Разобьем множество узлов N_k на три непересекающихся подмножества

$$N_k = N_k^{(1)} \cup N_k^{(2)} \cup N_k^{(3)}, \quad (2.2)$$

где $N_k^{(1)}$ – множество узлов, являющихся серединами s -суперэлементов (на рис. 3в узел 1), $N_k^{(2)}$ – множество узлов, являющихся центрами сторон линейных s -суперэлементов (на рис. 3в узлы 2–5), $N_k^{(3)}$ – множество узлов, являющихся вершинами линейных s -суперэлементов (на рис. 3в узлы 6–9).

По определению $N_k^{(1)} \cup N_k^{(2)} = N_k \setminus N_{k-1}$, $N_k^{(3)} = N_{k-1}$. Если через $n_k^{(i)}$ обозначить число узлов в множестве $N_k^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$), то $n_k^{(1)} + n_k^{(2)} = n_k - n_{k-1}$, $n_k^{(3)} = n_{k-1}$.

В соответствии с разбиением (2.2) определим следующий порядок нумерации узлов множества N_k : сначала нумеруются узлы множества $N_k^{(1)}$, затем – $N_k^{(2)}$ и наконец – $N_k^{(3)}$.

Для значений $k = 1, 2, \dots, p$, согласно принятому соглашению о нумерации узлов, произвольную сеточную функцию $u \in G_k$ можно представить в виде

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad u_i \in G_k^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $G_k^{(i)}$ – пространство сеточных функций, заданных на множестве $N_k^{(i)}$.

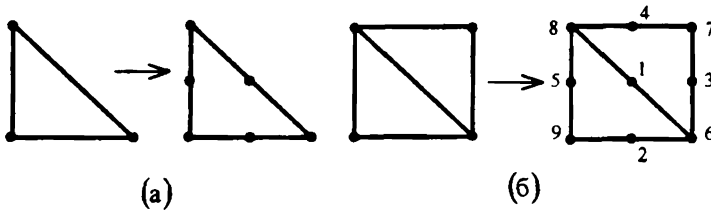


Рис. 4. Способ введения дополнительных узлов: (а) линейный треугольный элемент и соответствующий ему квадратичный треугольный элемент; (б) линейный s -элемент и соответствующий ему квадратичный s -элемент.

Предположим, что задача (2.1) решается методом конечных элементов с использованием кусочно-полиномиальных аппроксимаций второго порядка (см., напр., [9, 10]). Рассмотрим сетку ω_p , соответствующую последнему p -му уровню ее измельчения. Введем дополнительные узлы в серединах сторон треугольных элементов, образующих триангуляцию τ_p (рис. 4а).

В результате введения дополнительных узлов *линейные* треугольные элементы p -го уровня превращаются в *квадратичные* треугольные элементы. Соответственно, триангуляция τ_p переходит в триангуляцию τ , образованную квадратичными треугольными элементами. Линейные s -элементы из d_p превращаются в *квадратичные s -элементы* (рис. 4б), множество которых обозначим через d .

Будем пользоваться следующими обозначениями:

N – множество узлов триангуляции τ , принадлежащих $\bar{\Omega} \setminus \Gamma_0$;

n – число узлов в множестве N ;

G – пространство сеточных функций, заданных на множестве N ;

V – пространство непрерывных в области $\bar{\Omega}$ функций, являющихся полными многочленами второй степени от двух переменных на каждом квадратном треугольном элементе из τ и обращающихся в нуль на Γ_0 .

Положим

$$N = N^{(1)} \cup N^{(2)} \cup N^{(3)}, \quad (2.3)$$

где $N^{(1)}$ – множество узлов, являющихся центрами квадратичных s -элементов (на рис. 4б узел 1), $N^{(2)}$ – множество узлов, являющихся центрами сторон квадратичных s -элементов (на рис. 4б узлы 2–5), $N^{(3)}$ – множество узлов, являющихся вершинами квадратичных s -элементов (на рис. 4б узлы 6–9).

По определению $N^{(1)} \cup N^{(2)} = N \setminus N_p$, $N^{(3)} = N_p$. Если через $n^{(i)}$ обозначить число узлов в множестве $N^{(i)}$ ($i=1,2,3$), то $n^{(1)} + n^{(2)} = n - n_p$, $n^{(3)} = n_p$.

В соответствии с разбиением (2.3) сформулируем следующее правило нумерации узлов множества N : сначала нумеруются узлы множества $N^{(1)}$, затем – $N^{(2)}$, после чего – $N^{(3)}$.

Согласно определенному порядку нумерации узлов множества N , произвольную сеточную функцию $u \in G$ можно представить в виде

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad u_i \in G^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $G^{(i)}$ – пространство сеточных функций, заданных на множестве $N^{(i)}$.

Сформулируем приближенную конечноэлементную задачу, соответствующую задаче (2.1): для заданной функции $f \in L_2(\Omega)$ найти функцию $\tilde{u} \in V$ такую, что

$$b(\tilde{u}, \tilde{v}) = (f, \tilde{v})_{\Omega}, \quad \forall \tilde{v} \in V. \quad (2.4)$$

Задача (2.4) приводит к системе сеточных уравнений

$$Qu = g \quad (2.5)$$

с симметричной положительно определенной матрицей Q порядка n и правой частью $g \in G$. При этом выполняется равенство

$$v^T Q w = b(\tilde{w}, \tilde{v}) \quad (2.6)$$

(функции $\tilde{v}, \tilde{w} \in V$ являются кусочно-квадратичными восполнениями сеточных функций $v, w \in V$ соответственно).

3. Двухсеточные переобуславливатели на последовательности сеток. В настоящем параграфе на последовательности вложенных триангуляций $\{\tau_k\}_{k=0}^p$ рассматриваются матрицы жесткости, соответствующие кусочно-линейным базисным функциям. Для них мы строим двухсеточные переобуславливатели, следуя работе [6].

Пусть $0 \leq k \leq p$. Определим матрицу $A^{(k)}$ порядка n_k с помощью соотношения

$$v^T A^{(k)} u = b(\hat{u}, \hat{v}), \quad (3.1)$$

которое предполагается выполненным для всех $u, v \in G_k$ (функции $\hat{u}, \hat{v} \in V_k$ являются кусочно-линейными восполнениями сеточных функций u, v соответственно).

В соответствии с правилом нумерации узлов множества N_k для значений $k \geq 1$ матрица $A^{(k)}$ может быть представлена в блочном виде

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & A_{23}^{(k)} \\ 0 & A_{32}^{(k)} & A_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

с $n_k^{(i)} \times n_k^{(j)}$ -блоками $A_{ij}^{(k)}$. При этом блоки $A_{ii}^{(k)}$ являются диагональными матрицами.

Рассмотрим линейный s -элемент $e \in d_k$, нумерация узлов которого дана на рис. 3а. Определим для него билинейный функционал

$$\varphi_e(u, v) \equiv (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) + (u_3 - u_2)(v_3 - v_2) + (u_4 - u_3)(v_4 - v_3) + (u_1 - u_4)(v_1 - v_4),$$

где u_i и v_i есть значения функций u и v соответственно в узле с номером i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Следующее утверждение играет важную роль в дальнейших построениях. Оно легко устанавливается с помощью прямых вычислений.

Лемма 3.1 Для любых функции $\hat{u}, \hat{v} \in V_k$ справедливо равенство

$$\int_e \nabla \hat{u} \nabla \hat{v} dx = \frac{1}{2} \varphi_e(\hat{u}, \hat{v}).$$

Пользуясь леммой 3.1, из (3.1) получим, что матрица $A^{(k)}$ удовлетворяет соотношению

$$v^T A^{(k)} u = \frac{1}{2} \sum_{e \in d_k} a_e \varphi_e(\hat{u}, \hat{v}), \quad \forall u, v \in G_k. \quad (3.3)$$

Через a_e обозначено сужение коэффициента a на линейный s -элемент $e \in d_k$.

Рассмотрим теперь некоторый линейный s -элемент $e \in d_{k-1}$, где $1 \leq k \leq p$. На следующем этапе дробления сетки он превращается в линейный s -суперэлемент $E \in D_k$ (рис. 3б, в). Будем ассоциировать с ним билинейные функционалы

$$\Phi_E(u, v) \equiv (u_2 - u_9)(v_2 - v_9) + (u_2 - u_6)(v_2 - v_6) + (u_3 - u_6)(v_3 - v_6) + (u_3 - u_7)(v_3 - v_7) + \\ + (u_4 - u_7)(v_4 - v_7) + (u_4 - u_8)(v_4 - v_8) + (u_5 - u_8)(v_5 - v_8) + (u_5 - u_9)(v_5 - v_9)$$

и

$$\overset{0}{\Phi}_E(u, v) \equiv \sum_{j=2}^5 (u_1 - u_j)(v_1 - v_j),$$

где u_i и v_i есть значения функций u и v соответственно в узле с номером i ($i = 1, 2, \dots, 9$).

Пусть $1 \leq k \leq p$. Осуществим в правой части соотношения (3.3) группировку линейных s -элементов из d_k в линейные s -суперэлементы множества D_k . В результате получим, что матрица $A^{(k)}$ удовлетворяет соотношению

$$v^T A^{(k)} u = \frac{1}{2} \sum_{E \in D_k} a_E \left[\Phi_E(\hat{u}, \hat{v}) + 2 \overset{0}{\Phi}_E(\hat{u}, \hat{v}) \right], \quad \forall u, v \in G_k. \quad (3.4)$$

Через a_E обозначено сужение коэффициента a на линейный s -суперэлемент E .

Заменим в блочном представлении (3.2) матрицы $A^{(k)}$ диагональный блок $A_{22}^{(k)}$ на специальным образом выбранную матрицу. Из (3.4) следует, что матрица $A_{22}^{(k)}$ удовлетворяет соотношению

$$v_2^T A_{22}^{(k)} u_2 = \frac{1}{2} \sum_{E \in D_k} a_E \left[\Phi_E(\hat{u}, \hat{v}) + 2 \overset{0}{\Phi}_E(\hat{u}, \hat{v}) \right], \quad \forall u_2, v_2 \in G_k^{(2)}. \quad (3.5)$$

Функции $\hat{u}, \hat{v} \in V_k$ в правой части (3.5) являются кусочно-линейными восполнениями сеточных функций $u = [0, u_2^T, 0]^T$, $v = [0, v_2^T, 0]^T$ соответственно.

Далее, определим матрицу $B_{22}^{(k)}$ порядка $n_k^{(2)}$ с помощью соотношения

$$v_2^T B_{22}^{(k)} u_2 = \frac{1}{2} \sum_{E \in D_k} a_E \Phi_E(\hat{u}, \hat{v}), \quad \forall u_2, v_2 \in G_k^{(2)}.$$

Наконец, определим матрицу

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} + A_{21}^{(k)} A_{11}^{(k)-1} A_{12}^{(k)} & A_{23}^{(k)} \\ 0 & A_{32}^{(k)} & A_{33}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

которую будем рассматривать как *переобуславливатель* для матрицы $A^{(k)}$.

Справедливо следующее утверждение [6].

Теорема 3.1. Для всех значений $k=1,2,\dots,p$ независимо от значений коэффициента a в подобластях Π_m ($m=1,2,\dots,l$) собственные числа матрицы $B^{(k)^{-1}}A^{(k)}$ принадлежат отрезку $[1,3]$.

Рассмотрим дополнение Шура

$$S_{33}^{(k)} = A_{33}^{(k)} - A_{32}^{(k)}B_{22}^{(k)^{-1}}A_{23}^{(k)}$$

матрицы $B^{(k)}$, записанной в блочном виде (3.6). Имеет место следующее утверждение, устанавливаемое путем непосредственной проверки [6].

Теорема 3.2. Для всех значений $k=1,2,\dots,p$ справедливо равенство

$$S_{33}^{(k)} = \frac{1}{2}A^{(k-1)}. \quad (3.7)$$

Имея в виду равенство (3.7), матрицу $B^{(k)}$ назовем **двухсеточным переобуславливателем** для матрицы $A^{(k)}$.

Принимая во внимание теорему 3.2, блочное представление (3.6) матрицы $B^{(k)}$ можно переписать в виде

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} + A_{21}^{(k)}A_{11}^{(k)^{-1}}A_{12}^{(k)} & A_{23}^{(k)} \\ 0 & A_{32}^{(k)} & \frac{1}{2}A^{(k-1)} + A_{32}^{(k)}B_{22}^{(k)^{-1}}A_{23}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

4. Двухуровневый переобуславливатель для исходной матрицы жесткости. В п. 2 нами была определена матрица жесткости конечноэлементной системы сеточных уравнений (2.5), возникающая при дискретизации граничной задачи на основе кусочно-квадратичной аппроксимации. Прежде всего выясним блочную структуру матрицы.

Рассмотрим квадратичный s -элемент $e \in d$, нумерация узлов которого дана на рис. 4б. Для дальнейших построений нам понадобятся специально определенные билинейные функционалы, связанные с узлами этого элемента:

$$\begin{aligned} F_e(u, v) \equiv & 4[(u_2 - u_9)(v_2 - v_9) + (u_2 - u_6)(v_2 - v_6) + (u_3 - u_6)(v_3 - v_6) + \\ & + (u_3 - u_7)(v_3 - v_7) + (u_4 - u_7)(v_4 - v_7) + (u_4 - u_8)(v_4 - v_8) + \\ & + (u_5 - u_8)(v_5 - v_8) + (u_5 - u_9)(v_5 - v_9)] - \\ & - [(u_6 - u_9)(v_6 - v_9) + (u_7 - u_6)(v_7 - v_6) + (u_8 - u_7)(v_8 - v_7) + \\ & + (u_9 - u_8)(v_9 - v_8)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

и

$$F_e^0(u, v) \equiv 8 \sum_{j=2}^9 (u_1 - u_j)(v_1 - v_j), \quad (4.2)$$

где u_i и v_i есть значения соответственно функций u и v в узле с номером i ($i=1,2,\dots,9$). Нетрудно убедиться в том, что

$$F_e(u, u) \geq 0, \quad \overset{0}{F}_e(u, u) \geq 0, \quad \forall u. \quad (4.3)$$

Сформулируем одно утверждение, по своей значимости аналогичное лемме 3.1. Доказывается оно с помощью прямых вычислений.

Лемма 4.1. Пусть $e \in d$ – произвольный квадратичный s -элемент. Тогда для любых функций $\tilde{u}, \tilde{v} \in V$ справедливо равенство

$$\int_e \nabla \tilde{u} \nabla \tilde{v} dx = \frac{1}{6} \left[F_e(\tilde{u}, \tilde{v}) + \overset{0}{F}_e(\tilde{u}, \tilde{v}) \right].$$

Воспользовавшись утверждением леммы 4.1, из (2.6) получим, что матрица Q удовлетворяет соотношению

$$v^T Q u = \frac{1}{6} \sum_{e \in d} a_e \left[F_e(\tilde{u}, \tilde{v}) + \overset{0}{F}_e(\tilde{u}, \tilde{v}) \right], \quad \forall u, v \in G. \quad (4.4)$$

Через a_e обозначено сужение функции a на квадратичный s -элемент $e \in d$.

В соответствии с разбиением (2.3) множества узлов N на три подмножества матрица Q допускает 3×3 -блочное представление

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

с диагональными блоками Q_{ii} порядка $n^{(i)}$ ($i=1,2,3$). При этом блоки Q_{11} и Q_{22} являются диагональными матрицами. Это легко устанавливается из соотношения (4.4) и определений (4.1) и (4.2) билинейных функционалов.

Заменим в блочном представлении (4.5) диагональный блок Q_{22} на матрицу, которая строится следующим образом. Из соотношения (4.4) следует, что матрица Q_{22} удовлетворяет соотношению

$$v_2^T Q_{22} u_2 = \frac{1}{6} \sum_{e \in d} a_e \left[F_e(\tilde{u}, \tilde{v}) + \overset{0}{F}_e(\tilde{u}, \tilde{v}) \right], \quad \forall u_2, v_2 \in G^{(2)}. \quad (4.6)$$

Функции $\tilde{u}, \tilde{v} \in V$ в правой части соотношения являются кусочно-квадратичными восполнениями сеточных функций $u = [0, u_2^T, 0]^T$, $v = [0, v_2^T, 0]^T$ соответственно.

Далее определим матрицу B_{22} порядка $n^{(2)}$ с помощью соотношения

$$v_2^T B_{22} u_2 = \frac{1}{6} \sum_{e \in d} a_e F_e(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad \forall u_2, v_2 \in G^{(2)}. \quad (4.7)$$

Легко заметить, что B_{22} является диагональной матрицей. Наконец, определим матрицу

$$B = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & B_{22} + Q_{21} Q_{11}^{-1} Q_{12} & Q_{23} \\ 0 & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

которую будем рассматривать в качестве *переобуславливателя* для матрицы Q .

Сформулируем утверждение, связанное с блочной структурой матрицы B . Рассмотрим матрицу

$$S_{33} = Q_{33} - Q_{32} B_{22}^{-1} Q_{23}. \quad (4.9)$$

Воспользовавшись соотношениями (3.3), (4.4) и (4.7), с помощью прямых вычислений приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. Имеет место равенство

$$S_{33} = \frac{1}{3} A^{(p)}. \quad (4.10)$$

Основываясь на последнем утверждении, матрицу B будем называть *двухуровневым переобуславливателем* для матрицы Q . С учетом (4.9) и (4.10) блочное представление (4.8) матрицы B можно записать в виде

$$B = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & B_{22} + Q_{21} Q_{11}^{-1} Q_{12} & Q_{23} \\ 0 & Q_{32} & \frac{1}{3} A^{(p)} + Q_{32} B_{22}^{-1} Q_{23} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

В заключении параграфа приведем оценку границ спектра матрицы $B^{-1}Q$. Используя технику перехода на суперэлементный уровень, разработанную в работах [5, 6, 11, 12], получим следующее утверждение.

Теорема 4.2. Независимо от значений коэффициента a в подобластях Π_m ($m = 1, 2, \dots, t$) собственные числа матрицы $B^{-1}Q$ принадлежат отрезку $[1, 4]$.

5. Заключение. Итак, нами построен двухуровневый переобуславливатель B для матрицы жесткости Q конечноэлементной системы (2.5) и установлены границы спектра матрицы $B^{-1}Q$. В последующей, второй части настоящей работы на основе переобуславливателя B для указанной матрицы Q будет построен многосеточный переобуславливатель.

*Кафедра математических методов
и моделирования*

Поступила 28.03.2002

ЛИТЕРАТУРА

1. Axelsson O., Hakopian Yu.R. and Kuznetsov Yu.A. – IMA J. Numer. Anal., 1997, v. 17, p. 125–149.
2. Axelsson O. and Vassilevski P.S. – Numer. Math., 1989, v. 56, p. 157–177.
3. Axelsson O. and Vassilevski P.S. – SIAM J. Numer. Anal., 1990, v. 27, № 6, p. 1569–1590.
4. Bramble J.H., Pasciak J.E. and Xu J. – In: Domain Decomposition Methods for PDE's, SIAM, 1990, p. 341–357.
5. Hakopian Yu.R. and Kuznetsov Yu.A. – Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1991, v. 6, № 6, p. 453–483.
6. Kuznetsov Yu.A. – Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1989, v. 4, № 5, p. 351–379.
7. Yserentant H. – Numer. Math., 1986, v. 49, p. 379–412.

8. **Оганесян Л.А., Руховец Л.А.** Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ер., АН Арм. ССР, 1979.
9. **Strang G. and Fix G.J.** – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.
10. **Zenkiewicz O.C. and Morgan K.** Finite Elements and Approximation. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, 1983.
11. **Hakopian Yu.R.** – In: Mathematical Problems of Computer Science, v. 21; Trans. of the Institute for Informatics and Automation Problems of the National Acad. Sci. of Armenia, Yerevan, 2000, p. 164–180.
12. **Hakopian Yu.** – Algebra, Geometry & their Applications (Seminar Proceedings), Yerevan State University, Armenia, 2001, v. 1, p. 20–39.

ՅՈՒ.Ն. ՀԱԿՈՔՅԱՆ, Հ.Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՑԱՆՑԱՅԻՆ ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉ
ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐՈՒՄ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՎԵՐՁԱՎՈՐ
ՏԱՐՐԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ
I. ԵՐԿՄԱԿԱՐԴԱԿԱՅԻՆ ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉ

Ա մ փ ո փ ո մ

Աշխատանքը, որը բաղկացած է երկու մասից, նվիրված է էլիպսական հավասարումների երկրորդ կարգի վերջավոր տարրային մոտարկումների դեպքում առաջացող կոշտության մատրիցների համար հանրահաշվական բազմացանցային վերապայմանավորիչների կառուցմանը և հետազոտմանը: Առաջին մասում նկարագրվում է երկմակարդակային վերապայմանավորիչը նախնական կոշտության մատրիցի համար, որը հիմք է հանդիսանալու բազմացանցային վերապայմանավորիչի կառուցման համար:

Yu.R. HAKOPIAN, H.A. HOVHANNISYAN

ALGEBRAIC MULTIGRID PRECONDITIONER FOR SECOND ORDER
FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS IN RECTANGULAR DOMAINS

I. TWO-LEVEL PRECONDITIONER

Summary

The present paper, consisting of two parts, is devoted to constructing an algebraic multigrid preconditioner for stiffness matrices arising in second-order finite element approximation of elliptic boundary value problems. In the first part a two-level preconditioner on the base of which the multigrid preconditioner will be constructed is described.