Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 5, 2010, стр. 9-18.

ЛАКУНАРНЫЕ РЯДЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В КРУГЕ

К. Л. АВЕТИСЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *avetkaren@ysu.am*

Аннотация. В статье установлено необходимое и достаточное условие принадлежности лакунарных степенных рядов пространствам со смешанной нормой в единичном круге. В качестве приложения получены точные поточечные оценки лакунарных рядов.

MSC2010 number: 30B10, 30H05, 30D55.

Ключевые слова: Лакунарные ряды; пропуски Адамара; пространства со смешанной нормой.

1. Введение

Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг комплексной плоскости, а $\mathbb{T}$ – его граница. Через $H(\mathbb{D})$ обозначим множество голоморфных функций в $\mathbb{D}$. Для измеримой в $\mathbb{D}$ функции $f(z) = f(r\zeta)$ ее интегральные средние порядка p обозначаются, как обычно, через

$$M_p(f;r) = \left\| f(r\cdot) \right\|_{L^p(\mathbb{T};dm)}, \quad 0 \le r < 1, \quad 0 < p \le \infty,$$

где dm – мера Лебега на окружности $\mathbb{T}$. Семейство голоморфных функций $f(z)$, для которых $\|f\|_{H^p} = \sup\limits_{0<r<1} M_p(f;r) < +\infty$, есть обычное пространство Харди H^p. Квазинормированное пространство $H(p,q,\alpha)\big(0 < p, q \le \infty, \alpha > 0\big)$ – это множество тех функций $f(z)$, голоморфных в круге $\mathbb{D}$, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(f;r)\,dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \sup\limits_{0<r<1} (1-r)^{\alpha} M_p(f;r), & q = \infty. \end{cases}$$

Пространства $H(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой тесно связаны со многими известными функциональными пространствами такими, как весовые пространства Харди ($q = \infty$), аналитические пространства Бесова, Соболева, Блоха, Дирихле и др., см. [1], [2]. Если $(1-r)^\alpha M_p(f;r)=o(1)$ при $r\to 1^-$, то говорят, что голоморфная функция f принадлежит малому пространству $H_0(p,\infty,\alpha)$.

Символы $C(\alpha,\beta,\dots)$, c_α и т.п. всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно различные в разных формулах и зависящие только от указанных параметров $\alpha,\beta,\dots$. Символ $A\approx B$ означает, что существуют положительные постоянные C_1 и C_2 (несущественные по своим значениям) такие, что $C_1|A|\le |B|\le C_2|A|$.

Лемма 1. *Пусть $f\in H(p,q,\alpha)$ для некоторых $0<p\le\infty, 0<q<\infty, \alpha>0$, и $f_\rho(z)=f(\rho z)$ – растянутая функция. Тогда $\|f-f_\rho\|_{p,q,\alpha}=o(1)$ при $\rho\to 1^-$.*

Доказательство леммы довольно стандартно, и его можно найти, например, в [3, Prop. 2.3], см. также [4] при $p=q$.

Лемма 2. *Пусть $\alpha>0$, $p>0$, $a_k\ge 0$, $I_k=\left\{j\in\mathbb{N};\, 2^k\le j<2^{k+1}\right\}$, $k=1,2,\dots$. Тогда*

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}\left(\sum_{k=1}^\infty a_k r^k\right)^p dr \approx \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^{\alpha k}}\left(\sum_{j\in I_k} a_j\right)^p,$$

где участвующие в двусторонней оценке постоянные $C_i=C_i(p,\alpha)$, $i=1,2$ зависят только от p и α.

Лемма 3. *Пусть $p>0$, $a_k\ge 0$, $N\in\mathbb{N}$. Тогда*

$$\min\{1,N^{p-1}\}\left(\sum_{k=1}^N a_k^p\right)\le\left(\sum_{k=1}^N a_k\right)^p\le\max\{1,N^{p-1}\}\left(\sum_{k=1}^N a_k^p\right).$$

Лемма 2 доказана Мательевичем и Павловичем [5], а Лемма 3 является следствием неравенства Гельдера.

Последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=0}^\infty$ называется лакунарной (по Адамару), если существует постоянная $\lambda>1$ такая, что $\frac{m_{k+1}}{m_k}\ge\lambda$ для всех $k=0,1,2,\dots$. Соответствующий степенной ряд называется лакунарным. Классическая теорема Пэли характеризует лакунарные ряды в пространствах Харди.

Теорема А. (Пэли, [6, Глава V, Теорема 8.20]**)** *Пусть $\left\{m_k\right\}_{k=0}^\infty$ – произвольная лакунарная последовательность, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z)=\sum\limits_{k=0}^\infty a_k z^{m_k}$. Тогда для любого p, $0<p<\infty$, функция f принадлежит классу Харди H^p тогда и только тогда, когда $\{a_k\}\in$*

ℓ^2. *Более того, соответствующие нормы эквивалентны:*

$$\|f\|_{H^p} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2\right)^{1/2}.$$

Лакунарные ряды в классических функциональных пространствах, таких как пространства Блоха, Бесова, Дирихле, Q-пространства, широко изучались в последнее время, см. [7]–[17]. В недавней работе автора [18] доказана версия следующей теоремы (для высших размерностей см. [19]), которая характеризует лакунарные ряды в весовых пространствах Харди–Блоха.

Теорема B. ([18], [19]) *Пусть* $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ *– произвольная лакунарная последовательность,* $\alpha > 0$, *и* $f(z)$ *– голоморфная в* $\mathbb{D}$ *функция, заданная сходящимся лакунарным рядом* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) $f(z) \in H(\infty, \infty, \alpha)$;

(b) $f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$ *для некоторого* $p \in (0, \infty)$;

(c) $f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$ *для всех* $p \in (0, \infty)$;

(d) $\sup_{k\geq 0} \frac{|a_k|}{m_k^{\alpha}} < +\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|f\|_{\infty,\infty,\alpha} \approx \|f\|_{p,\infty,\alpha} \approx \sup_{k\geq 0} \frac{|a_k|}{m_k^{\alpha}}.$$

Основная цель настоящей статьи – распространить Теорему B на все значения $q \in (0, \infty)$, т.е. на случай пространств со смешанной нормой $H(p, q, \alpha)$. В качестве приложения, затем мы выводим точные поточечные оценки лакунарных рядов из $H(p, q, \alpha)$.

2. Основные результаты

Недавно Стевич [14, 15] получил характеризацию лакунарных рядов и их производных в $H(p, q, \alpha)$ для конечных значений p. Ниже в Теоремах 1 и 2 мы обобщаем и уточняем его результаты с использованием дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка.

Теорема 1. *Пусть* $0 < q < \infty$, $\alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ *– произвольная лакунарная последовательность, и* $f(z)$ *– голоморфная в* $\mathbb{D}$ *функция, заданная сходящимся лакунарным рядом* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) $f(z) \in H(\infty, q, \alpha)$;

(b) $f(z) \in H(p, q, \alpha)$ *для некоторого* $p \in (0, \infty)$;

(c) $f(z) \in H(p,q,\alpha)$ *для всех* $p \in (0,\infty)$;

(d) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} < +\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|f\|_{\infty,q,\alpha} \approx \|f\|_{p,q,\alpha} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} \right)^{1/q}.$$

Доказательство. Импликация (a)$\Rightarrow$(b) очевидна ввиду элементарного вложения $H(\infty,q,\alpha) \subset H(p,q,\alpha)$.

Импликация (b)$\Rightarrow$(c) следует из неравенств Пэли Теоремы A, которая утверждает, что $M_p(f;r) \approx M_s(f;r)$ для любого $s, 0 < s < \infty$. Докажем импликацию (c)$\Rightarrow$(d). По условию (c), в частности, имеем $f(z) \in H(2,q,\alpha)$. Тогда по Леммам 2 и 3

$$\|f\|^q_{2,q,\alpha} = \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{q/2} dr =$$
$$= \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{m_k} e^{im_k\theta} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{q/2} dr \geq$$
$$\geq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2m_k} \right)^{q/2} dr \geq$$
$$\geq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{m_k} \right)^{q/2} dr \geq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha q}} \left(\sum_{m_j \in I_k} |a_j|^2 \right)^{q/2} \geq$$
$$\geq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha q}} \left(\sum_{m_j \in I_k} |a_j|^q \right) \geq C \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m_j \in I_k} \frac{|a_j|^q}{m_j^{\alpha q}} \right) = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}},$$

где $C = C(p,q,\alpha,\lambda)$.

Для доказательства импликации (d)$\Rightarrow$(a), вновь применим Леммы 2 и 3, учитывая, что количество целых чисел m_j, содержащихся в интервале I_k, не превышает $N = 1 + [\log_\lambda 2]$,

$$\|f\|^q_{\infty,q,\alpha} = \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M^q_\infty(f;r) dr =$$
$$= \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \left(\sup_{\theta \in (-\pi,\pi)} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{m_k} e^{im_k\theta} \right| \right)^q dr \leq$$
$$\leq C \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^{m_k} \right)^q dr \leq$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k\alpha q}}\left(\sum_{m_j\in I_k}|a_j|\right)^q \leq C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k\alpha q}}\left(\sum_{m_j\in I_k}|a_j|^q\right)\leq$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m_j\in I_k}\frac{|a_j|^q}{m_j^{\alpha q}}\right) = C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}},$$

где $C = C(q,\alpha,\lambda)$. Это завершает доказательство Теоремы 1. $\square$

Определим оператор дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля

$$\mathcal{D}^{-\alpha}f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}a_k z^k, \qquad z\in\mathbb{D},\ \alpha>0,$$

$$\mathcal{D}^{\alpha}f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(k+1)}a_k z^k, \qquad z\in\mathbb{D},\ \alpha>0,$$

ср. [2], [20, Раздел 22, (22.51)].

Теорема 2. *Пусть* $0<q<\infty, \alpha>0, \beta\in\mathbb{R}$, $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ *– произвольная лакунарная последовательность,* $f(z)$ *– голоморфная в* $\mathbb{D}$ *функция, заданная сходящимся лакунарным рядом* $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{m_k}$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) $\mathcal{D}^{\beta}f(z)\in H(\infty,q,\alpha)$;

(b) $\mathcal{D}^{\beta}f(z)\in H(p,q,\alpha)$ *для некоторого* $p\in(0,\infty)$;

(c) $\mathcal{D}^{\beta}f(z)\in H(p,q,\alpha)$ *для всех* $p\in(0,\infty)$;

(d) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|^q}{m_k^{(\alpha-\beta)q}}<+\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|\mathcal{D}^{\beta}f\|_{\infty,q,\alpha}\approx\|\mathcal{D}^{\beta}f\|_{p,q,\alpha}\approx\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|^q}{m_k^{(\alpha-\beta)q}}\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Разложение в ряд функции $\mathcal{D}^{\beta}f(z)$ также лакунарно. Поэтому, мы можем применить Теорему 1 к каждой из функций

$$\mathcal{D}^{\beta}f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m_k+1+\beta)}{\Gamma(m_k+1)}a_k z^{m_k},$$

$$\mathcal{D}^{-\beta}f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m_k+1)}{\Gamma(m_k+1+\beta)}a_k z^{m_k}.$$

Далее, формула Стирлинга утверждает, что для $\beta>0$

$$\frac{\Gamma(m_k+1+\beta)}{\Gamma(m_k+1)}\sim m_k^{\beta} \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{D}^\beta f\|_{p,q,\alpha}^q \approx \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m_k+1+\beta)}{\Gamma(m_k+1)}\right)^q \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{(\alpha-\beta)q}}.$$

$\square$

Замечание 1. *Легко видеть, что Теорема 2 остается верной, если мы заменим оператор Римана–Лиувилля $\mathcal{D}^\beta$ на дробный оператор Адамара*

$$\mathcal{F}^\alpha f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)^\alpha a_k z^k, \qquad z \in \mathbb{D},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Замечание 2. *Подставляя $\beta-\alpha$ вместо α, убеждаемся, что Теорема 2 покрывает все пространства Бесова и обобщает предыдущие аналогичные результаты из* [7, 8, 13, 17].

Теоремы A и B допускают аналогичные обобщения с дробными производными, доказательства которых мы опустим.

Теорема 3. *Пусть $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, $\beta \in \mathbb{R}$, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда для любого p, $0 < p < \infty$, функция $\mathcal{D}^\beta f$ принадлежит классу Харди H^p тогда и только тогда, когда $\{m_k^\beta a_k\} \in \ell^2$. Более того, соответствующие нормы эквивалентны: $\|\mathcal{D}^\beta f\|_{H^p} \approx \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k^{2\beta} |a_k|^2\right)^{1/2}$.*

Теорема 4. *Пусть $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ – произвольная лакунарная последовательность, $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$, и $f(z)$ – голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H(\infty, \infty, \alpha)$;

(b) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$ *для некоторого* $p \in (0, \infty)$;

(c) $\mathcal{D}^\beta f(z) \in H(p, \infty, \alpha)$ *для всех* $p \in (0, \infty)$;

(d) $\sup\limits_{k \ge 0} \dfrac{|a_k|}{m_k^{\alpha-\beta}} < +\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|\mathcal{D}^\beta f\|_{\infty,\infty,\alpha} \approx \|\mathcal{D}^\beta f\|_{p,\infty,\alpha} \approx \sup_{k \ge 0} \frac{|a_k|}{m_k^{\alpha-\beta}}.$$

Теорема 5. *Пусть* $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ *– произвольная лакунарная последовательность,* $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$, *и* $f(z)$ *– голоморфная в* $\mathbb{D}$ *функция, заданная сходящимся лакунарным рядом* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) $\mathcal{D}^{\beta} f(z) \in H_0(\infty, \infty, \alpha)$;

(b) $\mathcal{D}^{\beta} f(z) \in H_0(p, \infty, \alpha)$ *для некоторого* $p \in (0, \infty)$;

(c) $\mathcal{D}^{\beta} f(z) \in H_0(p, \infty, \alpha)$ *для всех* $p \in (0, \infty)$;

(d) $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{m_k^{\alpha-\beta}} = 0$.

Замечание 3. *Следует отметить, что Теорема 3 включает случай голоморфных пространств Харди–Соболева* [21], *содержащих те голоморфные функции, чьи производные из* H^p. *Теоремы 4 и 5 покрывают все весовые пространства Блоха и малые пространства Блоха, обобщая предыдущие известные результаты из* [7], [8], [10], [13], [17], [22].

3. Поточечные оценки лакунарных рядов

Хорошо известно, что произвольная функция $f(z) \in H(p, q, \alpha)$ удовлетворяет поточечной оценке

$$|f(z)| \le C(p, q, \alpha) \frac{\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1 - |z|)^{\alpha+1/p}}, \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{3.1}$$

Неравенство (3.1) следует из оценки Харди–Литтлвуда

$$M_{\infty}(f; \rho) \le C(1 - \rho)^{-1/p} M_p(f; \rho), \qquad 0 < \rho < 1,$$

которую можно найти в [1, Теор.5.9], или в [3, Prop.2.1]. Действительно, достаточно возвести последнее неравенство в степень $q < \infty$ и проинтегрировать с весом $(1 - \rho)^{\alpha q-1}$ по интервалу $(r, 1)$,

$$\int_r^1 (1 - \rho)^{q/p+\alpha q-1} M_{\infty}^q(f; \rho) d\rho \le C \int_r^1 (1 - \rho)^{\alpha q-1} M_p^q(f; \rho) d\rho, \qquad 0 < r < 1.$$

Ввиду монотонности величины $M_{\infty}(f; \rho)$ получаем

$$M_{\infty}^q(f; r) \int_r^1 (1 - \rho)^{q/p+\alpha q-1} d\rho \le C\|f\|_{p,q,\alpha}^q,$$

что немедленно влечет (3.1).

Показатель $\alpha+1/p$ в (3.1) наилучший для произвольных функций. Действительно, вложение $H(p, q, \alpha) \subset H(\infty, \infty, \alpha + 1/p - \varepsilon)$ ложно для любого малого $\varepsilon > 0$. Можно проверить, что функция

$$g(z) = \big(1 - z\big)^{-(\alpha+1/p)} \left(\log \frac{e}{1 - z}\right)^{-2/q}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

принадлежит $H(p,q,\alpha)$, но не принадлежит $H(\infty,\infty,\alpha+1/p-\varepsilon)$.
Следующая теорема показывает, что лакунарные ряды из $H(p,q,\alpha)$ имеют более медленный рост вблизи границы, чем произвольные функции из $H(p,q,\alpha)$.

Теорема 6. *Пусть* $0 < p,q \le \infty, \alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ *– произвольная лакунарная последовательность, и* $f(z)$ *– функция из* $H(p,q,\alpha)$, *заданная сходящимся лакунарным рядом* $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. *Тогда*

$$|f(z)| \le C(\lambda,p,q,\alpha)\frac{\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|)^{\alpha}}, \qquad z\in\mathbb{D}, \tag{3.2}$$

где показатель α *не может быть уменьшен.*

Доказательство. Для функции $f\in H(p,q,\alpha)$ с $0<q<\infty$, по Теореме 1 имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} \le C\|f\|^q_{p,q,\alpha}, \qquad \text{и} \qquad \frac{|a_k|^q}{m_k^{\alpha q}} \le C\|f\|^q_{p,q,\alpha}, \quad k\ge 0,$$

или

$$|a_k| \le C\|f\|_{p,q,\alpha} m_k^{\alpha} \qquad \text{для всех} \quad k\ge 0, \tag{3.3}$$

где $C=C(\lambda,p,q,\alpha)$ независима от f. Для $q=\infty$ и функции $f\in H(p,\infty,\alpha)$, последнее неравенство следует непосредственно из Теоремы B. Таким образом, любой лакунарный ряд f из $H(p,q,\alpha)$ с $0<q\le\infty$ удовлетворяет оценке (3.3). Следовательно,

$$|f(z)| \le \sum_{k=0}^{\infty}|a_k||z|^{m_k} \le C\|f\|_{p,q,\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{\alpha}|z|^{m_k} =$$

$$= C\|f\|_{p,q,\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m_j\in I_k} m_j^{\alpha}|z|^{m_j}, \tag{3.4}$$

где $I_k=\{i\in\mathbb{N};\ 2^k\le i<2^{k+1}\}$. Количество целых чисел m_j, содержащихся в I_k, не превышает $N=1+[\log_{\lambda}2]$. Поэтому внутреняя сумма в (3.4) может быть оценена следующим образом

$$\sum_{m_j\in I_k} m_j^{\alpha}|z|^{m_j} \le N 2^{(k+1)\alpha}|z|^{2^k}.$$

Значит, из (3.4) следует, что

$$|f(z)| \le CN\|f\|_{p,q,\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}2^{(k+1)\alpha}|z|^{2^k} \approx \frac{\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|)^{\alpha}}.$$

Последнюю оценку можно найти, например, в [1, стр. 66].

Теперь покажем, что показатель α в (3.2) наилучший. Предположим, что существует показатель $\beta, 0 < \beta < \alpha$, такой, что для каждого лакунарного ряда $f \in H(p,q,\alpha)$ найдется постоянная $C > 0$ такая, что

$$|f(z)| \leq \frac{C\|f\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|)^{\beta}}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{3.5}$$

т.е. $f \in H(\infty,\infty,\beta)$. Выбирая γ таким, что $\beta < \gamma < \alpha$, определим контрпример

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\gamma} z^{2^k}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

По Теоремам В и 1 функция $f_0(z)$ принадлежит $H(p,q,\alpha)$, но, с другой стороны, $f_0(z) \notin H(\infty,\infty,\beta)$. Это противоречит (3.5) и завершает доказательство теоремы.

□

Хотя мы не можем уменьшить показатель α в (3.2), тем не менее, мы можем уточнить оценки (3.2) в следующем смысле.

Теорема 7. *Пусть* $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $\alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ *– произвольная лакунарная последовательность, и* $f(z)$ *– функция из* $H(p,q,\alpha)$, *заданная сходящимся лакунарным рядом* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. *Тогда*

$$f(z) = o\left(\frac{1}{(1-|z|)^{\alpha}}\right) \qquad \textit{при} \qquad |z| \to 1^-. \tag{3.6}$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ по Лемме 1 можем выбрать $\rho_0 \in (0,1)$ настолько близким к 1, чтобы

$$\|f - f_\rho\|_{p,q,\alpha} < \varepsilon \qquad \text{для всех} \qquad \rho \in (\rho_0, 1),$$

и, кроме того, $(1-r)^{\alpha} < \varepsilon$ для всех $r \in (\rho_0, 1)$. По Теореме 6 для функции $f - f_\rho \in H(p,q,\alpha)$ будем иметь оценку

$$|f(z) - f_\rho(z)| \leq C(\lambda,p,q,\alpha)\frac{\|f-f_\rho\|_{p,q,\alpha}}{(1-|z|)^{\alpha}}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Для фиксированного $\rho \in (\rho_0, 1)$ получим

$$\begin{aligned}(1-|z|)^{\alpha}|f(z)| &\leq (1-r)^{\alpha}|f(z)-f_\rho(z)| + (1-r)^{\alpha}|f_\rho(z)| \leq \\ &\leq C\|f-f_\rho\|_{p,q,\alpha} + C_\rho(1-r)^{\alpha} < C\varepsilon\end{aligned}$$

для всех $r \in (\rho_0, 1)$. □

Разумеется, показатель α в (3.6) не может быть уменьшен ввиду Теоремы 6.

Abstract. The paper establishes a necessary and sufficient condition under which a lacunary series belong to a mixed norm space of functions holomorphic in the unit disc. As a corollary, some sharp pointwise estimates for lacunary series are obtained.

Список литературы

[1] P. Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York (1970).
[2] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer–Verlag, New York / Berlin / Heidelberg (2000).
[3] S. Gadbois, "Mixed-norm generalizations of Bergman spaces and duality", Proc. Amer. Math. Soc., **104**, 1171 – 1180 (1988).
[4] М. М. Джрбашян, "К проблеме представимости аналитических функций", Сообщ. Инст. Матем. Мех. АН Арм. ССР, **2**, 3 – 40 (1948).
[5] M. Mateljević and M. Pavlović, "L^p-behavior of power series with positive coefficients and Hardy spaces", Proc. Amer. Math. Soc., **87**, 309 – 316 (1983).
[6] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, Мир, М. (1965).
[7] R. Aulaskari, J. Xiao and R. Zhao, "On subspaces and subsets of BMOA and UBC", Analysis, **15**, 101 – 121 (1995).
[8] R. Aulaskari and G. Csordas, "Besov spaces and the $Q_{q,0}$ classes", Acta Sci. Math. (Szeged), **60**, 31 – 48 (1995).
[9] D. Girela, M. Pavlović and J. A. Peláez, "Spaces of analytic functions of Hardy–Bloch type", J. d'Analyse Math., **100**, 53 – 83 (2006).
[10] D. Girela and J. A. Peláez, "Integral means of analytic functions", Ann. Acad. Sci.Fenn., **29**, 459 – 469 (2004).
[11] D. Girela and J. A. Peláez, "Growth properties and sequences of zeros of analytic functions in spaces of Dirichlet type", J. Austral. Math. Soc., **80**, 397 – 418 (2006).
[12] D. Girela and J. A. Peláez, "Carleson measures for spaces of Dirichlet type", Integral Equations Oper. Theory, **55**, 415 – 427 (2006).
[13] J. Miao, "A property of analytic functions with Hadamard gaps", Bull. Austral. Math. Soc., **45**, 105 – 112 (1992).
[14] S. Stević, "A generalization of a result of Choa on analytic functions with Hadamard gaps", J. Korean Math. Soc., **43**, 579 – 591 (2006).
[15] S. Stević, "On Bloch-type functions with Hadamard gaps", Abstract Appl. Anal., **2007**, Article ID 39176, 8 pages (2007).
[16] H. Wulan and K. Zhu, Bloch and BMO functions in the unit ball", Complex Var. Elliptic Equ., **53**, 1009 – 1019 (2008).
[17] K. Zhu, "A class of Möbius invariant function spaces", Illinois J. Math., **51**, 977 – 1002 (2007).
[18] К. Л. Аветисян, "Лакунарные ряды и точные оценки в весовых пространствах голоморфных функций", Известия НАН Армении, серия Математика, **42**, (2), 3 – 9 (2007).
[19] K. L. Avetisyan, "Hardy-Bloch type spaces and lacunary series on the polydisk", Glasgow Math. J., **49**, 345 – 356 (2007).
[20] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые их Приложения, Минск, Наука и техника (1987).
[21] F. Beatrous and J. Burbea, "Holomorphic Sobolev spaces on the ball", Diss. Math., **276**, 1 – 57 (1989).
[22] S. Yamashita, "Gap series and α-Bloch functions", Yokohama Math. J., **28**, 31 – 36 (1980).

Поступила 21 декабря 2009