Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 5, 2012, стр. 3-20.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ В ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ ИЗ $\mathbb{R}^n$

К. АВЕТИСЯН, Е. ТОНОЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *avetkaren@ysu.am*, *etonoyan@ysu.am*

Аннотация. В статье установлены непрерывные вложения в пространствах гармонических функций со смешанной нормой в шаре из $\mathbb{R}^n$. Этим обобщены некоторые вложения Харди-Литтлвуда для аналогичных пространств голоморфных функций в единичном круге. Выявлены различия в индексах между пространствами гармонических и голоморфных функций. В качестве следствия получен аналог известного неравенства Фейера–Рисса. Установлены также вложения в специальном случае систем Рисса.

MSC2010 number: 31B05.

Ключевые слова: гармоническая функция; единичный шар в $\mathbb{R}^n$; пространство со смешанной нормой; пространство Харди; вложения; неравенство Фейера–Рисса; система Рисса.

1. Введение

Пусть $B = B_n\,(n \geq 2)$ — открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $S = \partial B$ — его граница, единичная сфера. Интегральные средние порядка p гармонической функции $u(x) = u(r\zeta)$ на сфере $|x| = r$ обозначены, как обычно, через

$$M_p(u;r) = \left\|u(r\cdot)\right\|_{L^p(S;d\sigma)}, \qquad 0 \leq r < 1,\ 0 < p \leq \infty,$$

где $d\sigma$ – $(n-1)$-мерная поверхностная лебегова мера на S, нормированная условием $\sigma(S) = 1$. Множество всех гармонических функций в шаре B обозначим через $h(B)$. Класс гармонических функций $u \in h(B)$, для которых

$$\|u\|_{h^p} = \sup_{0<r<1} M_p(u;r) < +\infty,$$

есть обычное пространство Харди $h^p(B)$ в единичном шаре B.

Определим пространство $h(p,q,\alpha)\big(0 < p,q \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R}\big)$ со смешанной нормой как пространство гармонических функций $u \in h(B)$, для которых конечна квазинорма

$$\|u\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u;r)dr\right)^{1/q}, & 0<q<\infty, \\ \sup\limits_{0<r<1} (1-r)^{\alpha} M_p(u;r), & q=\infty. \end{cases}$$

Если $(1-r)^{\alpha} M_p(u;r) = o(1)$ при $r \to 1^-$, то говорят, что гармоническая функция $u(x)$ принадлежит малому пространству $h_0(p,\infty,\alpha)$. При $p=q<\infty$ пространства $h(p,q,\alpha)$ совпадают с весовыми классами Бергмана, а при $q=\infty$ их обычно называют весовыми пространствами Харди.

Много работ посвящено пространствам $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой или их подпространствам, состоящим из голоморфных, плюригармонических или гармонических функций в круге, шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$.

Пространства со смешанной нормой для голоморфных в единичном круге функций были введены Харди и Литтлвудом в [1], [2]. Вложения с разными индексами и связи с обычными классами Харди $H^p(B_2)$ были первыми результатами, для этих классов. Часть этих результатов изложена в монографии [3]. Флетт [4], [5] значительно обобщил и усилил многие оригинальные результаты Харди и Литтлвуда и упростил их доказательства. В дальнейшем были получены многомерные обобщения результатов Харди, Литтлвуда, Флетта в областях из $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$. Пространства $h(p,p,\alpha), h(p,q,\alpha)$ в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$ изучались в работах [6-11], см. также содержащиеся там ссылки. Пространства $h(p,q,\alpha)$, состоящие из n-гармонических функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$, изучались в статьях [12], [13]. Известно, что при $0<p<1$ классы Харди $h^p(B_n)$ имеют сложную структуру и сильно отличаются от классов Харди $h^p(B_n)$ с $p \geq 1$, см. [14]. Подобное наблюдается и в случае пространств $h(p,q,\alpha)$. Если $1 \leq p,q \leq \infty$, то $h(p,q,\alpha)$ являются банаховыми пространствами с нормой $\|\cdot\|_{p,q,\alpha}$. Если $0<p<1$ либо $0<q<1$, то $h(p,q,\alpha)$ — полные метрические пространства с инвариантной метрикой $d(u,v) = \|u-v\|_{p,q,\alpha}^{\min\{p,q\}}$ и квазинормой $\|\cdot\|_{p,q,\alpha}$.

В настоящей статье устанавливаются непрерывные вложения типа Харди–Литтлвуда для пространств $h(p,q,\alpha)$ в шаре из $\mathbb{R}^n$. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ *следующие вложения непрерывны:*

(i)	$h(p,q,\alpha) \subset h(p,q,\beta)$,	$\beta > \alpha$,
(ii)	$h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\alpha)$,	$0 < p_0 < p \leq \infty$,
(iii)	$h(p,q,\alpha) \subset h(p,q_0,\alpha)$,	$0 < q < q_0 \leq \infty$,
(iv)	$h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\beta)$,	$\beta \geq \alpha + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}$, $p \leq p_0 \leq \infty$,
(v)	$h(p,q,\alpha) \subset h(\infty,q_0,\beta)$,	$\beta > \alpha + \frac{n-1}{p}$, $0 < q_0 \leq \infty$,
(vi)	$h(p,q,\alpha) \subset h(p,q_0,\beta)$,	$\beta > \alpha$, $0 < q_0 \leq \infty$,
(vii)	$h^p \subset h\left(p_0, \infty, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right)$,	$0 < p < p_0 \leq \infty$,
(viii)	$h^p \subset h\left(p_0, q, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right)$,	$1 < p < p_0 \leq \infty$, $p \leq q \leq \infty$,
(ix)	$h^p \subset h(p_0,q,\beta)$,	$\beta > \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}$, $0 < p < p_0 \leq \infty$.
(x)	*Если* $u \in h(p,q,\alpha)$, $0 < q < \infty$,	*то* $u \in h_0(p,\infty,\alpha)$.

2. Предварительные леммы

Для доказательства Теоремы 1.1 нам потребуется несколько лемм.

Символы $C(\alpha, \beta, \dots), c_\alpha$ и т.п. всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно различные в разных местах и зависящие только от указанных индексов $\alpha, \beta, \dots$. Символ $A \approx B$ для $A, B > 0$ означает, что существуют положительные постоянные c_1 и c_2, независимые от участвующих функций и переменных, такие, что $c_1 A \leq B \leq c_2 A$. Для любого p, $1 \leq p \leq \infty$, через $p' = p/(p-1)$ обозначим сопряженный индекс (полагая также $1/\infty = 0$ и $1/0 = +\infty$).

Лемма 2.1. *Обозначим шар с центром в точке* $x = r\zeta \in B$ *и радиусом* $\frac{1-r}{2}$ *через*

$$B_x = \left\{ y = \rho\xi \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \frac{1-|x|}{2} \right\} \subset B. \tag{2.1}$$

Тогда

$$1 - |x| < |\xi - \rho x| < 3(1-|x|) \qquad \text{для всех} \quad y = \rho\xi \in B_x.$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Зафиксируем произвольную точку $x = r\zeta \in B$. Если $0 \le r \le \frac{1}{3}$, то искомое неравенство очевидно, так как $|\xi - \rho x| < 2$ и $1 - r \ge \frac{2}{3}$. Положим $\frac{1}{3} < r < 1$. Заметим, что начало координат лежит вне шара B_x, и

$$\frac{1}{2}(1-r) < 1-|y| < \frac{3}{2}(1-r), \qquad \rho'' - \rho' = 1-r, \quad 0 < \rho' < |y| < \rho'', \quad y = \rho\xi \in B_x,$$

где

$$\rho' = r - \frac{1-r}{2} = \frac{3r-1}{2}, \qquad \rho'' = r + \frac{1-r}{2} = \frac{1+r}{2}. \tag{2.2}$$

Через $\theta \in (0, \pi/2)$ обозначим угол между векторами ζ и ξ. Легко видеть, что

$$\cos\frac{\theta}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin^2\frac{\theta}{2} < \frac{\sin^2\theta}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{1-r}{2r}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\xi - \rho x|^2 &= 1 + \rho r - 2\rho r\cos\theta = (1-\rho r)^2 + 4\rho r \sin^2\frac{\theta}{2} < \\ &< (1-\rho' r)^2 + 2\rho r\left(\frac{1-r}{2r}\right)^2 = \left(1 - \frac{3r-1}{2}r\right)^2 + \frac{\rho}{2r}(1-r)^2 = \\ &= (1-r)^2(1+3r/2)^2 + \frac{\rho}{2r}(1-r)^2 < \frac{31}{4}(1-r)^2 < 9(1-r)^2. \end{aligned}$$

□

Лемма 2.2. *Каждая функция $u \in h^p(B)$ с $0 < p \le \infty$ допускает оценку*

$$|u(x)| \le C(p,n)\|u\|_{h^p}(1-|x|)^{-(n-1)/p}, \qquad x \in B,$$

или в терминах вложения $h^p \subset h\left(\infty, \infty, \frac{n-1}{p}\right)$.

Доказательство. Для фиксированной точки $x \in B$ и шара B_x, см. (1), запишем неравенство Феффермана–Стейна [15] ($0 < p < \infty$), используя обозначения (2),

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\le \frac{C(p,n)}{(1-r)^n}\int_{B_x}|u(y)|^p\,dy \le \frac{C(p,n)}{(1-r)^n}\int_{\rho'<|y|<\rho''}|u(y)|^p\rho^{n-1}d\rho d\sigma(\xi) \le \\ &\le \frac{C(p,n)}{(1-r)^n}\int_{\rho'}^{\rho''}M_p^p(u;\rho)d\rho. \end{aligned}$$

Если $0 \le r \le \frac{1}{3}$, то

$$|u(x)|^p \le \frac{C(p,n)}{(1-r)^n}\int_0^{\rho''}M_p^p(u;\rho)d\rho \le C(p,n)\sup_{0<\rho<2/3}M_p^p(u;\rho) \le C(p,n)\|u\|_{h^p}^p,$$

что очевидно влечет искомое неравенство.

Если же $\frac{1}{3} < r < 1$, то поскольку $\frac{1}{2}(1-r) < 1-\rho < \frac{3}{2}(1-r)$, можем оценить

$$|u(x)|^p \le \frac{C(p,n)}{(1-r)^n} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u;\rho)d\rho \le$$
$$\le \frac{C(p,n)}{(1-r)^n}(\rho''-\rho') \sup_{\rho'<\rho<\rho''} M_p^p(u;\rho) \le \frac{C(p,n)}{(1-r)^{n-1}}\|u\|_{h^p}^p.$$

□

Лемма 2.3. *Если $u \in h^p(B)$ и $0 < p < p_0 \le \infty$, то*

$$M_{p_0}(u;r) \le C(p,p_0,n)\|u\|_{h^p}(1-r)^{-(n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}\right)}, \qquad 0 \le r < 1,$$

или в терминах вложения $h^p \subset h\left(p_0, \infty, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right)$.

Доказательство. Заметим, что при $p_0 = \infty$ лемма сводится к Лемме 2. Поэтому положим $0 < p < p_0 < \infty$. Тогда по Лемме 2

$$M_{p_0}^{p_0}(u;r) = \int_S |u(r\zeta)|^{p_0-p}|u(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \le M_\infty^{p_0-p}(u;\rho)M_p^p(u;\rho) \le$$
$$\le C(p,p_0,n)\Big[\|u\|_{h^p}(1-r)^{-(n-1)/p}\Big]^{p_0-p} M_p^p(u;\rho) \le$$
$$\le C(p,p_0,n)\|u\|_{h^p}^{p_0}(1-r)^{-(n-1)p_0\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}\right)}.$$

□

Лемма 2.4. *Справедливы следующие интегральные оценки:*

$$\int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - x|^{\alpha+n-1}} \approx \begin{cases} \dfrac{1}{(1-|x|)^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha < 0, \\ \log\dfrac{e}{1-|x|}, & \alpha = 0, \end{cases} \qquad x \in B,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta}dt \approx \begin{cases} \dfrac{1}{(1-r)^{\beta-\alpha}}, & \beta > \alpha, \\ 1, & \beta < \alpha, \\ \log\dfrac{e}{1-r}, & \beta = \alpha, \end{cases} \qquad 0 \le r < 1,\ \alpha > 0.$$

Во всех оценках неявно участвующие постоянные зависят лишь от α, β, n.

Доказательства оценок можно найти в [7], [9], [16].

Следующая лемма показывает, что поведение гармонической функции $u(x)$ в окрестности начала координат в сущности не влияет на значение ее квазинормы $\|u\|_{p,q,\alpha}$ с точностью до эквивалентности.

Лемма 2.5. *Для любых* $0 < p, q \le \infty, \alpha \in \mathbb{R}$ *и всех* $u \in h(B)$ *справедливы неравенства*

$$\|u\|_{p,q,\alpha} \le C(p,q,\alpha,n)\left(\int_{1/2}^{1}(1-r)^{\alpha q-1}M_p^q(u;r)dr\right)^{1/q}, \quad \textit{если} \quad 0<q<\infty,$$

$$\|u\|_{p,\infty,\alpha} \le C(p,\alpha,n)\sup_{1/2<r<1}(1-r)^{\alpha}M_p(u;r), \quad \textit{если} \quad q=\infty.$$

Доказательство. Достаточно доказать усеченные неравенства

$$\int_0^{1/2}(1-r)^{\alpha q-1}M_p^q(u;r)dr \le C(p,q,\alpha,n)\int_{1/2}^{1}(1-r)^{\alpha q-1}M_p^q(u;r)dr, \quad \text{при} \quad 0<q<\infty,$$

$$\sup_{0<r<1/2}(1-r)^{\alpha}M_p(u;r) \le C(p,\alpha,n)\sup_{1/2<r<1}(1-r)^{\alpha}M_p(u;r), \quad \text{при} \quad q=\infty.$$

Если $1 \le p < \infty$, то функция $|u|^p$ субгармонична, а интегральные средние $M_p(u;r)$ монотонно возрастают по r (при $1 \le p \le \infty$). Поэтому в этом случае доказательство элементарно. Положим $0<p<1$ и рассмотрим теперь три случая.

Случай $0<p<1, q=\infty$**.** Возьмем произвольную точку $x, |x|=3/4$, и шар $B_{1/8}(x)$ с центром в точке x и радиусом $1/8$. По неравенству Феффермана-Стейна [15]

$$\begin{aligned}|u(x)|^p &\le \frac{C(p,n)}{(1/8)^n}\int_{B_{1/8}(x)}|u(y)|^p dy \le C(p,n)\int_{5/8<|y|<7/8}|u(y)|^p dy \le \\ &\le C(p,n)\int_{5/8}^{7/8}M_p^p(u;\rho)\,d\rho \le C(p,n)\sup_{5/8<\rho<7/8}M_p^p(u;\rho) \le \\ &\le C(p,\alpha,n)\sup_{1/2<\rho<1}(1-\rho)^{\alpha p}M_p^p(u;\rho), \qquad |x|=3/4.\end{aligned}$$

Отсюда, используя принцип максимума для субгармонической функции $|u|$,

$$\begin{aligned}\sup_{0<\rho<1/2}(1-\rho)^{\alpha}M_p(u;\rho) &\le \sup_{0<\rho<3/4}M_p(u;\rho) \le \sup_{|x|<3/4}|u(x)| = \\ &= \max_{|x|=3/4}|u(x)| \le C(p,\alpha,n)\sup_{1/2<\rho<1}(1-\rho)^{\alpha}M_p(u;\rho).\end{aligned}$$

Случай $0<p<1, 0<p\le q<\infty$**.** Воспользуемся уже доказанным неравенством

$$|u(x)|^p \le C(p,n)\int_{5/8}^{7/8}M_p^p(u;\rho)\,d\rho, \qquad |x|=3/4. \tag{2.3}$$

Затем применим неравенство Гельдера с индексами $\frac{q}{p}$ и $\left(\frac{q}{p}\right)'$,

$$|u(x)|^p \le C(p,n)\int_{5/8}^{7/8} M_p^p(u;\rho)\,d\rho \le C(p,q,n)\left(\int_{5/8}^{7/8} M_p^q(u;\rho)\,d\rho\right)^{p/q}.$$

Следовательно, для любой точки x, $|x| = 3/4$, получаем

$$|u(x)|^q \le C(p,q,n)\int_{5/8}^{7/8} M_p^q(u;\rho)\,d\rho \le C(p,q,\alpha,n)\int_{5/8}^{7/8}(1-\rho)^{\alpha q-1}M_p^q(u;\rho)\,d\rho \le$$
$$\le C(p,q,\alpha,n)\int_{1/2}^{1}(1-\rho)^{\alpha q-1}M_p^q(u;\rho)\,d\rho.$$

Отсюда, используя принцип максимума для субгармонической функции $|u|$,

$$\int_0^{1/2}(1-\rho)^{\alpha q-1}M_p^q(u;\rho)\,d\rho \le C(q,\alpha)\sup_{0<r<1/2} M_p^q(u;\rho) \le C(q,\alpha)\sup_{|x|<1/2}|u(x)|^q \le$$
$$\le C(q,\alpha)\sup_{|x|<3/4}|u(x)|^q = C(q,\alpha)\max_{|x|=3/4}|u(x)|^q \le$$
$$\le C(p,q,\alpha,n)\int_{1/2}^{1}(1-\rho)^{\alpha q-1}M_p^q(u;\rho)\,d\rho, \tag{2.4}$$

что и требовалось доказать.

Случай $0 < q \le p < 1$**.** Вновь воспользуемся неравенством (3), но с заменой p на q,

$$|u(x)|^q \le C(q,n)\int_{5/8}^{7/8} M_q^q(u;\rho)\,d\rho, \qquad |x| = 3/4.$$

Применим неравенство Гельдера с индексами $\frac{p}{q}$ и $\left(\frac{p}{q}\right)'$,

$$|u(x)|^q \le C(q,n)\int_{5/8}^{7/8}\int_S |u(\rho\xi)|^q d\sigma(\xi)\,d\rho \le C(q,n)\int_{5/8}^{7/8}\left(\int_S |u(\rho\xi)|^p d\sigma(\xi)\right)^{q/p} d\rho =$$
$$= C(q,n)\int_{5/8}^{7/8} M_p^q(u;\rho)\,d\rho \le C(q,\alpha,n)\int_{1/2}^{1}(1-\rho)^{\alpha q-1}M_p^q(u;\rho)\,d\rho.$$

Оставшаяся часть доказательства выполняется как в (4). □

3. Доказательство Теоремы 1.1

Ввиду Леммы 2.5 все неравенства с нормами и квазинормами достаточно доказать вне некоторой окрестности начала координат.

Доказательства вложений **(i)** и **(ii)** очевидны. Вложение (ii) очевидно ввиду монотонного возрастания средних $M_p(u;r)$ по p.

(iii) Доказательство вложения начнем со случая $q_0 = \infty$, т.е. $h(p,q,\alpha) \subset h(p,\infty,\alpha)$. Заметим, что при $1 \le p \le \infty$ интегральные средние $M_p(u;r)$ возрастают по r. Доказательство вложения $h(p,q,\alpha) \subset h(p,\infty,\alpha)$ в этом случае элементарно:

$$\|u\|^q_{p,q,\alpha} \ge \int_\rho^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u;r)\,dr \ge C(\alpha,q) M_p^q(u;\rho)(1-\rho)^{\alpha q}, \qquad 0<\rho<1.$$

Положим $0<p<1$. Достаточно доказать неравенство

$$\sup_{1/3<r<1} (1-r)^\alpha M_p(u;r) \le C(p,q,\alpha,n)\|u\|_{p,q,\alpha}.$$

Зафиксируем точку x, $\frac{1}{3} < |x| < 1$. Как и в доказательстве Леммы 2.2 неравенство Фефფермана–Стейна [15] для шара B_x (1), а также Лемма 2.1 приводят к

$$|u(x)|^p \le \frac{C(p,n)}{(1-r)^n}\int_{B_x} |u(y)|^p dy \le C(p,n)\int_{\rho'<|y|<\rho''} \frac{|u(y)|^p}{|\xi-\rho x|^n} dy. \tag{3.1}$$

Интегрирование и оценка Леммы 2.4 с тождеством $|\xi-\rho r\zeta| = |\zeta-\rho r\xi|$ влекут

$$M_p^p(u;r) \le C(p,n)\int_{\rho'<|y|<\rho''} |u(y)|^p \left(\int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{|\xi-\rho r\zeta|^n}\right) dy \le$$

$$\le C(p,n)\int_{\rho'<|y|<\rho''} \frac{|u(y)|^p}{1-\rho r} dy \le \frac{C(p,n)}{1-r}\int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u;\rho)\,d\rho.$$

Случай $p<q<\infty$**.** По неравенству Гельдера с индексами $\frac{q}{p}$ и $\left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{1}{1-p/q}$,

$$(1-r)M_p^p(u;r) \le C(p,n)\int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u;\rho)\,d\rho \le C(p,n)\left(\int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u;\rho)\,d\rho\right)^{p/q} (\rho''-\rho')^{1-p/q}.$$

Отсюда

$$M_p(u;r) \le \frac{C(p,n)}{(1-r)^{1/q}}\left(\int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u;\rho)\,d\rho\right)^{1/q}, \qquad \frac{1}{3}<r<1.$$

Поскольку $\frac{1}{2}(1-r) < 1-\rho < \frac{3}{2}(1-r)$, то

$$M_p(u;r) \le \frac{C(p,q,\alpha,n)}{(1-r)^{1/q}(1-r)^{(\alpha q-1)/q}}\left(\int_{\rho'}^{\rho''} (1-\rho)^{\alpha q-1} M_p^q(u;\rho)\,d\rho\right)^{1/q} \le \frac{C\|u\|_{p,q,\alpha}}{(1-r)^\alpha},$$

что и требовалось показать.

Случай $q \le p < 1$**.** Запишем неравенство (3.1) с q вместо p,

$$|u(x)|^q \le C(q,n)\int_{\rho'<|y|<\rho''} \frac{|u(y)|^q}{|\xi-\rho x|^n} dy.$$

Заменим x на Qx, где Q – произвольное ортогональное линейное преобразование $Q:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. $|Qx| = |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Вспомним, что поверхностная мера σ инвариантна при вращениях, что значит $\sigma\big(Q(G)\big) = \sigma(G)$ для каждого борелевского множества $G \subset S$ и каждого ортогонального преобразования Q. Получаем

$$|u\big(Qx\big)|^q \le C(q,n) \int_{\rho'}^{\rho''} \int_S \frac{|u(\rho\xi)|^q}{|\xi - \rho Qx|^n} \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\xi).$$

Произведя в интеграле замену $\xi \mapsto Q\xi$, получим

$$|u\big(Qx\big)|^q \le C(q,n) \int_{\rho'}^{\rho''} \int_S \frac{|u(\rho Q\xi)|^q}{|\xi - \rho x|^n} \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\xi).$$

Применяя неравенство Минковского с индексом $\frac{p}{q} \ge 1$ и тождество с интегралом по ортогональной группе

$$M_p(F;|z|) = \left(\int |F(Qz)|^p dQ\right)^{1/p}, \qquad z \in B,$$

находим, используя также оценки Леммы 4,

$$M_p^q(u;r) \le C(q,n) \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u;\rho) \int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - \rho x|^n}\, d\rho \le$$

$$\le C(q,n) \int_{\rho'}^{\rho''} \frac{M_p^q(u;\rho)}{1-\rho r}\, d\rho \le \frac{C(q,n)}{1-r} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u;\rho)\, d\rho, \qquad \frac{1}{3} < r < 1.$$

Поскольку $\frac{1}{2}(1-r) < 1-\rho < \frac{3}{2}(1-r)$, то как и в предыдущем случае получаем

$$(1-r)^\alpha M_p(u;r) \le C\left(\int_{\rho'}^{\rho''} (1-\rho)^{\alpha q-1} M_p^q(u;\rho)\, d\rho\right)^{1/q} \le C\|u\|_{p,q,\alpha}. \tag{3.2}$$

Вложение $h(p,q,\alpha) \subset h(p,\infty,\alpha)$ полностью доказано. Теперь общий случай $0 < q < q_0 < \infty$ с конечным q_0 сводится к доказанному простой оценкой:

$$\|u\|_{p,q_0,\alpha}^{q_0} \le \|u\|_{p,\infty,\alpha}^{q_0-q}\|u\|_{p,q,\alpha}^q \le C\|u\|_{p,q,\alpha}^{q_0-q}\|u\|_{p,q,\alpha}^q = C\|u\|_{p,q,\alpha}^{q_0}.$$

(iv) Вначале докажем случай $p_0 = \infty$, т.е. вложение $h(p,q,\alpha) \subset h\left(\infty, q, \alpha + \frac{n-1}{p}\right)$.

В случае $0 < p < q < \infty$, как и в Лемме 2.2 и (iii) имеем неравенство

$$M_\infty^p(u;r) \le \frac{C(p,n)}{(1-r)^n} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u;\rho)\, d\rho \le \frac{C(p,n)}{(1-r)^{n-1}} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u;\rho) \frac{d\rho}{1-\rho},$$

По неравенству Гельдера с индексами q/p и $(q/p)'$

$$M_\infty^q(u;r) \le \frac{C(p,q,n)}{(1-r)^{(n-1)q/p}} \left(\int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u;\rho) \frac{d\rho}{1-\rho}\right)^{q/p} \le$$

$$\le \frac{C(p,q,n)}{(1-r)^{(n-1)q/p}} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u;\rho) \frac{d\rho}{1-\rho}.$$

Проинтегрируем с весом и затем применим теорему Фубини

$$
\begin{aligned}
\|u\|^q_{\infty,q,\alpha+(n-1)/p} &= \int_0^1 (1-r)^{(\alpha+\frac{n-1}{p})q-1} M^q_\infty(u;r)\,dr \le \\
&\le C(p,q,n)\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1}\left(\int_{\rho'}^{\rho''} M^q_p(u;\rho)\frac{d\rho}{1-\rho}\right)dr = \\
&= C(p,q,n)\int_0^1 M^q_p(u;\rho)\left(\int_{2\rho-1}^{(2\rho+1)/3}(1-r)^{\alpha q-1}dr\right)\frac{d\rho}{1-\rho} = \\
&= C(p,q,\alpha,n)\|u\|^q_{p,q,\alpha}.
\end{aligned}
$$

В случае $0<p<q=\infty$ доказательство опускаем, поскольку оно проще и схоже с тем, что в Лемме 2.2.

В случае $0<q\le p\le\infty$ доказательство аналогично. Вложение $h(p,q,\alpha)\subset h\left(\infty,q,\alpha+\frac{n-1}{p}\right)$ доказано. Итак, искомое вложение

$$
h(p,q,\alpha)\subset h\left(p_0,q,\alpha+\frac{n-1}{p}-\frac{n-1}{p_0}\right),\qquad 0<p\le p_0\le\infty,
$$

доказано в крайнем случае $p_0=\infty$, а для $p_0=p$ — очевидно. Согласно версии интерполяционной теоремы Рисса–Торина для квазинормированных пространств (см. [17], [18], [19]), отсюда получаем справедливость искомого вложения для всех $0<p\le p_0\le\infty$.

(v) Вложение $h(p,q,\alpha)\subset h(\infty,q_0,\beta)$, $\beta>\alpha+\frac{n-1}{p}$, $0<q_0\le\infty$, вытекает из вложения $h(p,q,\alpha)\subset h(\infty,\infty,\alpha+\frac{n-1}{p})$ и оценки

$$
|u(x)|\le C(p,q,\alpha,n)\frac{\|u\|_{p,q,\alpha}}{(1-r)^{\alpha+\frac{n-1}{p}}},\qquad x=r\zeta\in B.
$$

Действительно, при $0<q_0<\infty$ по Лемме 2.4 будем иметь

$$
\begin{aligned}
\|u\|^{q_0}_{\infty,q_0,\beta} &= \int_0^1 (1-r)^{\beta q_0-1} M^{q_0}_\infty(u;r)dr \le \\
&\le C\|u\|^{q_0}_{p,q,\alpha}\int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta q_0-1}}{(1-r)^{\alpha q_0+(n-1)q_0/p}}dr \le C(p,q,\alpha,\beta,q_0,n)\|u\|^{q_0}_{p,q,\alpha}.
\end{aligned}
$$

(vi) Вложение (vi) достаточно доказать для наиболее широкого класса $h(p,\infty,\alpha)$, т.е. докажем

$$
h(p,\infty,\alpha)\subset h(p,q_0,\beta),\qquad \beta>\alpha,\ 0<q_0\le\infty,
$$

Положим $0 < q_0 < \infty$, воспользуемся вложением (iii) и Леммой 2.4,

$$\|u\|^{q_0}_{p,q_0,\beta} = \int_0^1 (1-r)^{\beta q_0 - 1} M_p^{q_0}(u;r)dr \le$$
$$\le C\|u\|^{q_0}_{p,\infty,\alpha} \int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta q_0 - 1}}{(1-r)^{\alpha q_0}} dr \le C(p,\alpha,\beta,q_0,n)\|u\|^{q_0}_{p,\infty,\alpha}.$$

(vii) Вложение (vii) доказано в Лемме 2.3.

(viii) В силу вложения (iii) вложение (viii) достаточно доказать для $q = p$ (т.е. для наиболее узкого класса), именно

$$h^p \subset h\left(p_0, p, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right), \qquad 1 < p < p_0 \le \infty. \tag{3.3}$$

Кроме того, случай $p_0 = \infty$ вытекает из остальных случаев с конечным $p_0 < \infty$, поскольку в силу вложения (iv)

$$h^p \subset h\left(p_0, p, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right) \subset h\left(\infty, p, \frac{n-1}{p}\right).$$

Таким образом, остается доказать вложение (3.3) для конечных $1 < p < p_0 < \infty$.

Воспользуемся методом из [5]. Введем оператор T и меру ν,

$$Tu(r) := (1-r)^{-(n-1)/p_0} M_{p_0}(u;r), \qquad d\nu(r) := (n-1)(1-r)^{n-2}dr.$$

Поскольку $T(u_1+u_2)(r) \le T(u_1)(r) + T(u_2)(r)$, то T — сублинейный оператор. Согласно Лемме 2.3 найдется положительная постоянная $C_0 = C_0(p,p_0,n)$ такая, что

$$Tu(r) = (1-r)^{-(n-1)/p_0} M_{p_0}(u;r) \le C_0(1-r)^{-(n-1)/p}\|u\|_{h^p}, \qquad 0 < r < 1.$$

Отсюда для любого фиксированного $s > 0$ получим

$$\big\{0<r<1;\ Tu(r) > s\big\} \subset \Big\{0<r<1;\ C_0(1-r)^{-(n-1)/p}\|u\|_{h^p} > s\Big\} =$$
$$= \left\{0<r<1;\ 1-\Big(C_0\, s^{-1}\|u\|_{h^p}\Big)^{p/(n-1)} < r\right\} \subset (\lambda, 1),$$

где $\lambda = \max\Big\{0; 1-\big(C_0\, s^{-1}\|u\|_{h^p}\big)^{p/(n-1)}\Big\}$. Ясно, что при малых $s > 0$ имеем $\lambda = 0$, а при всех достаточно больших $s > 0$ получаем

$$\nu\Big(\big\{0<r<1;\ Tu(r) > s\big\}\Big) \le \nu(\lambda,1) = C_0^p\, s^{-p}\|u\|^p_{h^p}.$$

Это означает, что функция $Tu(r)$ принадлежит слабому пространству $L^p_{weak}(d\nu)$, т.е. T — оператор слабого типа (p,p) для всех $1 < p < \infty$. По интерполяционной теореме Марцинкевича (см., например, [18], [19]) T — оператор сильного типа (p,p) для всех $1 < p < \infty$,

$$C\|u\|^p_{h^p} \geq \|Tu\|^p_{L^p(d\nu)} = (n-1)\int_0^1 |Tu(r)|^p (1-r)^{n-2} dr =$$
$$= (n-1)\int_0^1 (1-r)^{p(n-1)(1/p-1/p_0)-1} M^p_{p_0}(u;r) dr = (n-1)\|u\|^p_{p_0,p,(n-1)(1/p-1/p_0)},$$

что завершает доказательство вложения (viii). В качестве дополнения отметим, что в предельном случае $p=1$ вложение (viii)

$$h^1 \subset h\big(p_0, 1, (n-1)(1-1/p_0)\big), \qquad 1 < p_0 \leq \infty,$$

ложно. Соответствующим контрпримером служит ядро Пуассона.

(ix) Вложение (ix) есть комбинация вложений (vi) и (iv). Действительно, для любого $\alpha > 0$ имеем

$$h^p \subset h(p,q,\alpha) \subset h\left(p_0, q, \alpha + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right).$$

(x) Утверждение (x) немедленно получается из неравенства (6), если устремить $r \to 1^-$.

Теорема 1.1 полностью доказана.

4. Приложения Теоремы 1.1

Рассмотрим гармонические векторы $U = (u_1, \dots, u_n)$ в шаре B, где $u_j(x) \in h(B)$ являются градиентами некоторой гармонической функции.

Обозначим через $\mathcal{H}(B)$ множество систем Рисса в шаре B, т.е. класс гармонических векторов $U = (u_1, \dots, u_n)$ в B, для каждого из которых найдется некоторая функция $h(x) \in h(B)$ такая, что $U = \nabla h$ в B.

Классы Харди, состоящие из вектор-функций $U \in \mathcal{H}(B)$, обозначим через $\mathcal{H}^p(B)$. Если же для вектор-функции $U \in \mathcal{H}(B)$ конечна смешанная "норма" $\|U\|_{p,q,\alpha} < +\infty$, то будем писать $U \in \mathcal{H}(p,q,\alpha)$.

Определим класс $S^p = S^p(B)$ субгармонических функций $w(x)$ в шаре B, удовлетворяющих условию Харди

$$\|w\|_{S^p} = \sup_{0<r<1} \left(\int_S |w(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{1/p} < +\infty, \qquad 0 < p < \infty.$$

Как показал контрпример ядра Пуассона, вложение (viii) Теоремы 1.1 для гармонических функций нельзя распространить на $p = 1$. Между тем, вложение (viii) Теоремы 1.1 справедливо при всех $0 < p < \infty$ для голоморфных функций в единичном круге, см. [1], [3, Теор.5.11], также как и для голоморфных функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$, см. [13].

Введенные выше системы Рисса $U \in \mathcal{H}(B)$ в $\mathbb{R}^n$ в некоторой степени замещают голоморфные функции на $\mathbb{R}^2$. Для систем Рисса доказанные в Теореме 1.1 вложения в некоторых случаях имеют более широкие области допустимых значений параметров.

Следствие 4.1. *При* $\frac{n-2}{n-1} < p < p_0 \le \infty$, $p \le q \le \infty$ *имеет место непрерывное вложение*

$$\mathcal{H}^p \subset \mathcal{H}\left(p_0, q, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right).$$

Доказательство. Случай $p > 1$ вытекает из такого же вложения (viii) для скалярнозначных гармонических функций. Положим $\frac{n-2}{n-1} < p = q \le 1$ и пусть $U = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{H}^p(B)$. Обозначим $\lambda = \lambda_n := \frac{n-2}{n-1}$. Тогда согласно результату Стейна и Вейса ([18], [19]) $W := |U|^\lambda$ и $W^{p/\lambda} = |U|^p$ являются субгармоническими функциями. Отсюда

$$M_{p/\lambda}^{p/\lambda}(W; r) = M_p^p(U; r), \qquad M_{p_0/\lambda}^{1/\lambda}(W; r) = M_{p_0}(U; r), \qquad p_0 > \lambda.$$

Поскольку W – субгармоническая функция класса Харди $S^{p/\lambda}$, то W имеет гармоническую мажоранту $v(x) \in h^{p/\lambda}$ в B с эквивалентными нормами Харди (см. [4]):

$$W(x) \le v(x), \quad x \in B, \qquad \|v\|_{h^{p/\lambda}} \le \|W\|_{S^{p/\lambda}}.$$

Отсюда, обозначая $p_1 = \frac{p}{\lambda} > 1$, $p_{01} = \frac{p_0}{\lambda} > 1$, используя уже доказанный случай, выводим

$$\begin{aligned}
\|U\|^p_{p_0,p,(n-1)/p-(n-1)/p_0} &= \int_0^1 (1-r)^{p(n-1)(1/p-1/p_0)-1} M^p_{p_0}(U; r)dr = \\
&= \int_0^1 (1-r)^{p_1(n-1)(1/p_1-1/p_{01})-1} M^{p_1}_{p_{01}}(W; r)dr = \\
&= \|W\|^{p_1}_{p_{01},p_1,(n-1)/p-(n-1)/p_0} \le \|v\|^{p_1}_{p_{01},p_1,(n-1)/p-(n-1)/p_0} \le \\
&\le \|v\|^{p_1}_{h^{p_1}} \le C\|W\|^{p_1}_{S^{p_1}} = C\|U\|^p_{\mathcal{H}^p}.
\end{aligned}$$

□

Системы Рисса можно обобщить следующим образом. Для некоторой достаточно гладкой функции $v(x)$ ее градиент $\nabla^m v$ порядка $m \in \mathbb{N}$ определяется как вектор-функция, компоненты которой частные производные $\partial^\gamma v$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, порядка $|\gamma| = m$ в некотором фиксированном порядке. Обозначим через $\mathcal{H}_m(B)$, $m \in \mathbb{N}$, класс гармонических векторов $U = (u_1, \dots, u_n)$ в шаре B, для каждого из которых найдется некоторая функция $h(x) \in h(B)$ такая, что $U = \nabla^m h$ в B. Пространства Харди и со смешанной нормой, состояшие из функций $U \in \mathcal{H}_m(B)$, будем обозначать через $\mathcal{H}^p_m$ и $\mathcal{H}_m(p, q, \alpha)$, соответственно.

Следствие 4.2. *При* $m \in \mathbb{N}$, $\frac{n-2}{m+n-2} < p < p_0 \le \infty$, $p \le q \le \infty$ *имеет место непрерывное вложение*

$$\mathcal{H}^p_m \subset \mathcal{H}_m\left(p_0, q, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right).$$

Доказательство. выводится вполне аналогичным образом как в Следствии 4.1. Нужно лишь вместо λ_n определить $\lambda = \lambda_{m,n} := \frac{n-2}{m+n-2}$ и воспользоваться субгармоничностью функции $|U|^\lambda$, $U \in \mathcal{H}_m(B)$, согласно результату Кальдерона и Зигмунда [20]. □

Вложение (viii) в частном случае $p_0 = \infty$, $1 < p = q < \infty$ приводит к усиленному варианту известного неравенства Фейера–Рисса.

Следствие 4.3. *Если* $1 < p < \infty$, *то для всех* $u(x) \in h(B)$

$$\int_0^1 (1-r)^{n-2} \sup_{\zeta \in S} |u(r\zeta)|^p \, dr \le C(p, n) \|u\|^p_{h^p}, \tag{4.1}$$

или в терминах вложения $h^p \subset h\left(\infty, p, \frac{n-1}{p}\right)$.

Классическое неравенство Фейера–Рисса можно найти, например, в монографии [3], а его некоторые отличные от (8) версии в шаре B — в статьях [21], [22], [8], [9]. Кроме того, результат Следствия 4.3 отвечает на вопрос Стевича [9, с.209].

Хотя в предельном случае $p = 1$ Следствие 4.3 ложно ввиду примера ядра Пуассона, тем не менее, как следует из Следствий 4.1 и 4.2, для систем Рисса и более специальных гармонических векторов неравенство (4.1) оказывается верным и для некоторых $p \le 1$.

Следствие 4.4. *Если* $\frac{n-2}{n-1} < p < \infty$, *то для всех* $U \in \mathcal{H}(B)$

$$\int_0^1 (1-r)^{n-2} \sup_{\zeta\in S} \left|U(r\zeta)\right|^p \, dr \le C(p,n) \left\|U\right\|^p_{\mathcal{H}^p}, \tag{4.2}$$

или в терминах вложения $\mathcal{H}^p \subset \mathcal{H}\left(\infty, p, \frac{n-1}{p}\right)$.

Следствие 4.5. *Если* $m \in \mathbb{N}$, $\frac{n-2}{m+n-2} < p < \infty$, *то для всех* $U \in \mathcal{H}_m(B)$ *справедливо неравенство (4.2) и соответствующее вложение* $\mathcal{H}^p_m \subset \mathcal{H}_m\left(\infty, p, \frac{n-1}{p}\right)$.

Наиболее примечательной разницей между пространствами $h(p,q,\alpha)$ в $\mathbb{R}^n$ и такими же пространствами голоморфных функций в единичном круге является тот факт, что при некоторых $\alpha \le 0$, $0 < p < 1$ гармонические пространства $h(p,q,\alpha)$ нетривиальны, т.е. содержат ненулевые функции. Это явление обсуждалось в [14], [13].

Нашей следующей задачей будет нахождение точных условий на индексы, при которых пространства $h(p,q,\alpha)$ тривиальны. Заметим, что хорошим примером нетривиальной функции пространства $h(p,q,\alpha)$ при подходящих $\alpha \le 0$, $0 < p < 1$ является ядро Пуассона $P(x) = P(x,\xi) = \frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^n}$, $x \in B$, $\xi \in S$. В следующей лемме найдены точные условия принадлежности ядра Пуассона пространствам $h(p,q,\alpha)$.

Лемма 4.1. *При* $0 < p \le \infty$, $0 < q < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *справедливы следующие утверждения:*

(*a*) *Если* $0 < p < \dfrac{n-1}{n}$, *то*

$$P(x) \in h(p,q,\alpha) \iff \alpha > -1;$$
$$P(x) \in h(p,\infty,\alpha) \iff \alpha \ge -1;$$
$$P(x) \in h_0(p,\infty,\alpha) \iff \alpha > -1;$$

(*b*) *Если* $\dfrac{n-1}{n} < p \le \infty$, *то*

$$P(x) \in h(p,q,\alpha) \iff \alpha > (n-1)(1-1/p);$$
$$P(x) \in h(p,\infty,\alpha) \iff \alpha \ge (n-1)(1-1/p);$$

$$P(x) \in h_0(p,\infty,\alpha) \iff \alpha > (n-1)(1-1/p);$$

$$(c) \quad \textit{Если} \quad p = \frac{n-1}{n}, \ \textit{то} \quad \begin{aligned} &P(x) \in h(p,q,\alpha) \iff \alpha > -1;\\ &P(x) \in h(p,\infty,\alpha) \iff \alpha > -1;\\ &P(x) \in h_0(p,\infty,\alpha) \iff \alpha > -1. \end{aligned}$$

Доказательство. следует из Леммы 2.4 и точных оценок ядра Пуассона

$$M_p(P;r) \approx \begin{cases} 1-r, & \text{при} \quad 0 < p < \dfrac{n-1}{n}, \\ (1-r)^{-(n-1)(1-1/p)}, & \text{при} \quad \dfrac{n-1}{n} < p \le \infty, \\ (1-r)\left(\log \dfrac{e}{1-r}\right)^{1/p}, & \text{при} \quad p = \dfrac{n-1}{n}, \end{cases} \qquad 0 \le r < 1.$$

□

В следующей теореме выявлены точные условия тривиальности пространств $h(p,q,\alpha)$, т.е. когда они состоят только из нулевой функции.

Теорема 4.1. *Имеют место следующие утверждения:*

- *Если* $1 \le p \le \infty,\ 0 < q < \infty,$ *то* $h(p,q,\alpha) = \{0\} \iff \alpha \le 0;$
- *Если* $1 \le p \le \infty,$ *то* $h(p,\infty,\alpha) = \{0\} \iff \alpha < 0;$
- *Если* $1 \le p \le \infty,$ *то* $h_0(p,\infty,\alpha) = \{0\} \iff \alpha \le 0;$
- *Если* $0 < p < \dfrac{n-1}{n},\ 0 < q < \infty,$ *то* $h(p,q,\alpha) = \{0\} \iff \alpha \le -1;$
- *Если* $0 < p < \dfrac{n-1}{n},$ *то* $h(p,\infty,\alpha) = \{0\} \iff \alpha < -1;$
- *Если* $0 < p < \dfrac{n-1}{n},$ *то* $h_0(p,\infty,\alpha) = \{0\} \iff \alpha \le -1;$
- *Если* $\dfrac{n-1}{n} \le p < 1,\ 0 < q < \infty,$ *то* $h(p,q,\alpha) = \{0\} \iff \alpha \le (n-1)(1-1/p);$
- *Если* $\dfrac{n-1}{n} < p < 1,$ *то* $h(p,\infty,\alpha) = \{0\} \iff \alpha < (n-1)(1-1/p);$
- *Если* $\dfrac{n-1}{n} \le p < 1,$ *то* $h_0(p,\infty,\alpha) = \{0\} \iff \alpha \le (n-1)(1-1/p);$
- *Если* $p = \dfrac{n-1}{n},$ *то* $h(p,\infty,\alpha) = \{0\} \iff \alpha \le -1.$

Доказательство. При $1 \le p \le \infty$ результат следует из монотонности интегральных средних $M_p(u;r)$ по r. Утверждения для классов $h_0(p,\infty,\alpha)$ доказаны в Теореме 2.11 из [14]. В остальных случаях $0 < p < 1$, воспользовавшись вложениями (iii), (vi), (x) Теоремы 1 $h(p,q,\alpha) \subset h_0(p,\infty,\alpha)$, доказательство сводим к [14] и Лемме 4.1. $\square$

Основные результаты настоящей статьи докладывались на международной конференции Harmonic Analysis and Approximations, V, 2011, Tsaghkadzor, Armenia, посвященой 75-летию академика Н. У. Аракеляна.

Abstract. In this paper continuous embeddings in harmonic mixed norm spaces on the unit ball in $\mathbb{R}^n$ are established, generalizing some Hardy-Littlewood embeddings for similar spaces of holomorphic functions in the unit disc. Differences in indices between the spaces of harmonic and holomorphic spaces are revealed. As a consequence an analogue of classical Fejér-Riesz inequality is obtained. Embeddings in the special case of Riesz systems are also established.

Список литературы

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Some properties of fractional integrals (II)", Math. Z., **34**, 403 – 439 (1932).
[2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions", Quart. J. Math. (Oxford), **12**, 221 – 256 (1941).
[3] P. Duren, Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York, London (1970).
[4] T. M. Flett, "Inequalities for the pth mean values of harmonic and subharmonic functions with $p \le 1$", Proc. London Math. Soc., **20**, 249 – 275 (1970).
[5] T. M. Flett, "On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions", Proc. London Math. Soc., **20**, 749 – 768 (1970).
[6] M. Pavlović, "Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions", J. Math. Anal. Appl., **216**, 499 – 509 (1997).
[7] M. Jevtić and M. Pavlović, "Harmonic Bergman functions on the unit ball in $\mathbb{R}^n$", Acta Math. Hungar., **85**, 81 – 96 (1999).
[8] S. Stević, "On harmonic Hardy spaces and area integrals", J. Math. Soc. Japan, **56**, 339 – 347 (2004).
[9] S. Stević, "On harmonic function spaces. II", J. Comput. Anal. Appl., **10**, 205 – 228 (2008).
[10] A. I. Petrosyan, "On weighted classes of harmonic functions in the unit ball of $\mathbb{R}^n$", Complex Variables Theory Appl., **50**, 953 – 966 (2005).
[11] A. I. Petrosyan, "On weighted harmonic Bergman spaces", Demonstratio Math., **41**, 73 – 83 (2008).
[12] K. Avetisyan, "Continuous inclusions and Bergman type operators in n-harmonic mixed norm spaces on the polydisc", *J. Math. Anal. Appl.*, **291**, 727 – 740 (2004).
[13] K. Avetisyan, "Weighted integrals and Bloch spaces of n-harmonic functions on the polydisc", Potential Analysis, **29**, 49 – 63 (2008).
[14] A. B. Aleksandrov, "On boundary decay in the mean of harmonic functions", St. Petersburg Math. J., **7**, 507 – 542 (1996).
[15] C. Fefferman and E. M. Stein, "H^p spaces of several variables", Acta Math., **129**, 137 – 193 (1972).
[16] C. W. Liu and J. H. Shi, "Invariant mean-value property and $\mathcal{M}$-harmonicity in the unit ball of $\mathbb{R}^n$", Acta Math. Sinica, **19**, 187 – 200 (2003).
[17] T. Holmstedt, "Interpolation of quasi-normed spaces", Math. Scand., **26**, 177 – 199 (1970).

[18] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1970).
[19] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1971).
[20] A. P. Calderon and A. Zygmund, "On higher gradients of harmonic functions", Studia Math., **24**, 211 – 226 (1964).
[21] N. Du Plessis, "Spherical Fejér–Riesz theorems", J. London Math. Soc., **31**, 386 – 391 (1956).
[22] Y. Sagher, "On the Fejér–F. Riesz inequality in L^p", Studia Math., **61**, 269 – 278 (1977).

Поступила 20 декабря 2011