Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 5, 2015, стр. 3-16.

ОБ ОПЕРАТОРЕ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В $\mathbb{R}^n$

К. АВЕТИСЯН, Е. ТОНОЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mails: *avetkaren@ysu.am;* *etonoyan@ysu.am*

Аннотация. В статье введена новая форма дробной производной для функций, заданных в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$. В качестве приложения получено интегральное представление для гармонических в шаре функций с конечной смешанной нормой.

MSC2010 numbers: 26A33, 31B05, 31B10.

Ключевые слова: дробный интеграл; дробная производная; гармоническая функция; единичный шар в $\mathbb{R}^n$; пространство со смешанной нормой; ядро Пуассона–Бергмана.

1. Введение

Возникновение понятий дробного интегрирования и дифференцирования в XIX веке поначалу было связано с теорией интегральных и дифференциальных уравнений. Дробными интегралами и производными занимались Абель, Лиувилль, Риман, Адамар, Вейль, Харди, Литтлвуд, М. Рисс и другие, см. монографию Самко, Килбаса, Маричева [1], где можно найти подробные справки. Позднее, дробное интегродифференцирование нашло новые применения в теории функций. Оно оказалось весьма эффективным средством, в частности, в теории классических функциональных пространств, см. [2] – [9].

Одним из недостатков дробных интегралов и производных является их разнообразие и часто несовместимость друг с другом, в том числе в различных приложениях. Широкий выбор различных типов дробных интегралов и производных обращается в преимущество, когда нужно их приспособить к тому или иному применению.

В настоящей работе мы развиваем и применяем классическое интегродифференцирование Римана–Лиувилля в задачах из теории гармонических пространств в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Введем необходимые обозначения. Пусть $B = B_n$ — открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $S = \partial B$ — его граница, единичная сфера. Интегральные средние порядка p гармонической функции $u(x) = u(r\zeta)$ на сфере $|x| = r$ обозначены, как обычно, через

$$M_p(u;r) = \big\|u(r\cdot)\big\|_{L^p(S;d\sigma)}, \qquad 0 \leq r < 1,\ 0 < p \leq \infty,$$

где $d\sigma$ — $(n-1)$-мерная поверхностная лебегова мера на S, нормированная условием $\sigma(S) = 1$. Множество всех вещественных гармонических функций в шаре B обозначим через $h(B)$.

Определим пространство $h(p,q,\alpha)\big(0 < p,q \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R}\big)$ со смешанной нормой как пространство тех гармонических функций $u \in h(B)$, для которых конечна квазинорма

$$\|u\|_{h(p,q,\alpha)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(u;r)\,dr\right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{0<r<1} (1-r)^{\alpha} M_p(u;r), & q = \infty. \end{cases}$$

При $p = q < \infty$ пространства $h(p,q,\alpha)$ совпадают с весовыми классами Бергмана, а при $q = \infty$ их обычно называют весовыми пространствами Харди.

Много работ посвящено пространствам $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой или их аналогам, состоящим из голоморфных, плюригармонических или гармонических функций в круге или шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$.

Пространства со смешанной нормой для голоморфных в единичном круге функций были введены Харди и Литтлвудом [2],[3]. Позднее, Флетт [6],[7] значительно развил теорию, а в дальнейшем были получены многомерные обобщения результатов Харди, Литтлвуда, Флетта в областях из $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$. Пространства $h(p,p,\alpha), h(p,q,\alpha)$ в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$ изучались в работах [10]–[21], а пространства $h(p,q,\alpha)$, состоящие из n-гармонических функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$, изучались в статьях [22] – [24].

Основным нашим приложением дробных операторов в теории гармонических пространств является следующее интегральное представление в пространствах $h(p,q,\alpha)$ со смешанной нормой.

Теорема 1.1. *Пусть* $0 < p,q \leq \infty$, $\alpha > 0$, $u \in h(p,q,\alpha)$ *— произвольная функция. Пусть выполнено* $0 < p,q \leq \infty$, $\beta > \max\{\alpha + (n-1)(1/p - 1), \alpha\}$*, либо*

$1 \le p \le \infty$, $0 < q \le 1$, $\beta \ge \alpha$. *Тогда*

$$u(x) = \frac{2}{n\,\Gamma(\beta)} \int_B (1-|y|^2)^{\beta-1}\, P_\beta(x,y)\, u(y)\, dV(y), \qquad x \in B, \tag{1.1}$$

где $P_\beta(x,y)$ *— ядро Пуассона–Бергмана, определенное в параграфе 5.*

Замечание 1.1. *В частном случае* $p = q \ge 1$ *и* $\beta = \alpha$ *или для еще более узких классов аналогичное интегральное представление получено в* [10],[11],[13],[14], [18], *а с более общими весами — в* [17],[19]. *Для голоморфных функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$ *Теорему 1.1 при* $1 \le p, q \le \infty$ *можно найти в* [25],[26], *а для* n*-гармонических функций в полидиске — в* [22].

2. Дробное интегродифференцирование в единичном круге на плоскости

В этом параграфе мы приводим определение известного оператора D^α дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля и одну его модификацию $\mathcal{D}^\alpha$. Всегда будем считать, что при положительной степени α операторы D^α и $\mathcal{D}^\alpha$ представляют дробное дифференцирование порядка $\alpha > 0$, а при отрицательной степени α операторы D^α и $\mathcal{D}^\alpha$ выражают дробное интегрирование порядка $|\alpha| > 0$. В случае $\alpha = 0$ полагаем, что D^0 и $\mathcal{D}^0$ — тождественные операторы, т.е. $D^0 f = f$ и $\mathcal{D}^0 f = f$.

Определение 2.1. *(Дробное интегродифференцирование Римана-Лиувилля на* $\mathbb{R}^2$*) Пусть задана функция* $f(r)$ *одной переменной* $r \in [0,1)$. *Тогда*

$$D_2^{-\alpha} f(r) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tr)\, dt, \tag{2.1}$$

$$D_2^m f(r) := \left(\frac{d}{dr}\right)^m f(r), \qquad D_2^\alpha f(r) := D_2^{-(m-\alpha)} D_2^m f(r), \tag{2.2}$$

$$\mathcal{D}_2^{-\alpha} f(r) := r^{-\alpha} D_2^{-\alpha} f(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f(tr)\, dt, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{D}_2^\alpha f(r) := D_2^\alpha \Big\{ r^\alpha f(r) \Big\}, \tag{2.4}$$

где $0 \le r < 1,\ \alpha > 0,\ m \in \mathbb{Z},\ m \ge 0,\ m-1 < \alpha \le m.$

Нижний индекс 2 при операторах ставится, поскольку далее мы применяем их по отношению к функциям, заданным на плоскости, и в частности на единичном круге $\mathbb{D}$. В последующих разделах мы будем рассматривать операторы $\mathcal{D}^\alpha$ также по отношению к функциям, заданным в $\mathbb{R}^n$. Введение модификации $\mathcal{D}_2^\alpha$

обусловлено тем, что оператор D_2^α не сохраняет голоморфные или гармонические функции, а оператор $\mathcal{D}_2^\alpha$ — сохраняет, т.е. $\mathcal{D}_2^\alpha : H(\mathbb{D}) \longrightarrow H(\mathbb{D})$ и $\mathcal{D}_2^\alpha : h(\mathbb{D}) \longrightarrow h(\mathbb{D})$. Заметим, что оператор дифференцирования $\mathcal{D}_2^1$ первого порядка не совпадает с обычной частной или комплексной производной, именно $\mathcal{D}_2^1 f = \frac{\partial}{\partial r}(rf)$, которую называют радиальной производной функции f. Иногда будем писать $D_{2,r}^\alpha$ и $\mathcal{D}_{2,r}^\alpha$, чтобы указать переменную r, по которой выполняется интегрирование или дифференцирование.

Операторы D_2^α и $\mathcal{D}_2^\alpha$ хорошо приспособлены к применению к степенным функциям. Следующая лемма проверяется простыми вычислениями.

Лемма 2.1. *При* $\alpha > 0,\ k > -1,\ m \in \mathbb{Z},\ m \geq 0,\ D^\alpha \equiv D_2^\alpha,\ \mathcal{D}^\alpha \equiv \mathcal{D}_2^\alpha$ *имеют место следующие тождества:*

$$D^{-\alpha}\{r^k\} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\, r^{k+\alpha}, \tag{2.5}$$

$$D^{m}\{r^k\} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-m+1)}\, r^{k-m}, \qquad k-m \neq -1,-2,\dots, \tag{2.6}$$

$$D^{\alpha}\{r^{k+\alpha}\} = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)}\, r^{k}, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{D}^{-\alpha}\{r^k\} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\, r^{k}, \tag{2.8}$$

$$\mathcal{D}^{\alpha}\{r^k\} = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)}\, r^{k}. \tag{2.9}$$

Помимо определения 2.1 посредством дробных интегралов имеются другие способы определения дробного интегродифференцирования через разложения в степенные ряды, см. [1], [3], [5] – [7]. Подобные разложения удобны для распространения дробного интегродифференцирования на функции, заданные в $\mathbb{R}^n$.

3. Дробное интегрирование Римана–Лиувилля для гармонических и негармонических функций в $\mathbb{R}^n$

Вначале определим дробное интегродифференцирование для гармонических в $\mathbb{R}^n$ функций. Положим, что гармоническая функция $f(x) \in h(B)$ разложена в ряд по однородным сферическим гармоникам Y_{kj}

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_k} a_{kj}\, r^k\, Y_{kj}(\zeta) \equiv \sum_{k,j} a_{kj}\, r^k\, Y_{kj}(\zeta), \qquad x = r\zeta \in B, \tag{3.1}$$

где $d_k = \frac{(2k+n-2)(n+k-3)!}{(n-2)!\,k!}$ — размерность пространства $\mathcal{H}_k(S)$ сферических гармоник степени k. Теорию пространств $\mathcal{H}_k(S)$ можно найти, например, в монографиях [27],[16]. Хорошо известно понятие дробного интегродифференцирования (см. [1],[8], [10]–[20]) для гармонических функций (3.1) в $\mathbb{R}^n$, выраженное в виде ряда из сферических гармоник.

Определение 3.1.

$$\mathcal{D}^{-\alpha}_{n(ser)} f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k} \frac{\Gamma(k+n/2)}{\Gamma(\alpha+k+n/2)}\, a_{kj}\, r^k\, Y_{kj}(\zeta), \qquad \alpha \geq 0, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{n(ser)} f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k} \frac{\Gamma(\alpha+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)}\, a_{kj}\, r^k\, Y_{kj}(\zeta), \qquad \alpha \geq 0. \tag{3.3}$$

Другой, более общий способ определения дробного интегрирования порядка $\alpha > 0$ выражается через дробные интегралы Римана–Лиувилля подобно случаю $n = 2$.

Определение 3.2.

$$\begin{aligned} D^{-\alpha}_n f(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f(t\zeta)\, t^{n/2-1}\, dt = \\ &= \frac{r^{\alpha+n/2-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1} f(\xi x)\, \xi^{n/2-1}\, d\xi = D^{-\alpha}_2 \Big\{ r^{n/2-1} f(x) \Big\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Это прямое обобщение оператора $D^{-\alpha}_2$ (см. (2.1)) на n-мерный случай. Как и при $n = 2$ определяем его модификацию $\mathcal{D}^{-\alpha}_n$ (сравни с [12], [8]).

Определение 3.3.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{-\alpha}_{n(int)} f(x) &:= r^{-(\alpha+n/2-1)} D^{-\alpha}_n f(x) = r^{-(\alpha+n/2-1)} D^{-\alpha}_2 \Big\{ r^{n/2-1} f(x) \Big\} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1} f(\xi x)\, \xi^{n/2-1}\, d\xi. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Преимущество модификации $\mathcal{D}^{-\alpha}_{n(int)}$ перед оператором $D^{-\alpha}_n$ состоит в том, что оператор $\mathcal{D}^{-\alpha}_{n(int)}$ сохраняет гармонические функции, т.е. $\mathcal{D}^{-\alpha}_{n(int)} : h(B) \longrightarrow h(B)$. Этим же преимуществом обладают операторы $\mathcal{D}^{\pm\alpha}_{n(ser)}$. Поскольку оба оператора $\mathcal{D}^{-\alpha}_{n(ser)}$ и $\mathcal{D}^{-\alpha}_{n(int)}$ выражают первообразную порядка $\alpha > 0$ функции f, то возникает естественный вопрос об их связи. На самом деле эти операторы совпадают для гармонических функций, что выражается следующей леммой.

Лемма 3.1. *Два определения* (3.2) *и* (3.5) *для первообразной* $\mathcal{D}_n^{-\alpha}$ $(\alpha>0)$ *совпадают для гармонических функций в* B*, т.е.*

$$\mathcal{D}^{-\alpha}_{n(ser)}f(x)=\mathcal{D}^{-\alpha}_{n(int)}f(x)=:\mathcal{D}_n^{-\alpha}f(x),\quad x\in B,\quad f\in h(B).$$

Доказательство. Пусть гармоническая функция $f\in h(B)$ разложена в ряд по сферическим гармоникам по формуле (3.1). Тогда по определениям (3.5) и (3.3)

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{-\alpha}_{n(int)}f(x)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}f(tx)\,t^{n/2-1}\,dt=\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}\left(\sum_{k,j}a_{kj}\,t^kr^k\,Y_{kj}(\zeta)\right)t^{n/2-1}\,dt=\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k,j}a_{kj}\,r^k\,Y_{kj}(\zeta)\left(\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}\,t^{k+n/2-1}\,dt\right)=\\&=\sum_{k,j}\frac{\Gamma(k+n/2)}{\Gamma(\alpha+k+n/2)}\,a_{kj}\,r^k\,Y_{kj}(\zeta)=\mathcal{D}^{-\alpha}_{n(ser)}f(x),\end{aligned}$$

что и требовалось показать. □

В частности, действие оператора $\mathcal{D}_n^{-\alpha}$ на мономы типа r^γ $(\alpha>0,\ \gamma>-n/2)$ приводит к полезной формуле

$$\mathcal{D}_n^{-\alpha}\{r^\gamma\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}(tr)^\gamma\,t^{n/2-1}\,dt=\frac{\Gamma(\gamma+n/2)}{\Gamma(\alpha+\gamma+n/2)}\,r^\gamma.$$

4. Определение модификации дробной производной Римана–Лиувилля в $\mathbb{R}^n$

Если определение 3.3 оператора дробного интегрирования довольно естественно и удобно, то определение соответствующего оператора дробного дифференцирования вызывает некоторые проблемы. Мы уже определили дробное дифференцирование $\mathcal{D}^\alpha_{n(ser)}$ $(\alpha>0)$ для гармонической функции через разложение в ряд по сферическим гармоникам (3.2). Такое определение вполне естественно и немедленно влечет обратимость оператора, выраженное формулой, весьма полезной в приложениях,

$$\mathcal{D}^\alpha_{n(ser)}\mathcal{D}_n^{-\alpha}f(x)=\mathcal{D}_n^{-\alpha}\mathcal{D}^\alpha_{n(ser)}f(x)=f(x),\qquad f\in h(B).$$

Тем не менее, хотелось бы отстраниться от гармонических функций и их разложений в ряды по сферическим гармоникам и определить дробные производные как обратные к дробным первообразным для более общих функций. Поэтому будем решать следующую задачу: **найти явную и удобную форму для дробной производной $\mathcal{D}_n^\alpha$ как обратного оператора к дробному интегралу $\mathcal{D}_n^{-\alpha}$.** Естественное полугрупповое свойство $\mathcal{D}^\alpha\mathcal{D}^\beta f = \mathcal{D}^{\alpha+\beta} f$ желательно, но не обязательно.

Одна форма для дробной производной $\mathcal{D}_n^\alpha$ в неявном виде содержится в работах [10], [13] – [15], [19], [20]. Выразим ее в терминах оператора D_2^α, см. (2.2).

Определение 4.1. *(Дробная производная порядка $\alpha > 0$)*

$$\mathcal{D}_{n(int)}^\alpha f(x) := D_{2,t}^\alpha \Big[t^{\alpha+n/2-1} f(tx) \Big]_{t=1}, \qquad \alpha > 0, \tag{4.1}$$

где производная $D_{2,t}^\alpha$ берется по переменной t.

Все же, здесь из-за введения дополнительной переменной t такая форма для дробной производной создает некоторые неудобства в применении.

Следующее наше определение новой формы дробной производной более удобно и приспособлено к дальнейшим применениям.

Определение 4.2. *(Дробная производная порядка $\alpha > 0$)*

$$\mathfrak{D}_n^\alpha f(x) := r^{-(n/2-1)} D_2^\alpha \Big[r^{\alpha+n/2-1} f(x) \Big], \tag{4.2}$$

где производная $D_2^\alpha = D_{2,r}^\alpha$, см. (2.2), берется по переменной $r = |x|$, как обычно.

При $n = 2$, очевидно, оператор $\mathfrak{D}_2^\alpha$ сводится к $\mathcal{D}_2^\alpha$, см. (2.4).

Итак, на данный момент в $\mathbb{R}^n$ мы имеем три определения (3.3), (4.1) и (4.2) для дробной производной. На самом деле эти три определения совпадают для пригодных функций.

Теорема 4.1. *Три определения (3.3), (4.1) и (4.2) дробных производных совпадают для гармонических функций $f \in h(B)$, т.е.*

$$\mathcal{D}_{n(ser)}^\alpha f(x) = \mathcal{D}_{n(int)}^\alpha f(x) = \mathfrak{D}_n^\alpha f(x), \qquad \alpha > 0. \tag{4.3}$$

Для негармонических, но достаточно гладких функций f совпадают определения (4.1) и (4.2), т.е.

$$\mathcal{D}_{n(int)}^\alpha f(x) = \mathfrak{D}_n^\alpha f(x), \qquad \alpha > 0. \tag{4.4}$$

Доказательство. Вначале применим операторы к мономам типа r^k $(k \geq 0)$. Согласно (4.1), (2.7), (3.3),

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{n(int)}\{r^k\} = D^{\alpha}_{2,t}\Big[t^{\alpha+n/2-1}(tr)^k\Big]_{t=1} = r^k D^{\alpha}_{2,t}\Big[t^{\alpha+k+n/2-1}\Big]_{t=1} =$$
$$= r^k \frac{\Gamma(\alpha+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)}\Big[t^{k+n/2-1}\Big]_{t=1} = \frac{\Gamma(\alpha+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)}\, r^k,$$

Согласно (4.2), (2.7), (3.3),

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{n}\{r^k\} = r^{-(n/2-1)} D^{\alpha}_{2}\Big[r^{\alpha+n/2-1}\, r^k\Big] = r^{-(n/2-1)} D^{\alpha}_{2}\Big[r^{\alpha+k+n/2-1}\Big] =$$
$$= r^{-(n/2-1)} \frac{\Gamma(\alpha+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)}\Big[r^{k+n/2-1}\Big] = \frac{\Gamma(\alpha+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)}\, r^k.$$

Таким образом,

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{n(int)}\{r^k\} = \mathfrak{D}^{\alpha}_{n}\{r^k\} = \mathcal{D}^{\alpha}_{n(ser)}\{r^k\} = \frac{\Gamma(\alpha+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)}\, r^k. \tag{4.5}$$

Теперь пусть гармоническая в B функция f разложена в ряд (3.1). Ввиду (4.5) и линейности операторов получаем

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{n(int)} f(x) = \mathcal{D}^{\alpha}_{n(int)}\left[\sum_{k,j} a_{kj}\, r^k\, Y_{kj}(\zeta)\right] = \sum_{k,j} a_{kj}\, \left[\mathcal{D}^{\alpha}_{n(int)}\{r^k\}\right]\, Y_{kj}(\zeta) =$$
$$= \sum_{k,j} a_{kj}\, \left[\frac{\Gamma(\alpha+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)}\, r^k\right]\, Y_{kj}(\zeta) = \mathcal{D}^{\alpha}_{n(ser)} f(x),$$
$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{n} f(x) = \mathfrak{D}^{\alpha}_{n}\left[\sum_{k,j} a_{kj}\, r^k\, Y_{kj}(\zeta)\right] = \sum_{k,j} a_{kj}\, \left[\mathfrak{D}^{\alpha}_{n}\{r^k\}\right]\, Y_{kj}(\zeta) =$$
$$= \sum_{k,j} a_{kj}\, \left[\frac{\Gamma(\alpha+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)}\, r^k\right]\, Y_{kj}(\zeta) = \mathcal{D}^{\alpha}_{n(ser)} f(x),$$

что доказывает равенства (4.3).

Для негармонических функций f нам нужно доказать равенство (4.4), $\mathcal{D}^{\alpha}_{n(int)} f(x) = \mathfrak{D}^{\alpha}_{n} f(x)$, или что то же

$$D^{\alpha}_{2,t}\Big[t^{\alpha+n/2-1} f(tx)\Big]_{t=1} = r^{-(n/2-1)} D^{\alpha}_{2,r}\Big[r^{\alpha+n/2-1} f(x)\Big], \quad x = r\zeta \in B.$$

Вначале заметим, что для целых $m \geq 1$

$$D^{m}_{2,t}\Big[t^{\alpha+\beta} f(tx)\Big]_{t=1} = r^{-\beta} D^{m}_{2,r}\Big[r^{\alpha+\beta} f(x)\Big], \qquad \alpha > 0,\ \beta \geq 0, \tag{4.6}$$

что проверяется непосредственным дифференцированием. Это влечет равенство (4.4), $\mathcal{D}^{\alpha}_{n(int)} f(x) = \mathfrak{D}^{\alpha}_{n} f(x)$ для целых $\alpha = m \geq 1$. Для нецелых $\alpha > 0$ обозначим $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, $m-1 < \alpha < m$, т.е. $[\alpha] = m-1$. Тогда (4.4) равносильно равенству

$$D^{-(m-\alpha)}_{2,t} D^{m}_{2,t}\Big[t^{\alpha+n/2-1} f(tx)\Big]_{t=1} = r^{-(n/2-1)} D^{-(m-\alpha)}_{2,r} D^{m}_{2,r}\Big[r^{\alpha+n/2-1} f(x)\Big],$$

а это следует из (4.6). Этим завершается доказательство (4.4). □

Таким образом, для всех типов операторов дробного дифференцирования будем пользоваться единым обозначением $\mathcal{D}_n^\alpha$:

$$\mathcal{D}^\alpha_{n(ser)}f(x) = \mathcal{D}^\alpha_{n(int)}f(x) = \mathfrak{D}^\alpha_n f(x) =: \mathcal{D}^\alpha_n f(x), \qquad \alpha > 0. \tag{4.7}$$

Лемма 4.1. *Для достаточно гладких функций f в шаре B и, в частности, для гармонических функций $f \in h(B)$ имеет место формула обратимости*

$$\mathcal{D}^\alpha_n \mathcal{D}^{-\alpha}_n f(x) = \mathcal{D}^{-\alpha}_n \mathcal{D}^\alpha_n f(x) = f(x), \qquad x \in B, \quad \alpha > 0. \tag{4.8}$$

Доказательство. Для гармонических функций формула (4.8) очевидна ввиду их разложимости в ряд сферических гармоник и определений (3.2), (3.3).

Для более общих функций, дифференцируемых достаточное число раз, будем доказывать (4.8) посредством определений (3.4), (3.5), (4.2). Ввиду этих определений и тождества $D_2^\alpha D_2^{-\alpha} g(x) = g(x)$ для интегрируемых функций g, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\alpha_n \mathcal{D}^{-\alpha}_n f(x) &= \mathcal{D}^\alpha_n \Big[r^{-(\alpha+n/2-1)} D_2^{-\alpha}\big\{ r^{n/2-1} f(x)\big\}\Big] = \\ &= r^{-(n/2-1)} D_2^\alpha \Big[r^{\alpha+n/2-1}\, r^{-(\alpha+n/2-1)} D_2^{-\alpha}\big\{ r^{n/2-1} f(x)\big\}\Big] = \\ &= r^{-(n/2-1)} D_2^\alpha D_2^{-\alpha}\big\{ r^{n/2-1} f(x)\big\} = r^{-(n/2-1)} r^{n/2-1} f(x) = f(x).\end{aligned}$$

Аналогично доказываем

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{-\alpha}_n \mathcal{D}^\alpha_n f(x) &= \mathcal{D}^{-\alpha}_n \Big[r^{-(n/2-1)} D_2^\alpha\big\{ r^{\alpha+n/2-1} f(x)\big\}\Big] = \\ &= r^{-(\alpha+n/2-1)} D_2^{-\alpha} \Big[r^{n/2-1}\, r^{-(n/2-1)} D_2^\alpha\big\{ r^{\alpha+n/2-1} f(x)\big\}\Big] = \\ &= r^{-(\alpha+n/2-1)} D_2^{-\alpha} D_2^\alpha\big\{ r^{\alpha+n/2-1} f(x)\big\} = r^{-(\alpha+n/2-1)} r^{\alpha+n/2-1} f(x) = f(x).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тождеством $D_2^{-\alpha} D_2^\alpha\big\{ r^\beta f(x)\big\} = r^\beta f(x), \quad \beta \ge \alpha.$ □

5. Интегральное представление для гармонических функций со смешанной нормой

Перейдем к применению операторов дробного интегродифференцирования для изучения весовых классов гармонических функций. Везде будем пользоваться стандартными обозначениями: $x = r\zeta,\ y = \rho\eta,\ 0 \le r, \rho < 1,\ \zeta, \eta \in S$, dV — нормированная n-мерная объемная мера на шаре B, $dV(x) = n\, r^{n-1} dr d\sigma(\zeta),\ V(B) = 1$. Каждая гармоническая функция $u(x) \in h(B)$ разложима в ряд однородных сферических гармоник

$$u(x) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=1}^{d_k} a_{kj}\, r^k\, Y_{kj}(\zeta) \equiv \sum_{k,j} a_{kj}\, r^k\, Y_{kj}(\zeta), \qquad x = r\zeta \in B, \tag{5.1}$$

Напомним определение расширенного ядра Пуассона в шаре B, см. [16, глава 6].

Определение 5.1. *(Расширенное ядро Пуассона в шаре B)*

$$P(x,y) \equiv P_0(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x,y) = \frac{1-|x|^2|y|^2}{(1-2x\cdot y+|x|^2|y|^2)^{n/2}}, \qquad x \in B,\ y \in \overline{B},$$

где Z_k — зональные гармоники, см. [27],[16].

Расширенное ядро Пуассона гармонично в B по каждой из переменных x и y, а также гармонично по x при $y \in \overline{B}$. Оно обладает полезными свойствами $P(x,y) = P(y,x)$, $P(x,y) = P(ry,\zeta)$, $x = r\zeta$, разлагается в ряд сферических гармоник

$$P(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_k} \overline{Y_{k_j}(y)}\, r^k\, Y_{k_j}(\zeta).$$

Если $\eta \in S$, то $P(x,\eta)$ — обычное (нерасширенное) ядро Пуассона в B.

Определим теперь ядро Пуассона–Бергмана.

Определение 5.2. *(Ядро Пуассона–Бергмана в шаре B)*

$$P_\alpha(x,y) := \mathcal{D}_n^\alpha P(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)}\, Z_k(x,y), \quad x,y \in B, \quad \alpha \ge 0. \tag{5.2}$$

Подобные ядра определены в работах [8], [10] (для целых α), [11] – [15], [18] – [20]. При $\alpha = 0$, очевидно, ядро (5.2) сводится к расширенному ядру Пуассона $P \equiv P_0$ в шаре B. Ядро Пуассона–Бергмана (5.2) вместе с техникой дробного интегродифференцирования позволяет вывести интегральную формулу из Теоремы 1.1 типа Пуассона–Бергмана для функций из $h(p,q,\alpha)$.

Доказательство Теоремы 1.1. Обозначим интеграл в правой части формулы (1.1) как оператор

$$(T_\alpha u)(x) := \frac{2}{n\,\Gamma(\alpha)} \int_B (1-|y|^2)^{\alpha-1}\, P_\alpha(x,y)\, u(y)\, dV(y), \qquad x \in B, \qquad \alpha > 0.$$

Сначала докажем теорему для функций $u(x) \in h(1,1,\beta)$. Для этого вначале предположим, что $u(x) \in h(B) \cap C(\overline{B})$. Полагая, что функция $u(x)$ разложена в ряд сферических гармоник (5.1), преобразуем интеграл $(T_\beta u)(x)$,

$$(T_\beta u)(x) = \frac{2}{n\,\Gamma(\beta)} \int_B (1-|y|^2)^{\beta-1}\, P_\beta(x,y)\, u(y)\, dV(y)$$

$$= \frac{2}{n\,\Gamma(\beta)} \int_B (1-|y|^2)^{\beta-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)}\, Z_k(x,y)\right] \left(\sum_{m,j} a_{mj}\, Y_{mj}(y)\right) dV(y)$$

$$= \frac{2}{n\,\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_m} a_{mj} \int_B (1-|y|^2)^{\beta-1}\, Z_k(x,y)\, Y_{mj}(y)\, dV(y).$$

Учитывая, что $Z_k(x,y) = r^k \rho^k Z_k(\zeta,\eta)$, $\quad Z_k(\zeta,\eta) = \sum_{i=1}^{d_k} Y_{ki}(\zeta)\, \overline{Y_{ki}(\eta)}$, отдельно упростим последний интеграл, считая $k \geq 0$ фиксированным,

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_m} a_{mj} \int_B (1-|y|^2)^{\beta-1}\, Z_k(x,y)\, \rho^m\, Y_{mj}(\eta)\, dV(y)$$

$$= r^k \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_m} a_{mj} \int_B (1-|y|^2)^{\beta-1}\, \rho^k \rho^m\, Z_k(\zeta,\eta)\, Y_{mj}(\eta)\, dV(y)$$

$$= n\, r^k \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_m} a_{mj} \int_0^1 (1-\rho^2)^{\beta-1}\, \rho^k \rho^m\ \rho^{n-1} \left(\int_S Z_k(\zeta,\eta)\, Y_{mj}(\eta)\, d\sigma(\eta)\right) d\rho$$

$$= n\, r^k \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_m} a_{mj} \int_0^1 (1-\rho^2)^{\beta-1}\, \rho^{k+m+n-1} \sum_{i=1}^{d_k} Y_{ki}(\zeta) \left[\int_S \overline{Y_{ki}(\eta)}\, Y_{mj}(\eta)\, d\sigma(\eta)\right] d\rho$$

$$= n\, r^k \sum_{j=1}^{d_k} a_{kj}\, Y_{kj}(\zeta) \int_0^1 (1-\rho^2)^{\beta-1}\, \rho^{2k+n-1}\, d\rho$$

$$= \frac{n}{2}\, r^k\, \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(k+n/2)}{\Gamma(\beta+k+n/2)} \sum_{j=1}^{d_k} a_{kj}\, Y_{kj}(\zeta).$$

Здесь мы воспользовались ортогональностью в $L^2(S)$ сферических гармоник разных степеней ($k \neq m$). Далее, подставляя, получаем

$$(T_\beta u)(x) = \frac{2}{n\,\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta+k+n/2)}{\Gamma(k+n/2)} \left(\frac{n}{2}\, r^k\, \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(k+n/2)}{\Gamma(\beta+k+n/2)} \sum_{j=1}^{d_k} a_{kj}\, Y_{kj}(\zeta)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_k} a_{kj}\, r^k\, Y_{kj}(\zeta) = u(x).$$

Искомая формула $u(x) = (T_\beta u)(x)$, (1.1) получена. Для произвольной функции $u(x) \in h(1,1,\beta)$ применим доказанную часть теоремы по отношению к растянутой функции $u_\delta(x) := u(\delta x)$, $0 < \delta < 1$, что приводит к $u_\delta(x) = (T_\beta u_\delta)(x)$. Теперь остается перейти к пределу при $\delta \to 1^-$ (см., например, [17],[20])

$$\|u - u_\delta\|_{h(1,1,\beta)} \longrightarrow 0, \qquad \delta \to 1^-, \tag{5.3}$$

и в итоге получаем искомую формулу (1.1) для произвольной функции $u \in h(1,1,\beta)$. Теперь докажем теорему для общей функции $u \in h(p,q,\alpha)$.

Если $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le 1$, $\beta \ge \alpha$, то согласно вложениям [21, Теор.1(i)-(iii)] имеем $h(p,q,\alpha) \subset h(1,1,\beta)$.

Если $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\beta > \alpha$, то согласно вложениям [21, Теор.1(ii),(vi)] имеем $h(p,q,\alpha) \subset h(1,q,\alpha) \subset h(1,1,\beta)$.

Если $0 < p < 1$, $0 < q \le \infty$, $\beta > \alpha + (n-1)(1/p-1)$, то согласно вложениям [21, Теор.1(iv),(vi)] имеем $h(p,q,\alpha) \subset h\big(1,q,\alpha+(n-1)(1/p-1)\big) \subset h(1,1,\beta)$.

Во всех случаях получаем $u(x) \in h(1,1,\beta)$, что сводит доказательство к уже доказанному случаю. □

Замечание 5.1. *Легко заметить, что в приведенном доказательстве мы лишь проверили истинность* (1.1) *без конструктивного вывода этой формулы. Такой метод доказательства в специальных случаях применялся, например, в* [11], [12],[8],[19],[20]. *Было бы полезно найти конструктивный вывод формулы* (1.1). *Наше определение дробной производной* (4.2), *Теорема 4.1 и Лемма 4.1 позволяют найти конструктивное и очень короткое доказательство Теоремы 1.1.*

Второе доказательство Теоремы 1.1. Пусть $u(x) \in h(1,1,\beta)$, $\beta > 0$ — произвольная функция. В силу формулы обратимости (4.8) и определения 4.2, можем преобразовать

$$\begin{aligned}
u(x) &= \mathcal{D}_n^{-\beta}\mathcal{D}_n^{\beta}u(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-t)^{\beta-1}\mathcal{D}_n^{\beta}u(tx)\, t^{n/2-1}\,dt = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\rho^2)^{\beta-1}\mathcal{D}_n^{\beta}u(\rho^2 x)\,\rho^{2(n/2-1)}\,2\rho\,d\rho = \\
&= \frac{2}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 (1-\rho^2)^{\beta-1}\mathcal{D}_n^{\beta}\left[\int_S P(x,\rho\eta)\,u(\rho\eta)\,d\sigma(\eta)\right]\,\rho^{n-1}\,d\rho = \\
&= \frac{2}{n\,\Gamma(\beta)}\int_0^1\int_S (1-\rho^2)^{\beta-1}\mathcal{D}_n^{\beta}P(x,\rho\eta)\,u(\rho\eta)\,n\,\rho^{n-1}\,d\rho\,d\sigma(\eta) = \\
&= \frac{2}{n\,\Gamma(\beta)}\int_B (1-|y|^2)^{\beta-1}\,P_\beta(x,y)\,u(y)\,dV(y), \qquad x \in B.
\end{aligned}$$

Сходимость последнего интеграла внутри шара B следует из оценки ядра Пуассона–Бергмана (см., например, [13],[14],[18])

$$|P_\beta(x,y)| \le C(\beta,n)\frac{1}{(1-|x||y|)^{\beta+n-1}}, \qquad x,y \in B.$$

Abstract. In the paper, a new form of fractional derivative is introduced for functions defined in a unit ball in $\mathbb{R}^n$. As an application, an integral representation for harmonic functions with finite mixed-norm in the ball is obtained.

Список литературы

[1] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые их Приложения, Наука и техника, Минск (1987).

[2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Some properties of fractional integrals", (I) Math. Z., **27**, 565 – 606 (1928); (II) Math. Z., **34**, 403 – 439 (1932).

[3] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions", Quart. J. Math. (Oxford), **12**, 221 – 256 (1941).

[4] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, **2**, Мир, М. (1965).

[5] М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, Наука, М. (1966).

[6] T. M. Flett, "The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities", J. Math. Anal. Appl., **38**, 746 – 765 (1972).

[7] T. M. Flett, "Lipschitz spaces of functions on the circle and the disc", J. Math. Anal. Appl., **39**, 125 – 158 (1972).

[8] A. E. Djrbashian and F. A. Shamoian, Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner–Texte zur Math., b. 105, Teubner, Leipzig (1988).

[9] K. Zhu, Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball, Graduate Texts in Mathematics, **226**, Springer-Verlag, New York (2005).

[10] R. Coifman and R. Rochberg, "Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p", Asterisque, **77**, 11 – 66 (1980).

[11] А. Э. Джрбашян, "Интегральные представления и непрерывные проекторы в некоторых пространствах гармонических функций", Мат. Сборник, **121**, no. 2, 259 – 271 (1983).

[12] А. Э. Джрбашян, "О порядке роста дробных производных и интегралов гармонических функций в многомерном шаре", Изв. Акад. Наук Арм. ССР, Математика, **20**, no. 5, 366 – 374 (1985).

[13] J. Miao, "Reproducing kernels for harmonic Bergman spaces of the unit ball", Monatsh. Math., **125**, 25 – 35 (1998).

[14] M. Jevtić and M. Pavlović, "Harmonic Bergman functions on the unit ball in $\mathbb{R}^n$", Acta Math. Hungar., **85**, 81 – 96 (1999).

[15] O. Blasco and S. Perez-Esteva, "L^p continuity of projectors of weighted harmonic Bergman spaces", Collect. Math., **51**, 49 – 58 (2000).

[16] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic Function Theory, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York (2001).

[17] C. Liu, J. Shi and G. Ren, "Duality for harmonic mixed-norm spaces in the unit ball of $\mathbb{R}^n$", Ann. Sci. Math. Québec, **25**, 179 – 197 (2001).

[18] G. Ren and U. Kähler, "Weighted harmonic Bloch spaces and Gleason's problem", Complex Variables Theory Appl., **48**, 235 – 245 (2003).

[19] A. I. Petrosyan, "On weighted classes of harmonic functions in the unit ball of $\mathbb{R}^n$", Complex Variables Theory Appl., **50**, 953 – 966 (2005).

[20] A. I. Petrosyan, "On weighted harmonic Bergman spaces", Demonstratio Math., **41**, 73 – 83 (2008).

[21] К. Аветисян, Е. Тоноян, "Непрерывные вложения в гармонических пространствах со смешанной нормой в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$ ", Известия НАН Армении, Математика, **47**, no. 5, 3 – 20 (2012).

[22] K. Avetisyan, "Continuous inclusions and Bergman type operators in n-harmonic mixed norm spaces on the polydisc", J. Math. Anal. Appl., **291**, 727 – 740 (2004).

[23] K. Avetisyan, "Weighted integrals and Bloch spaces of n-harmonic functions on the polydisc", Potential Analysis, **29**, 49 –63 (2008).

[24] S. Stević, "Holomorphic functions on the mixed norm spaces on the polydisc", J. Korean Math. Soc., **45**, 63 – 78 (2008).
[25] M. Jevtić, "Bounded projections and duality in mixed-norm spaces of analytic functions", Complex Variables Theory Appl., **8**, 293 – 301 (1987).
[26] S. Gadbois, "Mixed-norm generalizations of Bergman spaces and duality", Proc. Amer. Math. Soc., **104**, no. 4, 1171 – 1180 (1988).
[27] E.M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1971).

Поступила 9 декабря 2014