

УДК 530.145

## КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ РЕЗОНАНСНОГО РАССЕЯНИЯ КАПИЦЫ–ДИРАКА

Г.А. МУРАДЯН, А.Ж. МУРАДЯН\*

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

\*e-mail: muradyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 6 марта 2017 г.)

Резонансный эффект Капицы–Дирака в импульсном пространстве описывается разностным уравнением Шредингера, шагом которого является двухфотонный импульс отдачи. Для многолучевой атомной интерферометрии представляет интерес случай интенсивных встречных волн, когда число генерированных импульсов может достигать нескольких десятков. Тогда на промежуточном этапе вычислений дискретное импульсное распределение воспринимается как непрерывное и к нему применяется разложение Тейлора. Приближение хорошо сохраняет спектр дифракции, в частности, формирование пары почти моноимпульсных состояний из начального гауссовского распределения.

### 1. Введение

Когерентное расщепление волновой функции поступательного движения атома лазерным полем встречных волн (резонансный эффект Капицы–Дирака [1, 2]) является одним из основных элементов атомной оптики и атомной интерферометрии со световыми импульсами [3–7]. Угловое расщепление получается переизлучением пары фотонов между встречными волнами и оказывается крайне малым, порядка одной угловой минуты. Потому желательно его увеличение хотя бы до одного градуса, то есть до 50–60 актов переброса. Строгое решение задачи для всестороннего анализа возможностей и выбора оптимальных условий встречает серьезные математические трудности. Некоторые аргументы указывают на возможность применения квазиклассического приближения. Оно хорошо описывает низколежащие энергетические зоны поступательного движения атома и в сущности сводится к приближению сильной связи [8–10]. Однако, как показали наши расчеты, в случае резонансного рассеяния Капица–Дирака переходы осуществляются между свободными состояниями, и это приближение формирует картину дифракции с серьезными искажениями.

В настоящей работе используется родственное квазиклассическому при-

ближение в импульсном пространстве для резонансного рассеяния Капицы–Дирака. Полученные результаты согласуются с результатами точной теории вплоть до области умеренных интенсивностей, где условия квазиклассичности не выполняются.

## 2. Полуклассический вывод формулы для амплитуды когерентного рассеяния

Электрическое поле встречных волн представим в виде

$$E(z, t) = E_1 e^{i(kz - \omega t)} + E_2 e^{-i(kz - \omega t)} + \text{с. с.}, \quad (1)$$

где  $\omega$  – частота поля, близкая к частоте атомного перехода  $\omega_0$  из основного состояния в возбужденное,  $k = \omega / c$ ,  $z$  – координата центра массы атома в направлении распространения волны и  $E_{1,2}$  – амплитуды электрического поля. В поле встречных волн поперечный импульс атома остается постоянным и не будет учитываться в дальнейшем. Гамильтониан атома в дипольном приближении имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \hat{H}_0 - \hat{d} E(t, z), \quad (2)$$

где  $\hat{H}_0$  – гамильтониан свободного неподвижного атома и  $\hat{d}$  – оператор дипольного момента оптического электрона атома. Волновая функция атома в двухуровневом приближении может быть записана в виде

$$\psi(t, z) = a(t, z) \varphi_1 e^{\frac{i}{\hbar} \varepsilon_1 t} + b(t, z) \varphi_2 e^{\frac{i}{\hbar} \varepsilon_2 t - i \Delta t}, \quad (3)$$

где  $a(t, z)$  и  $b(t, z)$  – вероятностные амплитуды поступательного движения атома в основном и возбужденном состояниях, соответственно,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  – соответствующие им собственные значения и собственные функции гамильтониана  $\hat{H}_0$  и  $\Delta = \omega - \omega_0$  – расстройка резонанса.

Некогерентные процессы из рассматриваемой системы исключаются выбором режима адиабатического следования, когда расстройка резонанса намного превосходит неоднородное уширение оптической линии. Тогда вероятность возбуждения зануляется, а вероятностная амплитуда основного состояния удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных (см., например, [11]):

$$\left( i \hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{|d|^2}{\hbar \Delta} |E_1 e^{ikz} + E_2 e^{-ikz}|^2 \right) a(t, z) = 0. \quad (4)$$

Оно имеет вид уравнения Шредингера для пространственно-периодического потенциала

$$V(z) = -\frac{|d|^2}{\hbar\Delta} |E_1 e^{ikz} + E_2 e^{-ikz}|^2 \quad (5)$$

и может быть решено точно на основе блоховских стационарных решений [12, 13], в частности, для нужд атомных интерферометров со световыми импульсами [14]. Перспектива расширения практических применений таких интерферометров требует увеличения углового расщепления волновой функции атома и соответственно высокие интенсивности световых полей. Согласно (5), они индуцируют режим глубоких периодических потенциалов, когда энергетические зоны становятся асимптотически узкими. Точный подход на основе блоховских функций становится трудноприменимым из-за резкого повышения чувствительности вида волновой функции на значение энергии. Поэтому желательным является привлечение приближенных, но аналитических методов, свободных от указанных недостатков.

При поиске подходящего приближения естественно исходить из физических соображений, характеризующих ситуацию. Сужение энергетических зон является следствием замедления квантового туннелирования между соседними потенциальными ямами периодического потенциала (5). Замедление же квантового туннелирования можно рассматривать как подавление квантовой природы происходящих процессов в целом, то есть, как переход из полностью квантового на квазиклассический режим взаимодействия. Поэтому первым этапом наших расчетов было прямое применение квазиклассического приближения, а также приближения сильной связи к задаче резонансного рассеяния Капицы–Дирака. Искомый спектр рассеяния получился при этом значительно отличным от результатов, выведенных на основе точного блоховского подхода. То есть первый вывод нашей работы заключается в том, что традиционная квазиклассическая теория, а также приближение сильной связи неприменимы для описания резонансного рассеяния Капицы–Дирака атома в поле периодического потенциала с глубокими ямами. Помимо вышеуказанной причины технического характера, немаловажным является и свободный характер начального и конечного состояний. Их формирование требует наложения многих блоховских (квазисвободных) состояний атома в периодическом поле, часть которых лежит в возбужденных энергетических зонах, не подчиняющихся условию сильной связи. Чтобы обойти эту принципиальную трудность, мы прибегаем к несколько иному истолкованию условия полуклассичности движения, исходящему из условия возможности замены дискретного (квантового) спектра импульсов атома на непрерывный (полуклассический) спектр. Такой подход использовался ранее в некоторых задачах взаимодействия атома с интенсивным полем лазерного излучения как без учета [15, 16], так и с учетом спонтанного излучения [17, 18].

Для построения теории указанного типа в уравнении (4) перейдем к безразмерным величинам: координате  $\eta = kz$ , времени  $\tau = |\Delta|t$ , параметру интенсивности волн  $\zeta_{1,2} = d^* E_{1,2} / \hbar |\Delta|$  и частоте отдачи  $\omega_R = \hbar k^2 / 2M |\Delta|$ , т. е.

$$\left( i \frac{\partial}{\partial \tau} + \omega_R \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \text{sign } \Delta (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + 2\zeta_1 \zeta_2 \cos 2\eta) \right) a(\tau, \eta) = 0, \quad (6)$$

а затем к стационарным (базисным) решениям  $a(\tau, \eta) = a(\eta) \exp(-i\lambda \tau)$ . Непосредственной подстановкой последнего для искомой функции  $a(\eta)$  получаем уравнение

$$\left( \omega_R \frac{d^2}{d\eta^2} + \lambda - \text{sign } \Delta (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + 2\zeta_1 \zeta_2 \cos 2\eta) \right) a(\eta) = 0, \quad (7)$$

решение которого, согласно теореме Флоке–Блоха, можно искать в виде  $a(\eta) = e^{iP\eta} A(\eta)$ , где  $P$  – квазиимпульс и  $A(\eta)$  – периодическая функция периода  $\pi$ . Представим  $A(\eta)$  в виде разложения в ряд Фурье

$$A(\eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{i2m\eta}, \quad (8)$$

где коэффициенты разложения  $A_m$  представляют искомые вероятностные амплитуды состояний атома со значениями импульса  $p = P + 2m\hbar k$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и удовлетворяют разностной алгебраической системе уравнений

$$\left( \lambda - \omega_R (P + 2m)^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 \right) A_m + \zeta_1 \zeta_2 (A_{m-1} + A_{m+1}) = 0. \quad (9)$$

Знак расстройки резонанса  $\Delta$  выбран для определенности отрицательным.

Согласно принятому полуклассическому подходу, считаем зависимость от числа  $m$  непрерывной и разлагаем  $A_{m-1}$  и  $A_{m+1}$  в ряд Тейлора:

$$A_{m\mp 1} \approx A(m) \mp \frac{dA(m)}{dm} + \frac{1}{2} \frac{d^2 A(m)}{dm^2} \mp \dots \quad (10)$$

Ограничимся членами с производными второго порядка включительно. В результате вместо разностного алгебраического уравнения (9) получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 A(m)}{dm^2} + \left( \frac{\lambda + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + 2\zeta_1 \zeta_2}{\zeta_1 \zeta_2} - \frac{4\omega_R}{\zeta_1 \zeta_2} \left( \frac{P}{2} + m \right)^2 \right) A(m) = 0. \quad (11)$$

Квазиимпульс  $P$  входит в виде слагаемого к непрерывной переменной  $m$  и потому может быть исключен из рассмотрения смещением начала отсчета переменной. После этого (11) полностью повторяет вид уравнения гармонического осциллятора. Налагая на  $A(m)$  условие затухания в асимптотике больших  $m$ ,

$A(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ , приходим к набору собственных функций

$$A_r(m) = \left(\frac{\chi}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^r r!}} e^{-\frac{\chi}{2} m^2} H_r(\sqrt{\chi} m), \quad (12)$$

где  $\chi = 2\sqrt{\omega_R / \zeta_1 \zeta_2}$ ,  $H_r(\cdot)$  полином Эрмита, а  $r = 0, 1, 2, \dots$  нумерует состояния, поочередно симметричные и антисимметричные относительно замены  $m \rightarrow -m$ . Дискретный энергетический спектр задается гармоническим видом

$$\lambda_r = -(\zeta_1 + \zeta_2)^2 + \Omega \left(r + \frac{1}{2}\right), \quad (13)$$

где коэффициент  $\Omega = \sqrt{\omega_R \zeta_1 \zeta_2} / 4$  определяет расстояние между уровнями (в единицах  $\hbar|\Delta|$ ). Стационарная волновая функция, согласно (8), принимает вид  $A_r(\eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_r(m) e^{i2m\eta}$ , на базе которой строится и временная волновая функция

$$a(\tau, \eta) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r A_r(\eta) e^{-i\lambda_r \tau}. \quad (14)$$

Коэффициенты  $\alpha_r$  определяются, как обычно, начальным видом  $a(\tau=0, \eta)$ . Подставив выражение для  $A_r(\eta)$  и поменяв местами очередность суммирования, приходим к сумме по импульсным состояниям  $a(\tau, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m, \tau) e^{i2m\eta}$ , где искомые амплитуды даются выражением

$$a(m, \tau) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r A_r(m) e^{-i\lambda_r \tau}. \quad (15)$$

Отметим, что в (15) для числа  $m$  переброшенных между встречными волнами фотонов мы вернулись к дискретным целочисленным значениям.

### 3. Численные расчеты. Сопоставление картин дифракции

Для завершения схемы расчета следует уточнить начальное значение  $a(m, \tau=0)$ . С учетом ортонормированности  $A_r(m)$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$  для неизвестных в выражении (15) коэффициентов  $\alpha_r$  получаем

$$\alpha_r = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_r(m) a(m, \tau=0), \quad (16)$$

где  $A_r(m)$  дается выражением (12).

Численные расчеты проводим для суперпозиционного гауссовского вида начальных амплитуд

$$a(m, \tau = 0) = \frac{1}{(\pi\sigma)^{1/4}} e^{i2m\alpha - m^2/2\sigma}, \quad (17)$$

который, по-видимому, является наиболее перспективным кандидатом на роль начального состояния для расщепителя атомного пучка многолучевого атомного интерферометра [19]. При этом характер эволюции импульсного распределения существенным образом зависит от фазового параметра  $\alpha$  в выражении (17). На основе точного численного решения уравнения (4) в импульсном пространстве было получено, что при  $\alpha = 0$  распределение спектра сужается до некоторой минимальной ширины, затем восстанавливается и далее картина повторяется с очень медленным темпом хаотизации. Минимально достижимая ширина, в свою очередь, обратно пропорциональна интенсивности встречных волн. В частности, в области малых интенсивностей сужение приводит до почти моноимпульсного состояния и может претендовать на роль нового действующего механизма для атомного лазера. Интерферометрический же интерес представляет случай  $\alpha = \pi/2$ . Тогда распределение импульсов сперва симметрично расщепляется на две группы, которые в дальнейшем удаляются друг от друга до некоторого максимального значения с одновременным сужением распределения. Следует особо подчеркнуть, что минимальные ширины распределений формируются именно для максимально удаленных групп. В области малых интенсивностей, как и в случае  $\alpha = 0$ , сужение вплотную подходит к моноимпульсному состоянию.

Аналогичные расчеты на основе формулы (15) были проведены и в принятом дискретно-импульсном квазиклассическом приближении, когда функции  $A_r(m)$  и коэффициенты  $\alpha_r$  задаются формулами (12) и (16), соответственно.

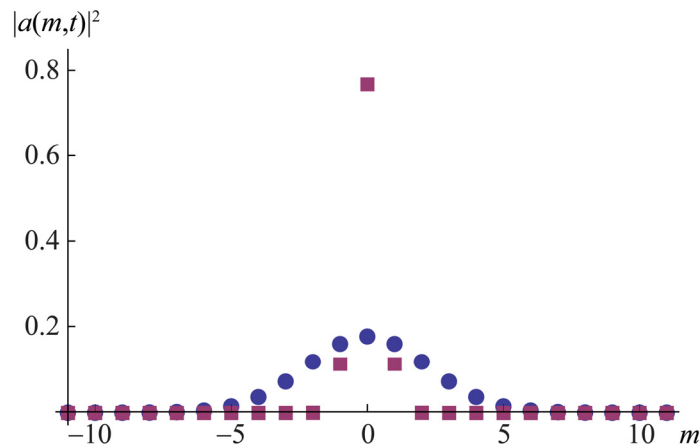


Рис.1. Импульсное распределение волновой функции атома в квазиклассическом приближении резонансного рассеяния Капицы–Дирака в момент максимального сужения для случая  $\alpha = 0$  (квадраты). Для сравнения приведен (кружки) начальный дискретно-гауссовский вид ширины  $\sigma = 10$ ,  $\tau = 13600$ ,  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.002^{1/2}$  и  $\omega_R = 10^{-4}$ .

Ниже приведены результаты для режима относительно малых интенсивностей встречных волн, которые могут представлять интерес для практических применений. Рис.1 иллюстрирует индуцированное распределение в момент его максимального сужения для случая  $\alpha = 0$ . Виден почти моноимпульсный характер распределения, что хорошо согласуется с точными расчетами.

Хорошее согласие получается и в случае  $\alpha = \pi/2$ , результаты которого показаны на рис.2. Начальное гауссовское распределение расщепляется на две узкие группы, весьма удаленные друг от друга. Оно и составляет основу перспективности рассмотренной схемы для атомного интерферометра со световыми импульсами.

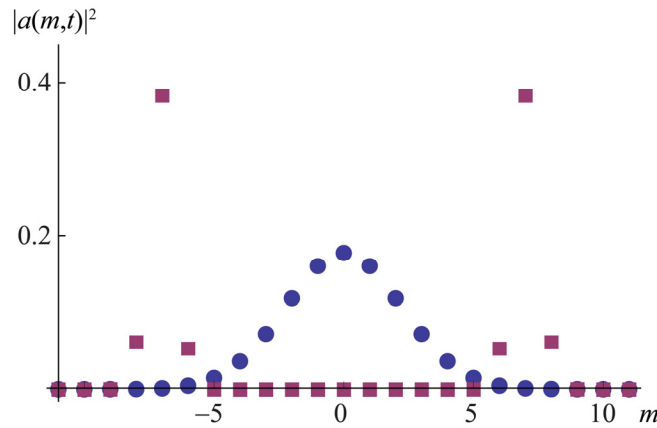


Рис.2. Импульсное распределение волновой функции атома в квазиклассическом приближении резонансного рассеяния Капицы–Дирака в момент максимального расщепления для случая  $\alpha = \pi/2$  (квадраты). Для сравнения приведен начальный вид распределения (кружки). Параметры те же, что и на рис.1.

#### 4. Заключение

Резонансный эффект Капицы–Дирака используется на начальном этапе атомного интерферометра как расщепитель волновой функции поступательного движения атома. В области высоких интенсивностей дифрагирующей волны режим взаимодействия приближается к классическому, и пропадает возможность получения точных аналитических результатов. Показано, что хорошее согласие с точными численными расчетами получается при использовании квазиклассического подхода в импульсном пространстве. В частности, использованный подход сохраняет важную особенность многофотонного расщепления начального гауссовского распределения на две удаленные, почти моноимпульсные группы.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН Армении в рамках Лаборатории исследования и моделирования квантовых явлений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **А.Ж. Мурадян.** Изв. АН Арм. ССР, Физика, **10**, 361 (1975).
2. **R.J. Cook, A.F. Bernhardt.** Phys. Rev. A, **18**, 2533 (1978).
3. Atom Interferometry. P.R. Berman, Ed., New York, Academic Press, 1997.
4. **M. Kasevich, S. Chu.** Phys. Rev. Lett., **67**, 181 (1991).
5. **B. Rohwedder.** Eur. Phys. J., **13**, 255 (2001).
6. **A.D. Cronin, J. Schmiedmayer, D.E. Pritchard.** Rev. Mod. Phys., **81**, 1051 (2009).
7. **W.-D. Li, T. He, A. Smerzi.** Phys. Rev. Lett., **113**, 023003 (2014).
8. **J.N.L. Connor, T. Uzer, R.A. Marcus, A D. Smith.** J. Chem. Phys., **80**, 5095 (1984).
9. **B.R. Holstein.** Am. J. Phys., **56**, 894 (1988).
10. **B. Balzer, S. Dilthey, G. Stock, M. Thoss.** J. Chem. Phys., **119**, 5795 (2003).
11. **Л.А. Оганнисян, А.Ж. Мурадян.** Изв. НАН Армении, Физика, **45**, 20 (2010).
12. **M. Horne, I. Jex, A. Zeilinger.** Phys. Rev. A, **59**, 2190 (1999).
13. **C. Champenois, M. Buchner, R. Delhuille, R. Mathevet, C. Robilliard, C. Rizzo, J. Vigue.** Eur. Phys. J. D, **13**, 271 (2001).
14. **G. Muradyan, A.Zh. Muradyan.** Phys. Scr., **90**, 115401 (2015).
15. **А.Ж. Мурадян.** Эффекты многофотонной отдачи и оптической анизотропии в поле лазерного излучения. Кандидатская диссертация, Ереванский госуниверситет, Ереван, 1979.
16. **E. Arimondo, A. Bambini, S. Stenholm.** Phys. Rev. A, **24**, 898 (1981).
17. **А.П. Казанцев, Г.И. Сурдутович, В.П. Яковлев.** Механическое действие света на атомы. Москва, Наука, 1991.
18. **H.J. Metcalf, P. van der Straten.** Laser Cooling and Trapping. New York, Springer-Verlag, 1999.
19. **G. Muradyan, A. Muradyan.** Int. Conference and Workshop QuantArm 2014, Armenia, Abstracts, 2014, p. 32.

## QASICLASSICAL APPROXIMATION FOR THE RESONANT KAPITZA–DIRAC SCATTERING

G.A. MURADYAN, A.ZH. MURADYAN

The resonant Kapitza–Dirac effect is described in momentum space by the difference Schrödinger equation, the step of which is the two-photon recoil momentum. For multipath atom interferometry presents interest the case of intense counterpropagating waves, when the number of generated momenta can reach up to the some tens. Then in intermediate stage of calculations, the discrete momentum distribution is regarded as a continuous one, and the Taylor expansion is applied to it. This approach well preserves the spectrum of diffraction, particularly, the formation of a pair of almost single-momentum states from the initial Gaussian distribution.