

Механика

УДК 621.983

Յ. Ա. ՆԱԶԱՐՅԱՆ, Մ. Մ. ԱՐԱԿԵԼՅԱՆ, Ա. Տ. ՄԱՐԿՕՅԱՆ, Ն. Ն. ԱՐԱԲ

БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ ТОНКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ. I

Проведен анализ формоизменения тонких кольцевых пластин в случае больших пластических деформаций с учетом взаимосвязанного изменения толщины материала и деформационного упрочнения. Установлено, что в случае изотропного упрочнения уравнения пластического плоского напряженного состояния отображаются на девиаторной плоскости цилиндра пластичности в виде линейной зависимости между скоростями радиального напряжения и интенсивности деформаций.

Введение. Многочисленные проблемы деформационной обработки металлов, прежде всего проблемы формоизменения листового металла, требуют решения задач по определению напряженно-деформированного состояния при больших пластических деформациях.

Возможности существующих приближенных методов исследования подобных задач для реального твердого тела (с учетом деформационного упрочнения) весьма ограничены в области приложений и, особенно, в точности получаемых решений. Поэтому крайне необходимой и целесообразной представляется математически корректная постановка таких задач. Дело в том, что исходные одинаковые материальные частицы деформируемого материала, перемещаясь в поле пластических деформаций, приобретают характерные особенности, такие как величина перемещения, накопленная деформация, изменение толщины, напряжение текучести и т.д. Пройдя конкретный путь в поле пластических деформаций, рассматриваемая материальная частица накапливает определенную деформацию, а при холодной деформации (вследствие упрочнения) изменяется напряжение текучести этой частицы.

В настоящей работе рассматривается напряженно-деформированное состояние тонкой кольцевой пластины без наложения ограничений на величину деформаций при взаимосвязанном изменении структурно-чувствительных параметров, а именно, толщины и деформационного упрочнения.

Постановка задачи и исходные уравнения. Рассмотрим формоизменение тонкой кольцевой пластины с размерами R_0 , r_0 , s_0 в условиях глубокой вытяжки (рис. 1, а и б). При определенных размерных характеристиках пластины и деформирующего инструмента в процессе формоизменения происходит уменьшение наружного и увеличение внутреннего радиусов (R и r).

Это позволяет условно разделить деформацию исходной кольцевой пластины на две составляющие (рис. 1, в и г): растяжение кольцевых пластин с размерами R_0 , a , s_0 и a , r_0 , s_0 под нагрузками с интенсивностями P_1 и P_2 , которые приложены соответственно к внутреннему и наружному контурам. Очевидно, что из условия сплошности вытекает равенство $P_1 = P_2$. При небольшой величине интенсивности нагрузки пластины находятся в упругом состоянии. С увеличением нагрузки в окружном направлении возникают соответственно сжимающие (в) и растягивающие (г) напряжения. Под действием этих напряжений на контурах приложения внешней нагрузки возникают пластические деформации сдвига. Во внешнем кольце возникают двухосно разноименные ($\sigma_\rho > 0$, $\sigma_\theta < 0$, $\sigma_\rho \sigma_\theta < 0$), а во внутреннем кольце – двухосно одноименные ($\sigma_\rho > 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_\rho \sigma_\theta > 0$) напряженные состояния (рис. 1, д). В таких условиях формоизменение носит ярко выраженный немонотонный характер, а очаг пластической области является переменным.

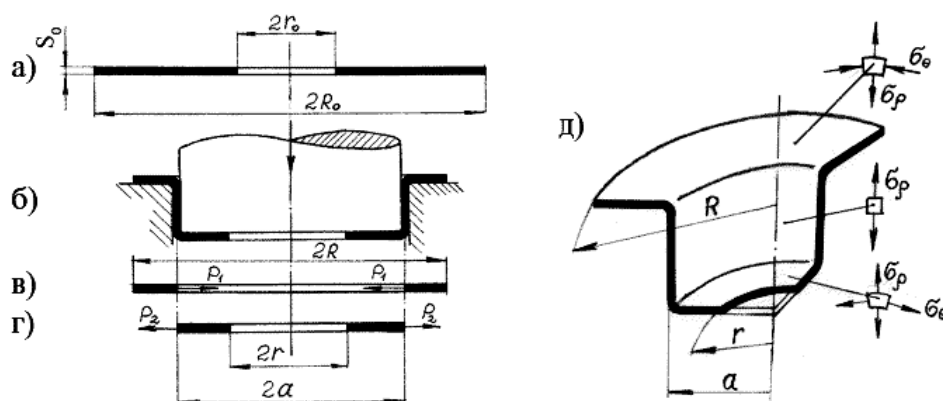


Рис. 1.

Определим напряженно-деформированное состояние пластины, не накладывая ограничений на величину деформаций. Примем цилиндрическую систему координат ρ , θ , z , где $z=0$ является средней плоскостью пластины, а ось z направлена перпендикулярно к этой плоскости. Предполагается, что пластина нагружена внешними силами, параллельными средней плоскости, а характерный размер пластины $s_0/(R_0 - r_0) \ll 1$. В таких условиях радиальное, осевое и окружное направления, по условию симметрии, будут главными направлениями напряжений и деформаций, а напряженное состояние, реализующееся в работающей без изгиба пластине, определяется как обобщенное плоское напряженное состояние [1].

Уравнение равновесия элемента, вырезанного главными сечениями из осесимметрично нагруженной безмоментной круглой пластины переменной толщины, имеет вид

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho + \sigma_\rho \frac{\rho ds}{s d\rho} - \sigma_\theta = 0. \quad (1)$$

Приращения главных деформаций связаны с напряжениями следующими зависимостями:

$$\begin{aligned}d\varepsilon_\rho &= (3d\varepsilon_i/2\sigma_i)(\sigma_\rho - \sigma_0), \\d\varepsilon_\theta &= (3d\varepsilon_i/2\sigma_i)(\sigma_\theta - \sigma_0), \\d\varepsilon_z &= (3d\varepsilon_i/2\sigma_i)(\sigma_z - \sigma_0),\end{aligned}\quad (2)$$

где σ_ρ , σ_θ , σ_z – напряжения, действующие соответственно в радиальном, окружном и перпендикулярном к толщине направлениях, а $d\varepsilon_\rho$, $d\varepsilon_\theta$, $d\varepsilon_z$ – приращения главных деформаций в тех же направлениях, σ_i – интенсивность напряжений, $d\varepsilon_i$ – интенсивность приращения главных деформаций, σ_0 – среднее нормальное напряжение.

В рассматриваемом случае плоского напряженного состояния, т.е. при $\sigma_z = 0$ и $\sigma_0 = (\sigma_\rho + \sigma_\theta)/3$, из (2) следует, что

$$d\varepsilon_\rho = \frac{2\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_\rho} d\varepsilon_\theta, \quad d\varepsilon_z = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{\sigma_\rho - 2\sigma_\theta} d\varepsilon_\theta. \quad (3)$$

Приращения главных деформаций в окружном направлении $d\varepsilon_\theta$ и в направлении толщины $d\varepsilon_z$ связаны с приращениями радиуса $d\rho$ и толщины ds следующими соотношениями:

$$d\varepsilon_\theta = \frac{d\rho}{\rho}, \quad d\varepsilon_z = \frac{ds}{s}. \quad (4)$$

С учетом (3) и (4) уравнение (1) принимает вид

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho\sigma_\theta + \sigma_\theta^2}{\sigma_\rho - 2\sigma_\theta} = 0. \quad (5)$$

Компоненты напряжений σ_ρ , σ_θ должны также удовлетворять условию пластичности Мизеса, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\sigma_i^2 = \sigma_\rho^2 - \sigma_\rho\sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \sigma_s^2, \quad (6)$$

где σ_s – истинное напряжение текучести деформируемого материала. σ_s в условиях холодной деформации удобно представить в виде степенной зависимости от величины накопленной деформации:

$$\sigma_s = A\varepsilon_i^n, \quad (7)$$

где A , n – постоянные, характеризующие интенсивность деформационного упрочнения и зависящие от механических свойств листового металла пластины. Чем больший путь проходит рассматриваемая материальная частица в поле пластических деформаций, тем большую деформацию она накапливает. Это положение с очевидностью вытекает из математического определения накопленной деформации

$$\varepsilon_i = \int_L \xi_i dt, \quad (8)$$

где интегрирование проводится по пути деформации L , а $\xi_i = d\varepsilon_i/dt$ – скорость интенсивности деформаций.

Интегрируя уравнение (5) с учетом (6) при $\sigma_s = const$, можно получить зависимость радиального напряжения от координаты в виде неявной функции [2]. При этом необходимо принять дальнейшие упрощения, основным из которых является условие постоянства толщины пластины. Такое допущение равносильно утверждению, что пластическая деформация кольцевой пластины происходит в условиях плоской деформации, что в принципе исключает возможность решения задач, в которых реализуется пластическое плоское напряженное состояние.

Ниже излагается разработанный нами метод анализа задач плоского напряженного состояния при взаимосвязанном изменении толщины материала и деформационного упрочнения.

Деформации и напряжения при плоском напряженном состоянии и их представление. В условиях больших пластических деформаций металлы практически несжимаемы, и на любом этапе формоизменения приращения главных деформаций удовлетворяют условию постоянства объема

$$d\varepsilon_\rho + d\varepsilon_\theta + d\varepsilon_z = 0. \quad (9)$$

Из (9) следует, что приращения деформаций взаимосвязаны и могут быть представлены на плоскости в косоугольных координатах. Рассмотрим девиаторную плоскость цилиндра пластичности, где начало координат соответствует состоянию кольцевой пластины до деформирования, а геометрическое место точек, соответствующих последовательным деформированным состояниям, представляет собой путь деформации (рис. 2).

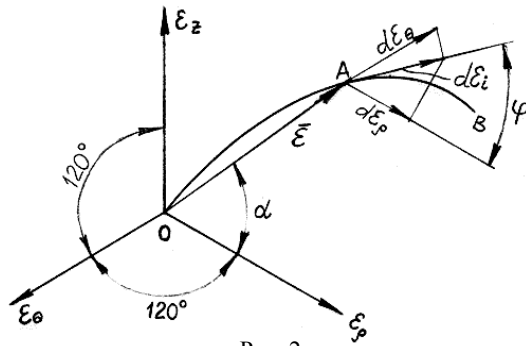


Рис. 2.

Радиальные пути деформаций соответствуют пропорциональному изменению главных деформаций во времени. В общем случае компоненты текущих конечных деформаций представляют собой проекции вектор-функции $\bar{\varepsilon}_i$ на координатные оси, путь деформации описывается вектор-функцией $\bar{\varepsilon}_i(p)$ (p – некоторый параметр времени), а направление скорости деформации $d\bar{\varepsilon}_i/dp$ совпадает с касательной к пути деформации.

Модуль текущей величины скорости численно равен интенсивности приращений деформаций: $|d\bar{\varepsilon}_i| = d\varepsilon_i$ [3].

Приращения главных деформаций в рассматриваемой плоскости, удовлетворяющие условию (9), могут быть представлены в тригонометрической форме [2]:

$$d\varepsilon_\rho = d\varepsilon_i \cos \varphi, \quad d\varepsilon_\theta = d\varepsilon_i \cos(\varphi + 2\pi/3), \quad d\varepsilon_z = d\varepsilon_i \cos(\varphi + 4\pi/3), \quad (10)$$

где φ – угол вида деформированного состояния, а $d\varepsilon_i$ – интенсивность приращения главных деформаций:

$$d\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{d\varepsilon_\rho^2 + d\varepsilon_\rho d\varepsilon_\theta + d\varepsilon_\theta^2}. \quad (11)$$

Из совместного решения (3), (10) и (11) устанавливаются зависимости радиальных и окружных напряжений от угла вида деформированного состояния –

$$\sigma_\rho = \sigma_s \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi + \pi/6), \quad \sigma_\theta = -\sigma_s \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi, \quad (12)$$

удовлетворяющие условию пластичности (6).

На рис. 3 представлены взаимосвязанные напряженные (а) и деформированные (б) состояния, которые в принципе возможно реализовать при плоском напряженном состоянии [3].

Зависимости (12) представляют собой окружности с радиусом $\sigma_s/\sqrt{3}$, проходящие через начало координат, центры которых находятся на линиях $\varepsilon_\rho = 0$, $\varepsilon_\theta = 0$.

Изотропное деформационное упрочнение изображается на указанной плоскости увеличением радиусов окружностей путем перемещения их центров в радиальном направлении на заданную величину. Пределы изменения параметра φ в рассматриваемых задачах устанавливаются в зависимости от схемы напряженного состояния и величины интенсивности приложенной нагрузки. Из анализа зависимостей (12) и рис.3 следует, что радиально растягивающие напряжения не могут превышать значения $2\sigma_s/\sqrt{3}$, которое соответствует направлению $\varphi = 11\pi/6$. А из условия деформирования следует, что окружные деформации для внешнего кольца всегда отрицательны, а для внутреннего кольца всегда положительны, что соответствует направлениям $\varphi = \pi/3$ и $\varphi = 4\pi/3$.

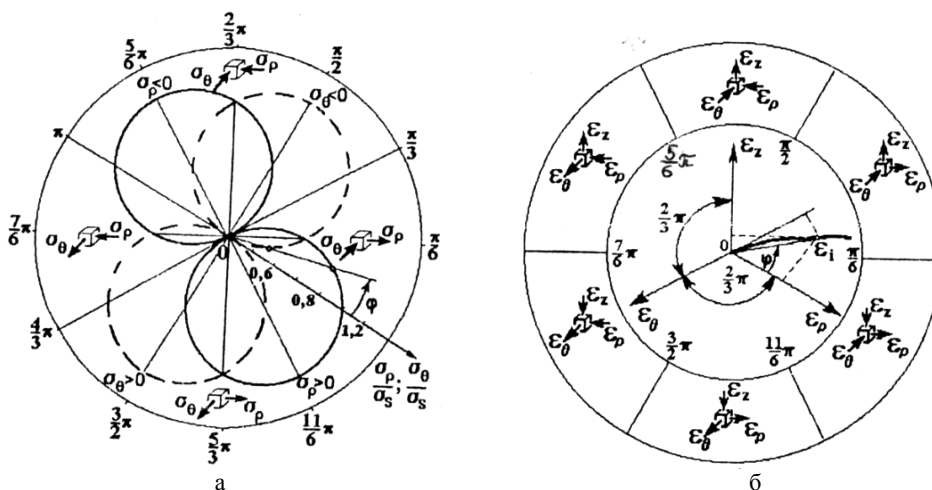


Рис. 3.

Для облегчения интерпретации полученных результатов начало отсчета на рис. 3 совмещено с осью ε_ρ , а увеличение угла φ принято в направлении против часовой стрелки. При изменении $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ радиальные лучи делят девиаторную плоскость на 12 секторов с центральными углами, равными $\pi/6$.

Если путь деформации совпадает с осью ε_ρ , то ε_ρ – деформация растяжения (положительная), а ε_θ и ε_z – деформации сжатия (отрицательные), которые численно равны $\varepsilon_\rho/2$. Вследствие этого деформированное состояние такое же, как в образце, испытываемом на растяжение вдоль оси ε_ρ . Этот тип деформации можно назвать чистым растяжением. Если путь деформации противоположен направлению оси ε_ρ ($\varphi = \pi$), то деформация меняет знак на обратный и соответствует чистому сжатию, поскольку в этом случае ε_θ и ε_z – деформации растяжения (положительные), численно равные $\varepsilon_\rho/2$. Вдоль путей деформации с углами $\varphi = \pi/6$ и $7\pi/6$ компонента деформации $\varepsilon_z = 0$, а ε_ρ и ε_θ равны по величине и противоположны по знаку, то есть имеет место чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости (ρ, θ) . Аналогичные рассуждения допустимы, очевидно, и для осей ε_θ и ε_z , а также в обратных и перпендикулярных к ним направлениях. Таким образом, пути деформации с углами $\varphi = \pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 7\pi/6, 3\pi/2$ и $11\pi/6$ соответствуют чистому сдвигу или плоской деформации, с углами $\varphi = 0, 2\pi/3$ и $4\pi/3$ – чистому растяжению, а с углами $\varphi = \pi/3, \pi$ и $5\pi/3$ – чистому сжатию.

При изменении угла вида деформированного состояния в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ вектор-функция $\bar{\varepsilon}_i(\rho)$ поочередно становится либо параллельной, либо перпендикулярной к координатным осям $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$, вследствие чего компоненты деформации по этим осям изменяются в пределах от единицы до нуля.

С учетом зависимостей (4), (10), (12) и условия пластичности (6) уравнение равновесия (5) можно преобразовать и представить на девиаторной плоскости в достаточно простой форме:

$$d\sigma_\rho = \sigma_s d\varepsilon_i. \quad (13)$$

Таким образом, система уравнений, характеризующих пластическое плоское напряженное состояние, отображается на девиаторной плоскости в виде линейной зависимости между скоростями изменения радиального напряжения и интенсивности деформаций. Коэффициентом пропорциональности в (13) является истинное напряжение текучести деформируемого материала, определяемое соотношениями (7) и (8).

Любопытно, что при допущении равенства $d\varepsilon_i = |d\varepsilon_\theta|$ и использовании условия пластичности Треска–Сен-Венана $\sigma_\rho - \sigma_\theta = \sigma_s$ дифференциальная зависимость (13) принимает вид

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \quad (14)$$

и представляет собой обычно применяемое в приложениях уравнение равновесия элемента кольцевой пластины без учета изменения толщины.

При интегрировании уравнения (13) необходимо рассматривать два этапа формоизменения кольцевых пластин. На первом этапе с возрастанием

интенсивности приложенной нагрузки происходит расширение пластической области от контура, к которому приложена нагрузка, в сторону свободного контура. На втором этапе происходит либо уменьшение, либо увеличение диаметров свободных от нагрузки контуров при одновременном уменьшении размеров пластической области. Анализ указанных выше характеристик обоих этапов формоизменения будет приведен в последующих работах.

*Кафедра теоретической физики ЕГУ,
Свободный университет ИРИ,
филиал в г. Савэ*

Поступила 24.12.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М., 1969, 420 с.
2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М., 1975, 400 с.
3. Назарян Э.А., Константинов В.Ф. – Вестник машиностроения, М., 1999, № 2, с. 35–41.

Է. Ա. ՆԱԶԱՐՅԱՆ, Մ. Մ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Ա. Ս. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ, Ն. Ն. ԱՐԱԲ

ԲԱՐԱԿ ՕՂԱԿԱԶԵՎ ԹԻԹԵՂԻ ՄԵԾ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԸ: I

Ա մ փ ո փ ո մ

Կատարված է օղակաձև բարակ թիթեղների ձևափոխության վերլուծությունը մեծ պլաստիկ դեֆորմացիաների դեպքում, երբ հաշվի է առնվում թիթեղի հաստության և դեֆորմացիոն ամրացման փոխկապակցված փոփոխությունը: Հաստատված է, որ համասեռ ամրացման պայմաններում պլաստիկության հարթ լարվածային վիճակի հավասարումները պլաստիկության գլանի դեվիատորային հարթության վրա արտապատկերվում են շառավղային լարման և դեֆորմացիաների ինտենսիվության արագությունների միջև գծային կապի տեսքով:

E. A. NAZARYAN, M. M. ARAKELYAN, A. S. MARKOSYAN, N. N. ARAB

LARGE DEFORMATIONS OF A THIN RING PLATE. I

Summary

The analysis of formation change of thin ring plates is carried out in case of large plastic deformations, in view of interconnected change of thickness of the material and deformation of hardening. It is established, that in case of isotropic hardening the equations of the plastic plane stress are reflected on a deviator plane of the cylinder of plasticity as simple dependence between speeds of radial stress and intensity of deformations.