

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Դպրոցական մաթեմատիկական օլիմպիադա

29 մարտի, 2025 թ.

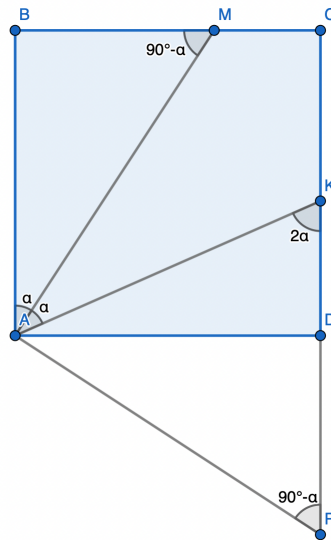
Խնդիր 1.1: Լուծել հավասարումը՝

$$\sin x = \sqrt{1 + \cos^2 x} :$$

Լուծում: Նկատենք, որ $\sin x \geq 0$ և $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x$: Ուստի $\cos 2x = -1$ և $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$: Հաշվի առնելով, որ $\sin x \geq 0$ ՝ կստանանք $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$:

Խնդիր 1.2: $ABCD$ քառակուսու BC և CD կողմերի վրա համապատասխանաբար M և K կետերը ընտրված են այնպես, որ $\angle BAM = \angle MAK$: Ապացուցել, որ $BM + KD = AK$:

Ապացույց. Նշանակենք $\alpha = \angle BAM = \angle MAK$: CD հատվածի շարունակության վրա P կետը կառուցենք այնպես որ D կետն ընկած լինի C և P կետերի միջև և $PD = BM$: Քանի որ $BM = DP$, $AB = AD$ և $\angle ABM = \angle ADP = 90^\circ$ ստանում ենք որ $\triangle ABM = \triangle ADP$ և $\angle DPA = \angle BMA$: Նկատենք որ $\angle BMA = 90^\circ - \angle BAM = 90^\circ - \alpha$: Մյուս կողմից, քանի որ $AB \parallel CD$, $\angle AKP = \angle BAK = \angle BAM + \angle MAK = 2\alpha$: Այսպիսով $\triangle AKP$ -ում $\angle AKP = 2\alpha$ և $\angle KPA = 90^\circ - \alpha$: Հետևաբար $\angle KAP = 90^\circ - \alpha = \angle KPA$ և $AK = KP$: Մնում է տեսնել որ $KP = DP + KD = BM + KD$:



Խնդիր 1.3: Դիցուք $f(x) = 3x^2 + 1$: Ապացուցել, որ $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(n)$ թիվն ունի ոչ ավել քան n հատ իրարից տարբեր պարզ բաժանարար :

Ապացույց. Ապացուցենք ինդուկցիայով: $n = 1$ դեպքում պնդումը ճշմարիտ է: Ենթադրենք այն տեղի ունի $(n - 1)$ -ի համար, և ցույց տանք, որ պնդումը ճշմարիտ է n -ի համար: Բավական է ապացուցել, որ $f(n)$ -ը կարող է ունենալ ոչ ավել քան մեկ պարզ բաժանարար, որի վրա չի բաժանվում $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(n - 1)$ -ը: Դիցուք $f(n)$ -ը բաժանվում է p -ի վրա և $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(n - 1)$ չի բաժանվում p -ի վրա, որտեղ p -ն պարզ

թիվ է: Այդ դեպքում $f(n) - f(m) = 3(n-m)(m+m)$ չի բաժանվում p -ի վրա կամայական $m = 1, 2, \dots, n-1$: Ուստի $p > 2n-1 = \max_{1 \leq m \leq n-1} (n+m)$: Մյուս կողմից $f(n) = 3n^2 + 1$

կարող է ունենալ ամենաշատը մեկ պարզ բաժանարար, որը մեծ է $(2n-1)$ -ից:

Խնդիր 1.4: Գոյություն ունի՞ արդյոք $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ֆունկցիա, որը բավարարում է $f(f(x)) = x^3 - 2x + 1$ պայմանին կամայական $x \in \mathbb{Z}$ համար:

Ապացույց. Պատ.՝ գոյություն չունի: Ապացույցը կատարենք հակասող ենթադրության մեթոդով: Դիցուք խնդրի պայմանին բավարարող ֆունկցիա գոյություն ունի: Տեղադրելով $x = 0$ և $x = 1$ $f(f(x)) = x^3 - 2x + 1$ հավասարության մեջ, կստանանք $f(f(0)) = 1$ և $f(f(1)) = 0$: Նկատենք, որ $f(x^3 - 2x + 1) = f(f(f(x))) = f(x)^3 - 2f(x) + 1$, որի մեջ ևս տեղադրելով $x = 0$ և $x = 1$, կստանանք $f(0) = f(1)^3 - 2f(1) + 1$ և $f(1) = f(0)^3 - 2f(0) + 1$: Կատարելով $a := f(0)$ և $b := f(1)$ նշանակումները, կստանանք որ $f(a) = 1, f(b) = 0, a = b^3 - 2b + 1, b = a^3 - 2a + 1$: Վերջին երկու պայմաններից բխում է, որ $(a-b)(a^2 + ab + b^2 - 1) = 0$: Նկատենք, որ $f(a) = 1, f(b) = 0$ պայմաններից հետևում է, որ $a \neq b$, այսինքն՝ $a^2 + ab + b^2 = 1$: Վերջին հավասարմանը բավարարող զույգերն են՝ $(a, b) \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \mp 1)\}$, որոնցից $a = b^3 - 2b + 1$ և $b = a^3 - 2a + 1$ պայմաններին բավարարում են միայն $a = 0, b = 1$ և $a = 1, b = 0$ զույգերը: Եթե $a = 0$ և $b = 1$, ապա $f(a) = 1$ պայմանից կստանանք, որ $f(0) = 1$, որը հակասում է $f(0) = a = 0$ պայմանին: Հանգուկորեն, հակասության է բերում նաև $a = 1, b = 0$ դեպքը: Այսպիսով՝ մեր սկզբնական ենթադրությունը ճիշտ չէր, և հետևաբար խնդրի պայմանին բավարարող ֆունկցիա գոյություն չունի:

Խնդիր 1.5: Տրված է 100-ից փոքր բնական թվերի $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ հաջորդականությունը: Գտնել հաջորդականության էլեմենտների գումարի հնարավոր փոքրագույն արժեքը, եթե հայտնի է, որ $\sum_{i=l}^k a_i \neq 100$, կամայական $1 \leq l < k \leq 2025$ բնական թվերի համար:

Ապացույց. Դիտարկենք ստորև սահմանված հաջորդականությունը:

$$a_n = 1, \text{ եթե } n \not\equiv 0, 98 \text{ կամ } 99 \pmod{100}$$

$$a_n = 2, \text{ եթե } n \equiv 98 \text{ կամ } 0 \pmod{100}$$

$$a_n = 99, \text{ եթե } n \equiv 99 \pmod{100}$$

Յուրաքանչյուր անընդմեջ տարրերի գումարը՝

մեծ է 100-ից, եթե տարրերից մեկը 99 է

մեծ է 100-ից, եթե առնվազն երկու տարրը 2 են

փոքր է 100-ից, հակառակ դեպքում:

Այսպիսով, որևէ անընդմեջ տարրերի գումարը 100-ին հավասար չէ:

$$\sum_{i=1}^{2025} a_i = (97 \cdot 1 + 2 + 99 + 2) \cdot 20 + 25 \cdot 1 = 4025$$

Մտում է ցույց տալ, որ 4025-ը գումարի նվազագույն հնարավոր արժեքն է:

Ենթադրենք, որ գոյություն ունի հաջորդականություն, որը բավարարում է պայմաններին, բայց ունի ավելի փոքր անդամների գումար: Եթե այդպիսի հաջորդականություն գոյություն ունի, ապա դրա որևէ 100 հաջորդական տարրերի գումարը կլինի 200-ից փոքր, այլապես տրոհելով հարյուրակների առաջին 2000 էլեմենտները, կարելի է պնդել, որ դրանց գումարը կլինի առնվազն 4000: Հաշվի առնելով որ մյուս 25 էլեմենտները բնական են, այն է մեծ են կամ հավասար 1-ի,

կատանանք որոնելի արդյունքը:

Նշենք այն տարրերը որոնց գումարը փոքր է 200-ից՝ $b_1, b_2, \dots, b_{100}$, որտեղ.

$$b_i < 100 \text{ և } \sum_{i=1}^{100} b_i \leq 199$$

Սահմանենք

$$B_k = \sum_{i=1}^k b_i :$$

B_k -ն աճող հաջորդականություն է այնպիսին, որ $\forall n, B_n \neq 100$ (քիտում է անընդմեջ անդամների գումարի 100-ի հավասար չլինելու պայմանից), ուստի գոյություն ունի k այնպիսին, որ $B_k < 100$ և $B_{k+1} > 100$

Ունենք

$$101 \leq 100 + B_1, 100 + B_2, \dots, 100 + B_k, B_{k+1}, B_{k+2}, \dots, B_{100} \leq 199.$$

Ուստի, նշված 100 թվերից երկուսը պետք է լինեն նույնը: Քանի որ $B_n \neq B_m$, եթե $n \neq m$, ապա $B_n + 100 = B_m$:

Այսպիսով, ստանում ենք՝

$$\sum_{i=n+1}^m b_i = B_m - B_n = 100,$$

որը հակասություն է:

Հետևաբար, $\sum_{i=1}^{2025} a_i \geq 4025$:

Ինչպես արդեն ցույց ենք տվել, այս գնահատականը հասանելի է:

Պատասխան՝ 4025

Յուրաքանչյուր խնդրի լուծման համար տրվում է 10 միավոր:

Օլիմպիադայի հանձնաժողովի նախագահ՝

Կ. Քեռյան