

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Դպրոցական մաթեմատիկական օլիմպիադա

12 ապրիլի, 2025 թ.

Խնդիր 2.1: Դիցուք P -ն ամբողջ գործակիցներով բազմանդամ է, որի ավագ անդամի գործակիցը 1 է: Հայտնի է, որ գոյություն ունեն a, b, c, d իրարից տարբեր ամբողջ թվեր, այնպիսիք, որ

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5 :$$

Գտնել բոլոր k ամբողջ թվերն, որոնց համար $P(k) = 8$:

Լուծում. Խնդրի պայմաններից հետևում է, որ P -ն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)Q(x) + 5 :$$

Հետևաբար $P(k) = 8$ պայմանից կբխի, որ $(k-a)(k-b)(k-c)(k-d) \mid 3$, որը տեղի ունենալ չի կարող, որովհետև 3-ը չունի իրարից տարբեր 4 բաժանարար, որոնց արտադրյալը 3 է: Այսինքն խնդրի պայմաններին բավարարող k գոյություն չունի:

Խնդիր 2.2: Դիցուք $a_1, a_2, \dots, a_n$ դրական թվերը բավարարում են $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \geq 1$ պայմանին: Ապացուցել, որ

$$a_1^2 + a_2^3 + \dots + a_n^{n+1} \geq a_1 + a_2^2 + \dots + a_n^n :$$

Ապացույց. Խնդրի պայմանից և միջին թվաբանականի ու միջին երկրաչափականի անհավասարությունից հետևում է, որ $\sum_{i=1}^n a_i \geq n$: Որտեղից էլ կստանանք, որ

$$\sum_{i=1}^n a_i^i (a_i - 1) = \sum_{i=1}^n (a_i^i - 1) (a_i - 1) + \sum_{i=1}^n a_i - n \geq 0 :$$

Խնդիր 2.3: Սեղանին դրված են 9 խաղաթղթեր, որոնց վրա գրված են 1-ից 9 թվերը: Ամեն քայլին խաղացողներից մեկը վերցնում է սեղանին մնացած քարտերից մեկը: Եթե խաղացողներից որևէ մեկը ինչ որ պահի ունի ճիշտ երեք քարտ, որոնց վրա գրված թվերի գումարը 15 է, ապա նա հաղթում է, և խաղը միանգամից ավարտվում է: Հակառակ դեպքում բոլոր խաղաքարտերի վերջանալուց հետո հայտարարվում է ոչ-ոքի: Ինչպե՞ս կավարտվի խաղը երկկողմանի ճիշտ խաղի դեպքում:

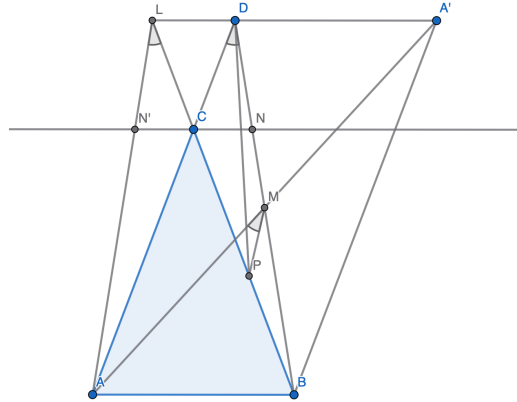
Լուծում. Խաղը կավարտվի ոչ-ոքի: Թվերը դասավորենք հետևյալ կերպ:

$$\begin{array}{ccc} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{array}$$

Նկատենք, որ երեք թվերի գումարը 15 է, այն և միայն այն դեպքում, երբ երեք թվերը գտնվում են նույն տողի, սյան կամ անկյունագծի վրա: Հետևաբար՝ այս խաղը համարժեք է հայտնի крестики-нолики խաղին, որում խաղացողներից ոչ մեկը չի կարող հաղթել ճիշտ խաղի դեպքում:

Խնդիր 2.4: Դիցուք $\triangle ABC$ -ն հավասարասրուն է և $AC = BC$: D կետը ընտրված է AC կողմի շարունակության վրա այնպես որ C կետը գտնվում է A և D կետերի

Ապացույց. Շրջանագծի շոշափողի հատկությունից, $\angle AMP = \angle ADM$: Կառուցենք L կետն այնպես որ $ABDL$ քառանկյունը լինի հավասարասրուն սեղան: Պարզ է որ $\angle ALB = \angle ADB$: Հետևաբար $\angle ALP = \angle AMP$ և A, L, M, P կետերը գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա:



Այսպիսով A, L, P, M, N կետերը գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա:

Ապացույց. Վերցնելով $m = 6n$, մենք կապացուցենք, որ գոյություն ունեն անվերջ ով n բնական թվեր, այնպես որ $6n + 1, 12n + 1$ և $18n + 1$ թվերից յուրաքանչյուրը տղադրյալ է և հանդիսանում է $2^{6n} - 1$ թվի բաժանարար:

Ենթադրենք n բնական թիվը բավարարում է խնդրի պահանջին: Ապացուցենք, որ $N = \frac{2^{12n}-1}{9}$ թիվը ևս այդպիսին է: Նկատենք, որ $6N = \frac{2(2^{12n}-1)}{3}$ և $2(6n+1)(12n+1) \mid 6N$ n -ի վերաբերյալ արված ենթադրության շնորհիվ: Այսպիսով՝

$$18N + 1 = 2^{12n+1} - 1 | 2^{6N} - 1.$$

Նկատելով, որ $6N + 1, 12N + 1, 18N + 1$ թվերը բաղադրյալ են և $N = \frac{2^{12n}-1}{9} > n$, կարող ենք ինդուկտիվ եղանակով կառուցել ինդրի պահանջին բավարարող անվերջ թվով բնական թվեր:

Յուրաքանչյուր ինդրի լուծման համար տրվում է 10 միավոր:

Օլիմպիադայի հանձնաժողովի նախագահ՝

Կ. Քեռյան